Università degli Studi di Teramo

Corso di Laurea in Economia

Insegnamento di Economia dello Sport - Prof. Marco Di Domizio

A.A. 2022/2023

Unità didattica 2

Dispensa 1

1. Eventi sportivi e teoria economica

Nell'unità didattica 1 abbiamo introdotto il concetto di domanda di sport, intendendo con questa l'insieme dei beni e servizi che un consumatore può selezionare all'interno di un ampio ventaglio di beni e servizi ricreativi. Una singola partita di calcio, un torneo di tennis, un incontro di pugilato, una gara ippica, la finale olimpica dei 100 metri, il Superbowl. Sono questi degli eventi ai quali possiamo assistere dal vivo oppure in televisione, in quest'ultimo caso guardandoli in diretta oppure in differita, ma sono comunque eventi per i quali "noi" sportivi siamo disposti a spendere risorse monetarie per poterne essere parte. Come abbiamo detto in precedenza, la domanda di questi eventi è legata ad una serie di fattori di lungo, medio e breve periodo di cui la "qualità" dell'evento stesso e il c.d. "equilibrio competitivo" sono fattori cruciali. Cosa intendiamo con qualità dell'evento ed equilibrio competitivo? Come si determinano? Quali sono i fattori in grado di influenzarli? Ovviamente il nostro approccio è di tipo economico, per cui la prima domanda che dobbiamo porci è:

In che modo l'economia politica studia un evento sportivo?

Per la teoria economica un evento sportivo, sia esso singolo oppure una competizione composta da un insieme di eventi (campionato, torneo) va inquadrato in una ottica di "contest", ovvero di competizione: due o più concorrenti (*competitors*) si affrontano in una gara in cui chi vince prende tutto. La vittoria, però, non è legata alla performance assoluta, ma a quella relativa. Immaginiamo la finale olimpica dei 100 metri piani: nessun atleta può avere la certezza di vincere la medaglia d'oro correndo sotto i 9' e 58", migliorando così il record di Usain Bolt. Certo, la probabilità che egli possa vincere la medaglia d'oro migliorando il record del mondo è molto alta, ma non pari ad uno. Questo dipende dal fatto che il risultato finale, nelle competizioni sportive, dipende dalla performance relativa, e non da quella assoluta. Per questo motivo la teoria economica utilizza gli strumenti della *Contest Theory* o *Tournament Theory* per studiare gli esiti delle competizioni sportive, contesti in cui i modelli teorici analizzano gli effetti degli schemi di premio basati su performance relative e non assolute. Una competizione sportiva viene quindi trattata come un'asta in cui i partecipanti fanno un'offerta e chi fa l'offerta maggiore vince. Ovviamente, in questo caso, fare l'offerta vuol dire definire, a priori, il livello di *effort* (impegno) che il contendente si propone di mettere nella gara, sia esso in termini di ingaggio di talento da parte di un team, di ore di allenamento se facciamo riferimento a sport individuali. C'è una fondamentale differenza, però, tra un'asta e una competizione sportiva. In un'asta chi offre di più vince. In questo caso si tratta di una competizione perfettamente discriminante. Nello sport il potere discriminante è inferiore. Non è detto, infatti, che se mi alleno di più sono sicuro di vincere. Nessuno ci garantisce che se allestisco una squadra con una quantità di talento superiore rispetto ai concorrenti vincerò con certezza matematica. L'impegno, in questo caso, non si traduce automaticamente in successo.

Il nostro obiettivo, in questa seconda unità didattica, sarà quello di introdurre dei modelli economici formalizzati attraverso i quali cercheremo di identificare da cosa dipende l'impegno di ogni partecipante alla competizione (maggiore impegno si traduce in maggiore qualità, e quindi maggiore interesse/domanda).

2. Un modello di Contest Theory

Analizziamo in questo paragrafo un modello di competizione tra un insieme di contendenti con un potere discriminante imperfetto. Ipotizziamo che alla competizione partecipino n contendenti, ognuno dei quali produce un impegno (*effort*) catturato dalla variabile x; sia Z il premio monetario che spetta al vincitore della gara (può essere vista sia come competizione singola, che come torneo). Definiamo *Contest Success Function* la probabilità di vittoria associata all'i-esimo partecipante:

$$p_i = \frac{x_i^\gamma}{\sum_{j=1}^{n} x_j^\gamma}, \qquad 0 < \gamma < 1, \quad n \geq 2, \tag{1}$$

dove γ è il parametro che cattura il "potere discriminante" della competizione, ovvero quanto l'impegno è in grado di tradursi in probabilità di successo. Come si può notare, nel caso in cui il potere discriminante fosse nullo ($\gamma \to 0$), la probabilità di successo sarebbe indipendente dallo sforzo profuso nella competizione, ma sarebbe una funzione legata al solo numero dei partecipanti. Al crescere del parametro γ aumenta la rilevanza della variabile che identifica l'impegno, fino a coincidere con essa nel caso tale parametro fosse uguale all'unità. Questa forma funzionale (chiamata LOGIT) è solo una delle possibili forme funzionali che possiamo dare alla *Contest Success Function*, ma è molto utile per chiarire gli aspetti salienti dei problemi che affrontiamo. Una volta definita la probabilità di vittoria, ogni contendente esprimerà il proprio livello di *effort* al fine di massimizzare una funzione di payoff, che definiamo come segue:

$$\pi_i = p_i(x_i; x_{j \neq i}) \cdot Z - c_i(x_i) \cdot x_i, \tag{2}$$

dove $c_i(x_i)$ indica il costo medio e marginale per unità di *effort* al quale il partecipante va incontro. In questa prima fase ipotizzeremo uguaglianza nei costi medi e marginali per ogni contendente, ipotesi che implica simmetria nella competizione, così come, per rendere più fluida la risoluzione del modello, consideriamo costi medi e marginali costanti [$c_i(x_i) = c$]. Ogni contendente sceglie quindi il proprio livello di *effort* per massimizzare la propria funzione di *payoff*

$$\max_{x_i} \pi_i = p_i(x_i; x_{j\neq i}) \cdot Z - c \cdot x_i, \tag{3}$$

imponendo la condizione del primo ordine:

$$\frac{d\pi_i}{dx_i} = 0 \rightarrow \frac{dp_i(x_i; x_{j\neq i})}{dx_i} \cdot Z - c = 0, \tag{4}$$

dove

$$\frac{dp_i(x_i; x_{j\neq i})}{dx_i} = \frac{\left(\gamma \cdot x_i^{\gamma-1} \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j^{\gamma}\right) - \left(\gamma \cdot x_i^{\gamma-1} \cdot x_i^{\gamma}\right)}{\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^{\gamma}\right)^2}. \tag{5}$$

Data l'ipotesi di uguaglianza dei costi dei contendenti, e quindi di simmetria tra i partecipanti, l'equilibrio comporterà $x_i = x_j$, così che la (5) può essere scritta come:

$$\frac{dp_i(x_i; x_{j\neq i})}{dx_i} = \frac{\gamma \cdot x_i^{\gamma-1} \cdot (n \cdot x_i^{\gamma}) - \gamma \cdot x_i^{2\gamma-1}}{n^2 \cdot x_i^{2\gamma}},$$

e raccogliendo avremo

$$\frac{dp_i(x_i; x_{j\neq i})}{dx_i} = \frac{\gamma \cdot x_i^{2\gamma-1} \cdot (n-1)}{n^2 \cdot x_i^{2\gamma}}. \tag{6}$$

Sostituendo la (6) nella condizione del primo ordine (4), avremo:

$$\frac{\gamma \cdot x_i^{2\gamma-1} \cdot (n-1)}{n^2 \cdot x_i^{2\gamma}} \cdot Z = c,$$

ed esplicitando rispetto ad x_i:

$$x_i^* = \frac{\gamma \cdot (n-1) \cdot Z}{n^2 \cdot c}. \qquad (7)$$

La equazione (7) esprime la soluzione di Nash del livello di *effort* ottimale di ogni contendente. In un contesto di simmetria tra contendenti (legato, in questo modello, alla presenza di costi identici) il livello ottimale di *effort* sarà identico per ogni contendente. L'equazione (7) esprime, dunque, il livello ottimale di impegno che ogni contendente sceglie; questo indica, contemporaneamente, il livello qualitativo della competizione: tanto maggiore è l'impegno profuso, tanti migliori saranno i risultati a livello assoluto che determineranno, a loro volta, l'*appeal* dell'evento.

Da cosa dipende la scelta ottimale del competitor?

Svolgiamo, come abbiamo imparato nel corso di microeconomia, un'analisi di statica comparata sulla soluzione. Cerchiamo, quindi, le derivate di statica comparata della soluzione di equilibrio rispetto a tutte le variabili esogene o ai parametri che caratterizzano la soluzione. In forma implicita la soluzione ottimale può essere espressa come segue:

$$x_i^* = f(\gamma, n, Z, c).$$

Cerchiamo, quindi, i segni delle derivate del primo ordine per poter definire la direzione del cambiamento della soluzione ottimale rispetto ai cambiamenti delle variabili esogene e dei parametri. Avremo le seguenti quattro derivate di statica comparata:

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial \gamma} = \frac{(n-1) \cdot Z}{n^2 \cdot c} > 0,$$

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial n} = \frac{\gamma \cdot (2-n) \cdot Z}{n^3 \cdot c} < 0,$$

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial Z} = \frac{\gamma \cdot (n-1)}{n^2 \cdot c} > 0,$$

$\frac{\partial x_i^*}{\partial c} = -\frac{\gamma\cdot(n-1)\cdot Z}{n^2\cdot c^2} < 0.$

Il livello di equilibrio dell'impegno dei contendenti è crescente nel potere discriminante della competizione e nel valore del premio, mentre è inversamente correlato al numero dei partecipanti e al costo di ogni unità di *effort*.

3. Un'applicazione: equilibrio competitivo con due partecipanti

In questa sezione sviluppiamo il modello descritto nel precedente paragrafo ipotizzando una competizione alla quale partecipano due contendenti, che chiameremo A e B. In questo caso, fermo restando i parametri utilizzati in precedenza, le due probabilità associate al contest saranno le seguenti:

$$p_A = \frac{x_A^\gamma}{x_A^\gamma + x_B^\gamma}, \qquad p_B = \frac{x_B^\gamma}{x_A^\gamma + x_B^\gamma}$$

con rispettive funzioni di profitto espresse come segue

$$\pi_A = p_A(x_A; x_B)\cdot Z - c\cdot x_A, \qquad \pi_B = p_B(x_A; x_B)\cdot Z - c\cdot x_B.$$

Le condizioni del primo ordine imposte da ogni singolo contendente consistono, come al solito, nel porre uguale a zero le rispettive derivate parziali rispetto alla variabile di scelta:

$$\frac{d\pi_A}{dx_A} = 0 \rightarrow \frac{dp_A(x_A;x_B)}{dx_A}\cdot Z - c = 0 \rightarrow \frac{\gamma\cdot x_A^{\gamma-1}\cdot(x_A^\gamma + x_B^\gamma) - \gamma\cdot x_A^{\gamma-1} x_A^\gamma}{\left(x_A^\gamma + x_B^\gamma\right)^2}\cdot Z = c, \tag{8}$$

$$\frac{d\pi_B}{dx_B} = 0 \rightarrow \frac{dp_B(x_A;x_B)}{dx_B}\cdot Z - c = 0 \rightarrow \frac{\gamma\cdot x_B^{\gamma-1}\cdot(x_A^\gamma + x_B^\gamma) - \gamma\cdot x_B^{\gamma-1} x_B^\gamma}{\left(x_A^\gamma + x_B^\gamma\right)^2}\cdot Z = c. \tag{9}$$

Le equazioni (8) e (9) esprimono l'ipotesi di uguaglianza dei ricavi marginali, espressi dall'effetto dell'*effort* sulla probabilità di vincere il premio Z, e dei costi marginali dei due contendenti. L'ipotesi di simmetria nei costi dei contendenti implica l'uguaglianza stessa dei ricavi marginali nel punto soluzione. Possiamo così scrivere la (8) e la (9) in un'unica equazione:

$$\frac{\gamma \cdot x_A^{\gamma-1} \cdot (x_A^\gamma + x_B^\gamma) - \gamma \cdot x_A^{\gamma-1} x_A^\gamma}{(x_A^\gamma + x_B^\gamma)^2} \cdot Z = \frac{\gamma \cdot x_B^{\gamma-1} \cdot (x_A^\gamma + x_B^\gamma) - \gamma \cdot x_B^{\gamma-1} x_B^\gamma}{(x_A^\gamma + x_B^\gamma)^2} \cdot Z,$$

che semplificata avrà la seguente forma:

$$x_A^{\gamma-1} \cdot x_B^\gamma = x_B^{\gamma-1} \cdot x_A^\gamma.$$

Risolviamo semplificando le espressioni ed avremo

$$\frac{1}{x_A} = \frac{1}{x_B},$$

e quindi

$$x_A = x_B. \tag{10}$$

Come nelle attese, data l'ipotesi di simmetria nei costi, la soluzione prevede un uguale impegno da parte dei due contendenti. Sfruttiamo quindi la relazione di equilibrio contenuta nella (10) e sostituiamola nelle due condizioni del primo ordine indicate nelle equazioni (8) e (9), così da ottenere delle soluzioni esplicite al nostro problema. Avremo così le soluzioni nella seguente forma:

$$\frac{\gamma \cdot x_A^{\gamma-1} \cdot (x_A^\gamma + x_A^\gamma) - \gamma \cdot x_A^{\gamma-1} x_A^\gamma}{(x_A^\gamma + x_A^\gamma)^2} \cdot Z = c,$$

$$\frac{\gamma \cdot x_B^{\gamma-1} \cdot (x_B^\gamma + x_B^\gamma) - \gamma \cdot x_B^{\gamma-1} x_B^\gamma}{(x_B^\gamma + x_B^\gamma)^2} \cdot Z = c.$$

Risolviamo rispetto alle rispettive variabili ed avremo:

$$\frac{\gamma \cdot x_A^{\gamma-1} \cdot (2x_A^\gamma) - \gamma \cdot x_A^{2\gamma-1}}{(2x_A^\gamma)^2} \cdot Z = c,$$

$$\frac{\gamma \cdot x_B^{\gamma-1} \cdot (2x_B^\gamma) - \gamma \cdot x_B^{2\gamma-1}}{(2x_B^\gamma)^2} \cdot Z = c.$$

A questo punto possiamo svolgere i calcoli al numeratore e sviluppare il quadrato al denominatore,

$$\frac{2 \cdot \gamma \cdot x_A^{2\gamma-1} - \gamma \cdot x_A^{2\gamma-1}}{4x_A^{2\gamma}} \cdot Z = c,$$

$$\frac{2 \cdot \gamma \cdot x_B^{2\gamma-1} - \gamma \cdot x_B^{2\gamma-1}}{4x_B^{2\gamma}} \cdot Z = c,$$

e semplificando ulteriormente avremo:

$$\frac{\gamma \cdot x_A^{2\gamma-1} \cdot Z}{4x_A^{2\gamma}} = c,$$

$$\frac{\gamma \cdot x_B^{2\gamma-1} \cdot Z}{4x_B^{2\gamma}} = c.$$

A questo punto possiamo semplificare il numeratore ed il denominatore (escludiamo naturalmente l'ipotesi di un *effort* nullo per il quale la soluzione non è inclusa nell'insieme dei numeri reali):

$$\frac{\gamma \cdot x_A^{-1} \cdot Z}{4} = c,$$

$$\frac{\gamma \cdot x_B^{-1} \cdot Z}{4} = c,$$

ed infine le soluzioni saranno le seguenti:

$$x_A^* = \frac{\gamma \cdot Z}{4 \cdot c} = x_B^*. \qquad (11)$$

L'equazione (11) esplicita la soluzione in presenza di due *competitors* che, come si può agevolmente dedurre dalla equazione (7), rappresenta un caso particolare di una competizione con *n* partecipanti. Resta un ultimo passaggio da sviluppare, che consiste nella determinazione dell'equilibrio competitivo del *contest*. Per definizione l'equilibrio competitivo è il rapporto tra le probabilità di vittoria dei contendenti. Ricaviamo quindi le rispettive probabilità sostituendo le soluzioni di equilibrio espresse nella (11):

$$Equilibrio\ Competitivo\ (EC) \equiv \frac{p_A^*}{p_B^*} = \frac{(x_A^*)^\gamma / [(x_A^*)^\gamma + (x_B^*)^\gamma]}{(x_B^*)^\gamma / [(x_A^*)^\gamma + (x_B^*)^\gamma]}$$

ed essendo l'equilibrio simmetrico, avremo una competizione con un equilibrio competitivo perfetto, con $EC = 1$.