Condizioni del primo ordine del problema di massimo profitto di x_i

$$\max_{x_i} \pi_i = p_i(x_i, x_j) \cdot \mathcal{Z} - c x_i \qquad \text{dove} \qquad p_i = \underbrace{\frac{x_i^r}{\sum_{j=1}^{n} x_j^r}}$$

$\Rightarrow$ probabilità esente di vittoria di i (contest success function)

$$\frac{d\pi_i}{dx_i} = \phi \Rightarrow \underbrace{\frac{d\, p_i(x_i, x_j)}{dx_i}} \cdot \mathcal{Z} - c = \phi$$

$$\frac{d p_i(x_i, x_j)}{d x_i} = \frac{r x_i^{r-1} \left[\sum_{j=1}^{n} x_j^r\right] - x_i^r \cdot r x_i^{r-1}}{\left[\sum_{j=1}^{n} x_j^r\right]^2}$$

$\Rightarrow$ hp è che $x_i = x_j$ (gli atleti sono tutti uguali)

in questo caso $\sum_{j=1}^{n} x_j^r = n x_j^r$

$$\frac{d p_i(x_i, x_j)}{d x_i} = \frac{r x_i^{r-1} (n x_i^r) - x_i^{2r-1} \cdot r}{(n x_i^r)^2} \Rightarrow \frac{d p_i(\cdot)}{d x_i} = \frac{r \cancel{x_i^{2r-1}} n - r \cancel{x_i^{2r-1}}}{n^2 \cancel{x_i^{2r}}}$$

raccogliamo r e semplifichiamo per x_i^{2r}

$$\frac{d p_i(\cdot)}{d x_i} = \frac{\gamma(n-1)\, x_i^{-1}}{n^2}$$

$$\frac{d p_i(\cdot)}{d x_i} = \frac{\gamma(n-1)}{n^2 x_i}$$

tornando quindi alla condizione del primo ordine

$$\frac{d p_i(\cdot)}{d x_i} \cdot z - c = 0$$

sostituiamo e $\frac{d p_i(\cdot)}{d x_i}$ così che abbiamo sviluppato

$$\frac{\gamma(n-1)}{n^2 x_i} \cdot z = c$$

da qui ricaviamo "l'effort ottimale"

$$c x_i = \frac{\gamma(n-1)\cdot z}{n^2}$$

da cui

$$x_i^* = \frac{\gamma(n-1)\cdot z}{n^2 c}$$

EFFORT OTTIMALE DI i

Cerchiamo le derivate di statica comparata sulla soluzione ottimale

$$x_i^* = \frac{\gamma(n-1)\cdot z}{n^2 \cdot c} \qquad x_i^* = f[\overset{-}{n}, \overset{+}{z}, \overset{-}{c}, \overset{+}{\gamma}]$$

$$\frac{dx_i^*}{dn} = \frac{\gamma z(n^2 c) - 2nc(n-1)\gamma z}{[n^2 c]^2} \; ; \; \frac{\gamma z[n^2 c - 2n^2 c + 2nc]}{n^4 c^2} \; ; \; \frac{\gamma z[2nc - n^2 c]}{n^4 c^2}$$

$$\frac{\cancel{c}\, \cancel{n}\, \gamma z[2 - n]}{n^{\cancel{4}\,3} c^{\cancel{2}}}$$

$$\frac{dx_i^*}{dz} = \frac{\gamma(n-1)}{n^2 c} > 0$$

$$\frac{dx_i^*}{dc} = \frac{-n^2(n-1)\gamma z}{(n^2 c)^2} < 0$$

$$\frac{dx_i^*}{d\gamma} = \frac{(n-1)\cdot z}{n^2 c} > 0$$

dato che $n \geq 2$

$$\frac{dx_i^*}{dn} \leq 0$$