Università degli Studi di Teramo

Corso di Laurea in Economia

Insegnamento di Economia dello Sport - Prof. Marco Di Domizio

A.A. 2022/2023

Unità didattica 2

Dispensa 2

1. Disuguaglianze nei *competitors*: un modello con asimmetrie nei ricavi

Nella dispensa precedente abbiamo introdotto un modello di *contest* ipotizzando la perfetta uguaglianza dei contendenti. In particolare, sia il fattore discriminante, sia il premio, sia i costi associati all'*effort* erano identici. Queste ipotesi ci hanno condotto a delle soluzioni simmetriche, sia in termini di impegno di equilibrio dei contendenti, sia di equilibrio competitivo (perfetto). In questa sezione proveremo a rimuovere l'ipotesi di simmetria dei contendenti assumendo, per semplicità, che questa derivi da una diversa opportunità di sfruttare la vittoria, ovvero di trasformare l'impegno in probabilità di vittoria e da questa in ricavi. Il mondo dello sport è pieno di questi esempi. Pensiamo alla diversa capacità di sfruttamento dell'immagine di un campione di sport individuali, alla diversa possibilità di incassi di *club* localizzati in aree metropolitane rispetto a quelli di bacini di utenza ridotti; pensiamo alla capacità di attrarre interesse, e quindi finanziamenti, delle squadre nazionali nelle vittorie olimpiche. Ipotizzare, dunque, che ogni contendente acceda ad uno stesso premio è piuttosto irreale, dove il premio non va soltanto interpretato come "ricompensa" per la vittoria, ma come "indotto" determinato dalla vittoria stessa.

Come introdurre questa ipotesi di asimmetria nel modello precedentemente sviluppato? Lavoriamo sul modello con due contendenti ed ipotizziamo che, per ogni unità di ricavo del *competitor B*, il *competitor A* sia in grado di svilupparne una frazione aggiuntiva che definiremo σ (sigma). Le rispettive funzioni di profitto potranno così essere scritte come:

$$\pi_A = p_A(x_A; x_B) \cdot \sigma Z - c \cdot x_A, \qquad \text{con} \qquad \sigma > 1, \tag{1}$$

$$\pi_B = p_B(x_A; x_B) \cdot Z - c \cdot x_B. \tag{2}$$

Le condizioni del primo ordine, in questo caso, si presenteranno come

$$\frac{d\pi_A}{dx_A} = 0 \rightarrow \frac{dp_A(x_A;x_B)}{dx_A} \cdot \sigma Z - c = 0 \rightarrow \frac{\gamma \cdot x_A^{\gamma-1} \cdot (x_A^\gamma + x_B^\gamma) - \gamma \cdot x_A^{\gamma-1} x_A^\gamma}{(x_A^\gamma + x_B^\gamma)^2} \cdot \sigma Z = c, \tag{3}$$

$$\frac{d\pi_B}{dx_B} = 0 \rightarrow \frac{dp_B(x_A;x_B)}{dx_B} \cdot Z - c = 0 \rightarrow \frac{\gamma \cdot x_B^{\gamma-1} \cdot (x_A^\gamma + x_B^\gamma) - \gamma \cdot x_B^{\gamma-1} x_B^\gamma}{(x_A^\gamma + x_B^\gamma)^2} \cdot Z = c. \tag{4}$$

Come abbiamo fatto per la precedente situazione, uguagliamo i costi marginali (che sono identici) ed avremo

$$\frac{\gamma \cdot x_A^{\gamma-1} \cdot (x_A^\gamma + x_B^\gamma) - \gamma \cdot x_A^{\gamma-1} x_A^\gamma}{(x_A^\gamma + x_B^\gamma)^2} \cdot \sigma Z = \frac{\gamma \cdot x_B^{\gamma-1} \cdot (x_A^\gamma + x_B^\gamma) - \gamma \cdot x_B^{\gamma-1} x_B^\gamma}{(x_A^\gamma + x_B^\gamma)^2} \cdot Z,$$

che semplificata con opportuni passaggi si trasformerà nella seguente espressione

$$x_A^{\gamma-1} \cdot x_B^\gamma \cdot \sigma = x_B^{\gamma-1} \cdot x_A^\gamma.$$

Risolviamo ed avremo:

$$\frac{\sigma}{x_A} = \frac{1}{x_B},$$

dalla quale possiamo individuare il rapporto di equilibrio dei rispettivi *efforts*

$$x_A = \sigma \cdot x_B. \tag{5}$$

L'ipotesi di asimmetria nei ricavi determina una soluzione non simmetrica nell'impegno profuso dai due contendenti. In particolare, l'*effort* prodotto dal competitor A è superiore, proporzionalmente, rispetto a quello di B. Sostituendo al posto di x_A e di x_B nelle condizioni del primo ordine (3) e (4) la soluzione (5), esplicitata rispetto alla variabile di interesse, avremo:

$$\frac{\gamma \cdot x_A^{\gamma-1} \cdot \left[x_A^\gamma + \left(\frac{x_A}{\sigma}\right)^\gamma\right] - \gamma \cdot x_A^{\gamma-1} x_A^\gamma}{\left[x_A^\gamma + \left(\frac{x_A}{\sigma}\right)^\gamma\right]^2} \cdot \sigma Z = c,$$

$$\frac{\gamma \cdot x_B^{\gamma-1} \cdot \left[x_B^\gamma + (\sigma x_B)^\gamma\right] - \gamma \cdot x_B^{\gamma-1} x_B^\gamma}{\left[x_B^\gamma + (\sigma x_B)^\gamma\right]^2} \cdot Z = c.$$

Dopo aver svolto gli opportuni calcoli risolviamo rispetto alle variabili di scelta x_A e x_B ottenendo:

$$x_A' = \frac{\gamma \cdot Z \cdot \sigma^{\gamma+1}}{c \cdot (1+\sigma^\gamma)^2}, \tag{6}$$

$$x_B' = \frac{\gamma \cdot Z \cdot \sigma^\gamma}{c \cdot (1+\sigma^\gamma)^2}. \tag{7}$$

Come nelle attese le soluzioni di Nash non sono simmetriche (ricorda che il parametro sigma è superiore ad 1); in particolare l'impegno del competitor A è superiore rispetto a quello di B.

2. *Effort* di equilibrio ed equilibri competitivi: un confronto tra contesti simmetrici ed asimmetrici

Un primo interessante studio che possiamo condurre è il confronto tra gli equilibri determinatisi nei contesti asimmetrici rispetto a quelli che abbiamo derivato per i contesti simmetrici. Ci chiediamo, in particolare, se l'*effort* dei competitors cresce oppure si riduce in presenza di asimmetrie nelle funzioni dei ricavi. Confrontiamo quindi le soluzioni descritte nella equazione (11) della prima dispensa della unità didattica 2 con quelle descritte nelle equazioni (6) e (7) della presente dispensa.

Consideriamo il rapporto tra l'*effort* profuso dal contendente A in contesti simmetrici con lo stesso ottenuto per contesti asimmetrici:

$$\frac{x_A^*}{x_A'} = \frac{\frac{\gamma \cdot Z}{4 \cdot c}}{\frac{\gamma \cdot Z \cdot \sigma^{\gamma+1}}{c \cdot (1+\sigma^{\gamma})^2}}.$$

Apportiamo le dovute semplificazioni alla espressione e otteniamo:

$$\frac{x_A^*}{x_A'} = \frac{(1+\sigma^{\gamma})^2}{4 \cdot (\sigma^{\gamma+1})}, \tag{8}$$

rapporto del quale possiamo studiare i limiti sulla base dei possibili valori che possono essere assunti dal parametro σ.

Intanto possiamo agevolmente verificare che per $\sigma \to 1$ (ovvero la soluzione torna ad essere identica a quella del contesto simmetrico) il valore della (8) è pari ad 1; le soluzioni, dunque, coincidono. Per valori crescenti del parametro che cattura l'intensità della simmetria, al limite per $\sigma \to \infty$, il valore della (8) tende a 0. Questo implica che al crescere della asimmetria il denominatore cresce più velocemente del numeratore, e dunque l'*effort* del contendente A è maggiore rispetto a quello di una situazione di simmetria. Verifichiamo cosa accade per il contendente B. Il rapporto tra i valori di *effort* di equilibrio è:

$$\frac{x_B^*}{x_B'} = \frac{\frac{\gamma \cdot Z}{4 \cdot c}}{\frac{\gamma \cdot Z \cdot \sigma^{\gamma}}{c \cdot (1+\sigma^{\gamma})^2}},$$

il cui sviluppo definirà il seguente rapporto:

$$\frac{x_B^*}{x_B'} = \frac{(1+\sigma^{\gamma})^2}{4 \cdot \sigma^{\gamma}}. \tag{9}$$

Il valore della equazione (9) tende, naturalmente, ad 1 per $\sigma \to 1$ (ovvero il contesto torna ad essere simmetrico). Al contrario, per $\sigma \to \infty$ (dunque al crescere della simmetria) il limite della (9) tende anch'esso ad infinito. Questo implica che l'*effort* del competitor B si riduce al crescere della asimmetria rispetto al contesto simmetrico.

Una volta calcolate le soluzioni per questi contesti asimmetrici possiamo individuare le derivate di statica comparata. In forma implicita possiamo esprimere le soluzioni come segue:

$x'_A = f(\gamma, Z, c, \sigma)$,

$x'_B = g(\gamma, Z, c, \sigma)$,

Cerchiamo ora le derivate di statica comparata delle soluzioni; per quanto riguarda il *competitor A* e la sua relazione rispetto al parametro che cattura l'asimmetria della competizione avremo:

$$\frac{\partial x'_A}{\partial \sigma} = \frac{\gamma \cdot Z \cdot \sigma^{\gamma}}{c \cdot (1+\sigma^{\gamma})^3} \cdot [1 + \gamma + \sigma^{\gamma} \cdot (1 - \gamma)] > 0.$$

L'*effort* di equilibrio del *competitor A* cresce, dunque, al crescere della asimmetria della competizione. Cosa possiamo dire rispetto al parametro che cattura il potere discriminatorio del *contest*? Sviluppando la derivata abbiamo:[1]

$$\frac{\partial x'_A}{\partial \gamma} = \frac{Z \cdot \sigma^{\gamma+1}}{c \cdot (1+\sigma^{\gamma})^3} \cdot \left[1 + \gamma \cdot ln(\sigma) + \sigma^{\gamma}\left(1 - \gamma \cdot ln(\sigma)\right)\right] \lesseqgtr 0.$$

Il segno della relazione della derivata di statica comparata rispetto al parametro γ dipende dal segno della espressione all'interno della parentesi quadra. Per $\gamma \to 0$ il segno è certamente positivo. Per valori di $\gamma \to 1$ il segno non è più determinabile, ma dipenderà, appunto, dal valore del parametro σ. Tanto più alto sarà il valore di questo parametro tanto più è probabile che il segno della derivata di statica comparata si inverta per diventare negativo. Le ragioni dell'inversione del segno da positivo a negativo rispetto al potere discriminatorio della competizione possono essere individuate nell'effetto indiretto che l'asimmetria genera sull'*effort* del *competitor B*. Come vedremo

[1] Ricorda che, data una funzione del tipo $y = a^{f(x)}$ la derivata prima avrà la seguente forma: $y' = f'(x) \cdot a^{f(x)} \cdot \ln(a)$.

tra poco un aumento dell'asimmetria induce il *competitor B* a ridurre il suo impegno e questo può, a sua volta, spingere il *competitor A* a ridurre a sua volta l'impegno. Per quanto riguarda le altre relazioni abbiamo:

$$\frac{\partial x'_A}{\partial Z} = \frac{\gamma \cdot \sigma^{\gamma+1}}{c \cdot (1+\sigma^\gamma)^2} > 0,$$

$$\frac{\partial x'_A}{\partial c} = -\frac{\gamma \cdot Z \cdot \sigma^{\gamma+1}}{c^2 \cdot (1+\sigma^\gamma)^2} < 0.$$

Per quanto riguarda il *competitor B* la relazione tra l'*effort* di equilibrio e l'asimmetria della competizione sarà:

$$\frac{\partial x'_B}{\partial \sigma} = \frac{\gamma^2 \cdot Z \cdot \sigma^{\gamma-1} \cdot (1-\sigma^\gamma)}{c \cdot (1+\sigma^\gamma)^3} < 0,$$

che è, come dicevamo in precedenza e come nelle attese, negativa. Per quanto riguarda la relazione rispetto al parametro discriminante della competizione avremo:

$$\frac{\partial x'_B}{\partial \gamma} = \frac{Z \cdot \sigma^\gamma}{c \cdot (1+\sigma^\gamma)^3} \cdot \left[1 + \gamma \cdot ln(\sigma) + \sigma^\gamma \left(1 - \gamma \cdot ln(\sigma)\right)\right] \lesseqqgtr 0,$$

il cui andamento segue esattamente quello descritto nella discussione per il *competitor A*. Le derivate di statica comparata rispetto agli altri parametri presentano, come nelle attese, i seguenti segni:

$$\frac{\partial x'_B}{\partial Z} = \frac{\gamma \cdot \sigma^\gamma}{c \cdot (1+\sigma^\gamma)^2} > 0,$$

$$\frac{\partial x'_B}{\partial c} = -\frac{\gamma \cdot Z \cdot \sigma^\gamma}{c^2 \cdot (1+\sigma^\gamma)^2} < 0.$$

L'impegno di entrambi i contendenti, in termini assoluti, dipende positivamente dal premio monetario associato alla competizione, negativamente dal costo marginale dell'impegno, mentre più complesse sono le relazioni tra le soluzioni di equilibrio e il potere discriminante della competizione e del *gap* dei potenziali ricavi. Rispetto a quest'ultimo elemento, sintetizzato dal parametro σ, osserviamo come l'*effort* del contendente A cresce al crescere dello stesso parametro, mentre il contrario avviene per il secondo contendente. A parità di tutte le altre condizioni, quindi, un aumento della differenza nella possibilità di generare ricavi aumenta il *gap* nell'impegno dei due contendenti.

Più articolata è la riflessione sulla derivata di statica comparata del potere discriminante della competizione. In generale, come si deduce dai brevi commenti seguenti i calcoli, per valori bassi del potere discriminante la relazione ha segno positivo, per cui l'*effort* cresce al crescere di γ. Tale segno può invertirsi al crescere del potere discriminante della competizione, ma soprattutto per alti valori di σ. È molto probabile, in questo caso, che il *gap* nella potenzialità dei ricavi determini un disincentivo ad accrescere lo sforzo perché la differenza nella dimensione dei due contendenti domina su qualsiasi altra componente. Questo risultato introduce la riflessione rispetto all'equilibrio competitivo che si genera in presenza di asimmetrie. Proviamo a verificarne la portata. Ricordiamo che l'equilibrio competitivo è ottenuto dividendo le rispettive probabilità di vittoria, ed è espresso dalla seguente relazione:

$$EC' \equiv \frac{p_A'}{p_B'} = \frac{(x_A')^\gamma \Big/ \left[(x_A')^\gamma + (x_B')^\gamma\right]}{(x_B')^\gamma \Big/ \left[(x_A')^\gamma + (x_B')^\gamma\right]},$$

che semplificata può essere scritta come

$$EC' \equiv \frac{p_A'}{p_B'} = \frac{(x_A')^\gamma}{(x_B')^\gamma}.$$

Recuperiamo le soluzioni del modello dalle equazioni (6) e (7) ed otteniamo:
Semplificando i termini otteniamo:

$$EC' = \sigma^\gamma. \tag{10}$$

L'asimmetria nella funzione dei ricavi, che genera quindi asimmetria della competizione e nell'impegno di "equilibrio" che ogni contendente profonde nel *contest*, si traduce in un "disequilibrio competitivo", noto nella letteratura della economia dello sport come *competitive unbalance*, che, per molti, rappresenta un rischio per la competizione sportiva, in quanto mina alla base i presupposti dell'interesse e, quindi, la sua stessa sopravvivenza.

Come si può osservare dalla soluzione indicata nella (10) l'equilibrio competitivo sarà tanto più lontano dalla unità (equilibrio competitivo perfetto) quanto più alti sono i valori dei parametri che caratterizzano le potenzialità di ricavo ed il potere discriminante della competizione. Calcolando le derivate di statica comparata avremo, infatti, le seguenti relazioni:

$$\frac{\partial E'}{\partial \sigma} = \gamma \cdot \sigma^{\gamma-1} > 0,$$

$$\frac{\partial E'}{\partial \gamma} = \sigma^{\gamma} \cdot ln(\sigma) > 0.$$