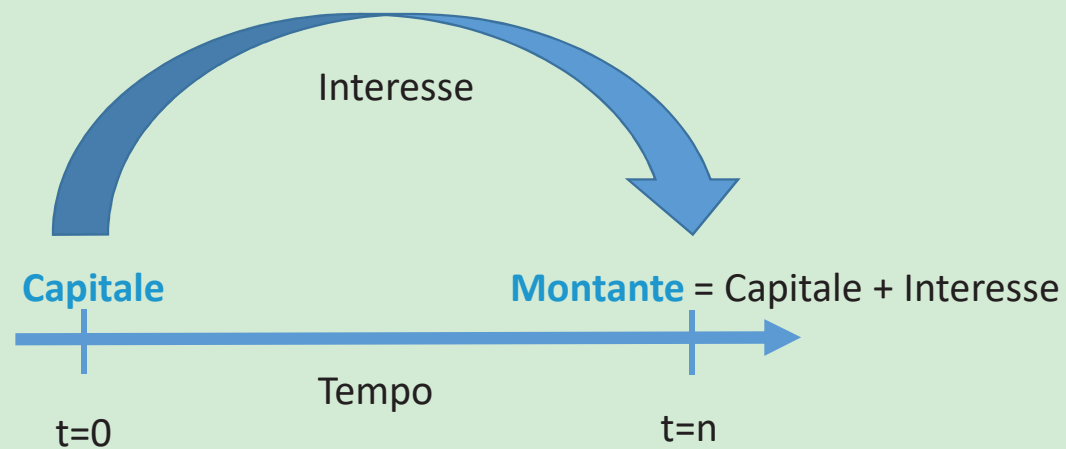


Capitalizzazione



La capitalizzazione è l'operazione con cui si calcola il valore futuro di un capitale disponibile al tempo presente.

Capitalizzazione semplice

Nel regime di **capitalizzazione semplice** l'interesse viene calcolato solo sul capitale iniziale, che rimane costante ogni anno.

L'applicazione degli interessi è detta **lineare**, ossia per ottenere l'ammontare degli interessi maturati basta sommare la quota di interessi applicata ogni anno al capitale iniziale.

$$\text{Montante} = \text{Capitale}(1+(i*t))$$

$$i = \frac{\text{Montante} - \text{Capitale}}{\text{Capitale} * t}$$

Anni		I	II	III	
Tassi di rendimento		0,5%	0,5%	0,5%	
Capitale	5.000	5.025	5.025	5.025	M = 5.075

Capitalizzazione composta

Nella **capitalizzazione composta** l'interesse viene calcolato sulla base del montante maturato al termine di ogni anno. Gli interessi guadagnati alla fine di un periodo vengono re-investiti nel periodo successivo, ossia vanno ad aumentare il capitale alla fine di ogni anno.

$$\text{Montante} = \text{Capitale}(1+i)^t$$

$$i = \sqrt[t]{\frac{\text{Montante}}{\text{Capitale}}} - 1$$

Anni		I	II	III	
Tassi di rendimento		0,5%	0,5%	0,5%	
Capitale	5.000	5.025	5.050	5.075	M = 5.075

Calcolo montante

Capitalizzazione semplice

$$\text{Montante} = 5.000 * (1 + (0,005 * 3)) = 5.075$$

$$i_{\text{medio}} = \frac{(0,005 + 0,005 + 0,005)}{3} = 0,005 \text{ media aritmetica}$$

Capitalizzazione composta

$$\text{Montante} = 5.000 * (1 + 0,005)^3 = 5.075$$

$$i_{\text{medio}} = (0,005 * 0,005 * 0,005)^{(1/3)} = 0,005 \text{ media geometrica}$$

La media aritmetica può essere uguale a quella geometrica solo se i numeri della serie sono tutti uguali. In questo caso il tasso di rendimento è uguale nei diversi anni e pari a 0,5%.
In virtù di ciò alla fine dei 3 anni il montante risulta uguale.

Calcolo montante

Capitalizzazione semplice

Anni		I	II	III
Tassi di rendimento		0,5%	0,45%	0,7%
Capitale	5.000	5.025	5.022,5	5.035

Capitalizzazione composta

Anni		I	II	III
Tassi di rendimento		0,5%	0,45%	0,7%
Capitale	5.000	5.025	5.047,6	5.082,9

Montante in cap. semplice $\rightarrow i_{\text{medio}} = (0,005 + 0,0045 + 0,007) / 3 = 0,0055$
 $= 5.000 * (1 + (0,0055 * 3)) = 5.082,5$

Montante in cap. composta $\rightarrow i_{\text{medio}} = (0,005 * 0,0045 * 0,007)^{1/3} = 0,0054$
 $= 5.000 * (1 + 0,0054)^3 = 5.082,9$

Esercizio

Calcolare il montante ad interesse semplice del seguente capitale:

- 600€, tasso annuo 4,50% per 2 anni

$$\rightarrow M = 600 * (1 + (0,045 * 2)) = 654€ \quad \rightarrow I = 654 - 600 = 54€$$

$$i = \frac{654 - 600}{(600 * 2)} = 0,045$$

Calcolare il montante ad interesse composto del seguente capitale:

- 440€, tasso annuo 4,15% per 8 anni

$$\rightarrow M = 440 * (1 + 0,0415)^8 = 609,15€ \quad \rightarrow I = 609,15 - 440 = 169,15€$$

$$i = (609,15 / 440)^{(1/8)} - 1 = 0,0415$$

Esercizio

Calcolare il montante ad interesse semplice del seguente capitale:

- 700€, tasso annuo 4,2% per 1 anno e 4 mesi

Calcolare il montante ad interesse composto del seguente capitale:

- 3.150€, tasso annuo 4% per 124 giorni

Esercizio

Calcolare il montante ad interesse semplice del seguente capitale:

- 700€, tasso annuo 4,2% per 1 anno e 4 mesi

$$\rightarrow M = 700 * (1 + (0,042 * 16/12)) = 739,2\text{€}$$

$$I = 739,2 - 700 = 39,2$$

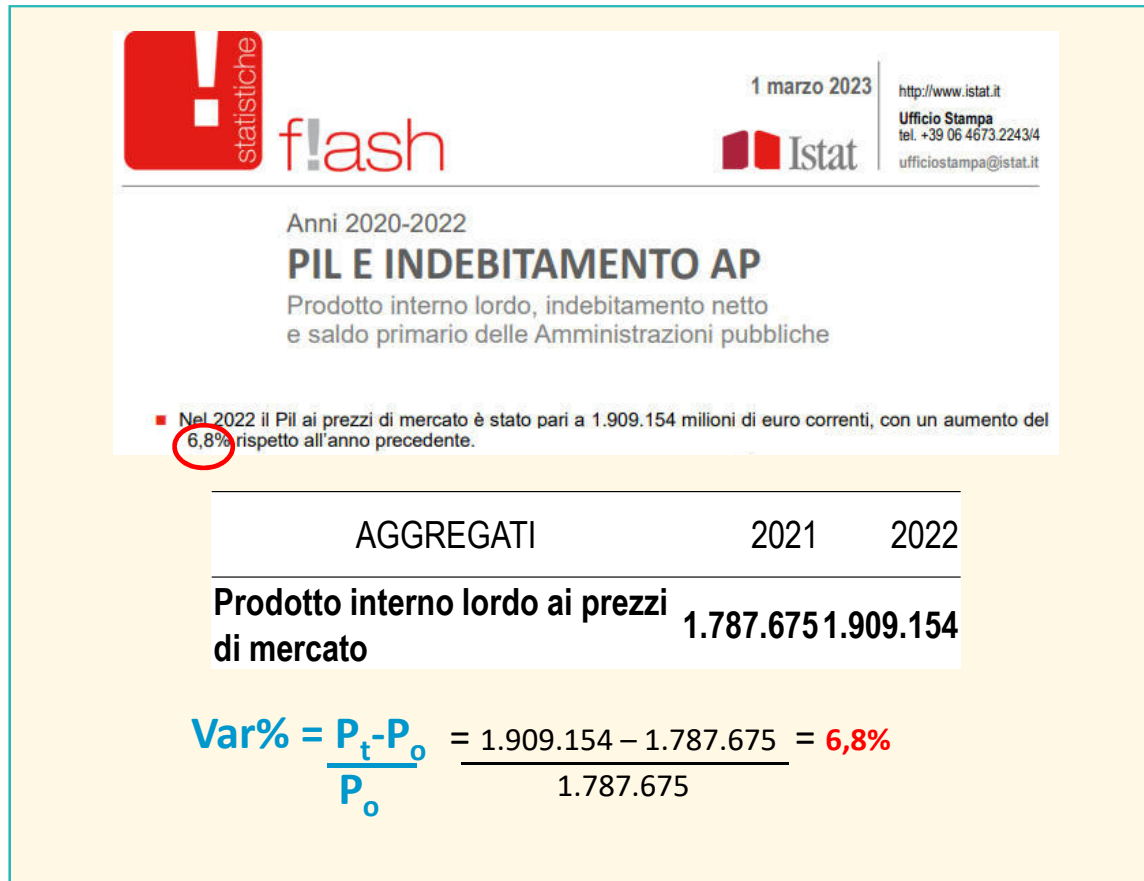
Calcolare il montante ad interesse composto del seguente capitale:

- 3.150€, tasso annuo 4% per 124 giorni

$$\rightarrow M = 3.150 * (1,04)^{(124/365)} = 3.192,2\text{€}$$

$$I = 3.192,2 - 3.150 = 42,2$$

Variazione percentuale del prezzo



Tasso di crescita del PIL reale

Anni	Pil reale	Tasso di crescita %
2011	814,07	
2012	832,77	
2013	825,13	

Tasso di crescita del PIL reale

Anni	Pil reale	Tasso di crescita %
2011	814,07	
2012	832,77	2,30
2013	825,13	-0,92

Price escalation

Quando il prezzo di una fornitura viene espresso a Condizioni Economiche Gen-2023, come si calcola la price escalation negli anni?

	2023	2024	2025	2026
Price escalation		3%	3%	3%
Prices	45.732	47.104	48.518	49.973

$$P_n = P \cdot (1,03)^n \quad \longrightarrow \quad 49.973 = 45.732 \cdot (1,03)^3$$

$$\text{Delta prezzo} = P \cdot (1,03)^n - P =$$

$$\longrightarrow 45.732 \cdot (1,03^3) - 45.732 = 4.241$$

Tasso d'incremento (r) della popolazione

Il **tasso di incremento** esprime il numero di individui che si aggiungono durante un intervallo di tempo standard (l'anno) per ogni 1.000 persone appartenenti alla popolazione.

Consente confronti tra fenomeni relativi a popolazioni differenti.

Per il calcolo servono 3 elementi:

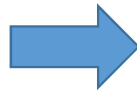
- 1- numerosità della popolazione al tempo t (iniziale) e t (finale)
- 2- il tempo durante il quale avviene l'incremento



Tipologie di tassi d'incremento

Si distinguono 3 tipologie di tassi a seconda delle assunzioni sulle leggi che regolano la crescita delle popolazioni:

1- Tasso d'incremento aritmetico



Popolazione di riferimento è quella all'inizio del periodo. Ipotizza la **crescita lineare** della popolazione (costante nel tempo es. giorno dopo giorno)

2- Tasso d'incremento geometrico



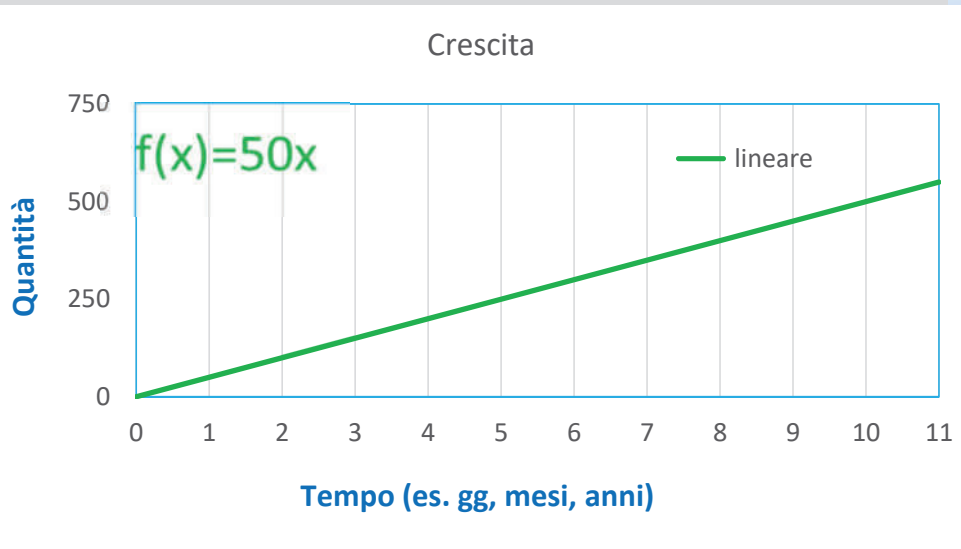
Popolazione di riferimento è quella esistente all'inizio di ciascun anno componente il periodo, il tempo viene considerato come una variabile discreta. **Progressione geometrica**

3- Tasso d'incremento continuo



Popolazione di riferimento è quella che esiste in ciascun intervallo infinitesimale piccolo. Ipotizza la continuità del fenomeno e una **crescita esponenziale**

Crescita lineare



Su un piano cartesiano **la crescita lineare** è rappresentata da una retta (più o meno inclinata).

Per crescita lineare si intende un incremento costante delle unità, giorno dopo giorno.

Ciò significa che le unità aumentano ogni giorno di una stessa quantità: al giorno 1 avrò 50, al giorno 2 avrò 100 e così via.

La progressione sarà: 50, 100, 150, 200, 250 etc...

La differenza tra un elemento, a partire dal secondo, ed il suo precedente è costante (ragione della progressione).

Crescita geometrica

Nella **capitalizzazione composta** l'interesse prodotto in ogni periodo si somma al capitale e produce a sua volta interessi tale che il Montante = $\text{Capitale}(1+i)^n$

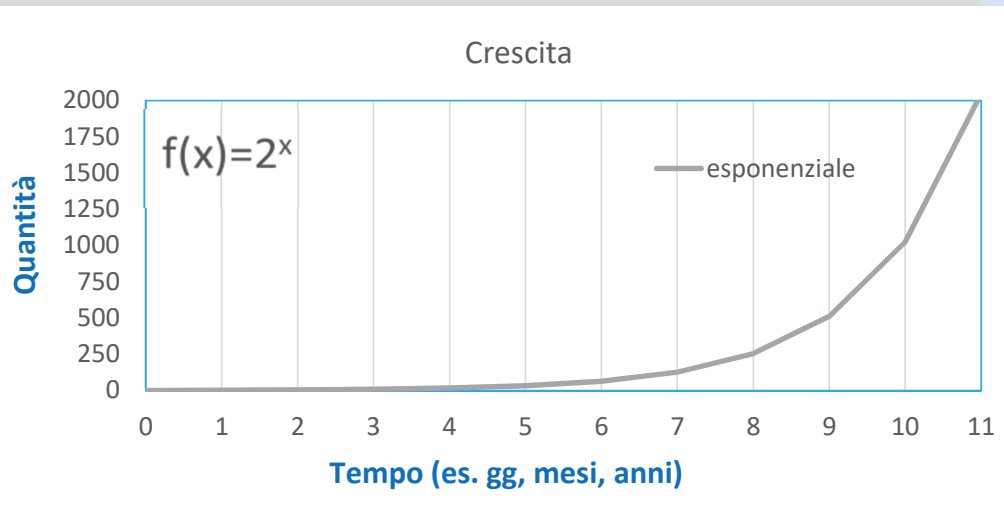
Anni	Capitale	Interessi
0	1.000.000	50.000
1	1.050.000	52.500
2	1.102.500	55.125
3	1.157.625	57.881
4	1.215.506	60.775
5	1.276.282	63.814

Capitale = 1mln€
Tasso d'interesse = 5%

Gli interessi maturati sono andati ad aumentare il capitale

Una progressione geometrica è una successione di numeri nella quale il quoziente tra ciascun termine e il termine seguente si mantiene costante (nell'esempio in tabella è 1,05).
Questo quoziente si chiama ragione della successione.

Crescita esponenziale

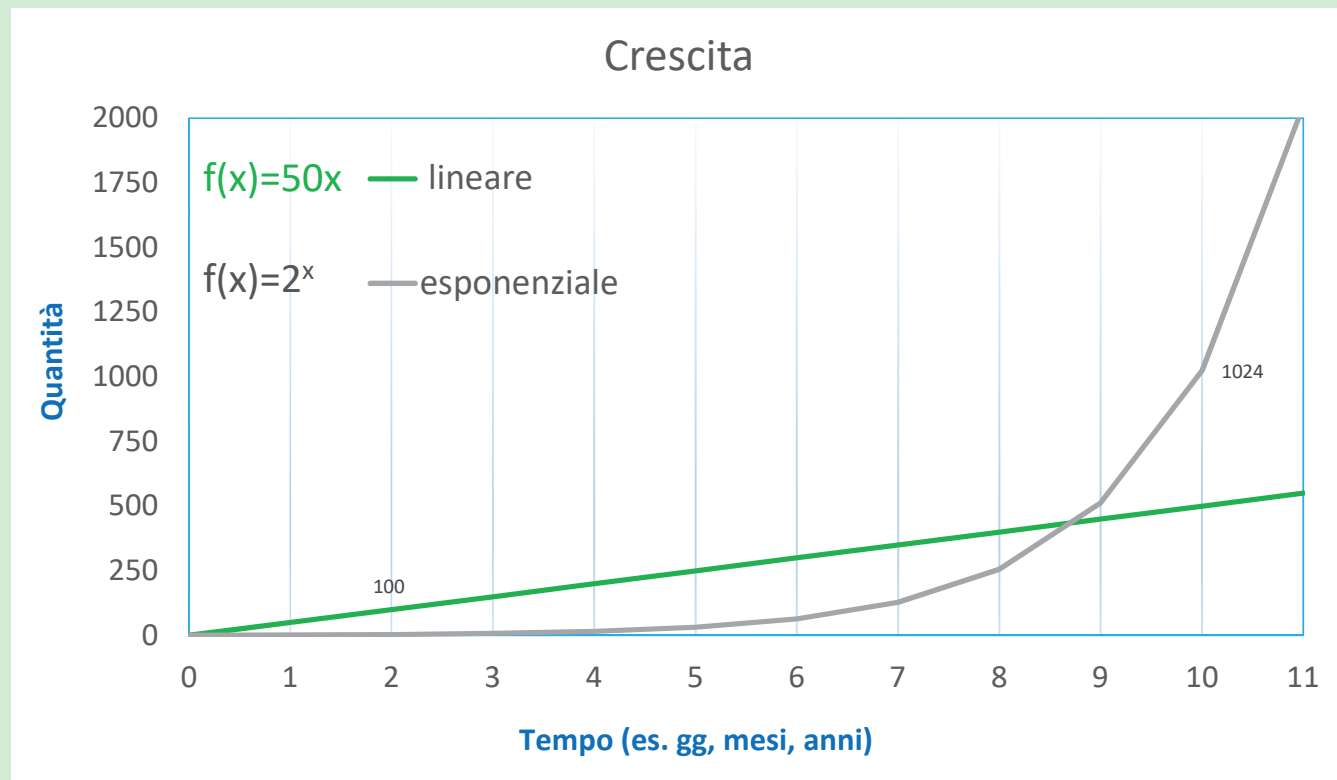


Quella **esponenziale** è una curva, che può salire più o meno rapidamente.

I fenomeni sottoposti ad una legge di crescita esponenziale in una prima fase osservano una crescita piuttosto lenta, che poi subisce un'accelerazione improvvisa.

Una quantità in crescita esponenziale è una funzione esponenziale del tempo, cioè, la **variabile indipendente (x)** che rappresenta il tempo compare ad esponente.

Crescita lineare ed esponenziale



Tasso di incremento aritmetico

Esprime il numero medio annuo di individui che si aggiungono o si sottraggono nell'intervallo di tempo considerato alla popolazione per ogni individuo presente all'inizio del periodo considerato (o per ogni mille), ipotizzando una **crescita lineare** della popolazione stessa.

$$r_a = \frac{P_t - P_0}{P_0 * n} \quad (n=\text{anni})$$

$$P_t = P_0 * (1 + r_a * n)$$

Dal 01/01/2007 al 01/01/2017 la popolazione italiana residente è passata da:

58,510 milioni (P_0)



60,066 milioni (P_{t+n})

Calcolo dell'incremento medio annuo aritmetico

$$r_a = \frac{60,066 - 58,510}{58,510 * 10} = 0,00266 \text{ (2,65 per mille)}$$

Nei 10 anni considerati, ogni 1.000 abitanti presenti nel 2007, si sono aggiunti annualmente **2,65 individui**.

La crescita costante anno per anno della popolazione è stata di:

$$r_a * P_0 = 0,00266 * 58,510 = 0,1556$$

Anni	Quantità costante
2008	0,155
2009	0,155
2010	0,155
2011	0,155
2012	0,155
2013	0,155
2014	0,155
2015	0,155
2016	0,155
2017	0,155
	1,556

Variazione assoluta
 $P_{(t)} - P_0$

Tasso di incremento geometrico

Presuppone un modello di crescita della popolazione in funzione del tempo.

La popolazione di riferimento è quella risultante all'inizio di ogni periodo annuale costituente l'intervallo.

Assume la denominazione di tasso medio annuo di variazione geometrico, perché rappresenta la media geometrica dei tassi annuali all'interno dell'intervallo 0-t.

$$r_g = \sqrt[n]{\frac{P_t}{P_0}} - 1$$

$$P_t = P_0 * (1+r_g)^n$$

Dal 01/01/2007 al 01/01/2017 la popolazione italiana residente è passata da:

58,510 milioni (P_0)



60,066 milioni (P_{t+n})

Calcolo dell'incremento geometrico

$$r_g = \sqrt[10]{\frac{60,066}{58,510}} - 1 = \left(\frac{60,066}{58,510}\right)^{1/10} - 1 = 0,00263$$
$$P_t = 58,510 * (1 + 0,00263)^{10} = 60,066$$



La popolazione si è accresciuta di **2,63** unità ogni 1.000 abitanti presenti all'inizio dei vari anni dell'intervallo temporale.

Presuppone che l'incremento sia composto annualmente: le unità aggiunte nel primo anno alla popolazione iniziale concorrono all'incremento del secondo anno e così via, fino a termine del periodo.

Ciò significa che solo dopo un anno la popolazione aggiunta a quella iniziale entra in gioco a determinare l'aumento dell'anno successivo.

Tasso di incremento continuo (esponenziale)

Si ipotizza che ogni unità aggiuntiva della popolazione contribuisca a sua volta all'incremento successivo della stessa nell'intervallo infinitesimo successivo (ad es. regime finanziario di capitalizzazione continua).

$$r_c = \frac{1}{n} \log_e \left[\frac{P_t}{P_0} \right]$$

e = base dei logaritmi naturali
ed è pari a 2,718282

$$P_t = P_0 * e^{r_c t}$$

Dal 01/01/2007 al 01/01/2017 la popolazione italiana residente è passata da:

58,510 milioni (P_0)



60,066 milioni (P_{t+n})

Calcolo dell'incremento continuo

$$r_c = \frac{1}{10} \log_e \left[\frac{60,066}{58,510} \right] = 0,00262$$

$$P_t = 58,510 * 2,71^{0,00262 * 10} = 60,066$$



La popolazione si è accresciuta a un tasso medio annuo continuo di **2,62** unità ogni 1.000 abitanti.

Nel modello esponenziale il tempo è considerato una variabile continua, tiene quindi conto di intervalli infinitesimi.

Il tasso continuo è il più utilizzato poiché rispecchia un modello di accrescimento della popolazione più aderente alla realtà, che segue uno sviluppo esponenziale.

Esercizio: calcolo dei tassi medi di incremento

Dal 1980 al 1990 la popolazione del Kenya è cresciuta a un ritmo elevato passando da:

16,632 milioni (P_0)



25,130 milioni (P_{t+n})

Esercizio: calcolo dei tassi medi di incremento

Dal 1980 al 1990 la popolazione del Kenya è cresciuta a un ritmo elevato passando da:

16,632 milioni (P_0)



25,130 milioni (P_{t+n})

$$r_a = 0,05109 \quad r_g = 0,04214 \quad r_c = 0,04127$$

*Le differenze dei tassi di incremento non sono così elevate se la popolazione ha un ritmo di crescita piuttosto lento. Se, invece, si tratta di una popolazione sottoposta a una forte crescita le differenze tra i modi di calcolare la crescita sono più evidenti.

Formule

$$r_a = \frac{P_t - P_0}{P_0 * n}$$

$$r_g = \left(\frac{P_t}{P_0} \right)^{1/n} - 1$$

$$r_c = \frac{1}{n} \log_e \left[\frac{P_t}{P_0} \right]$$

Tempo di raddoppio

Un parametro molto importante che descrive la velocità di una crescita esponenziale è il **tempo di raddoppio**.

Sono i giorni/anni necessari affinché una popolazione raddoppi la propria numerosità. Più è piccolo il valore del tempo di raddoppio e più velocemente cresce la curva esponenziale.

Supponiamo di avere una crescita esponenziale con base 2: al giorno 1 avrò due casi, al giorno due avrò 4 casi, al giorno 3 avrò 8 casi e così via.

Si parte dal calcolo del tasso medio annuo di variazione della popolazione secondo la legge continua:

$$r_c = \frac{1}{n} \log_e \left[\frac{P_{(t+n)}}{P_0} \right]$$

$$n = \frac{\log_e \frac{P_{(t+n)}}{P_0}}{r_c}$$

$$\frac{P_{(t+n)}}{P_0} = 2$$



$$n = \frac{\log_e 2}{r_c}$$

Calcolo del tempo di raddoppio/dimezzamento

Valore a	$\log_e a$	$\log_e \frac{1}{a}$	$\text{Log}_{10} a$	$\text{Log}_{10} \frac{1}{a}$
1	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
2	0,693147	-0,693147	0,301030	-0,301030
3	1,098612	-1,098612	0,477121	-0,477121
4	1,386294	-1,386294	0,602060	-0,602060
5	1,609438	-1,609438	0,698970	-0,698970
10	2,302585	-2,302585	1,000000	-1,000000

La regola del 70

$$n = \frac{70}{r_{c\%}}$$

Tempo di dimezzamento

$$\frac{P_{(t+n)}}{P_0} = \frac{1}{2} \rightarrow n = \frac{-70}{r_{c\%}}$$

Questo indice può essere calcolato per diversi parametri, come ad esempio il numero dei nuovi positivi a Sars-Cov-2, l'occupazione dei PL ospedalieri o il numero di decessi.

Esercizio: tempo di raddoppio/dimezzamento

Utilizzate la “regola del 70” per rispondere alla seguente domanda.

La popolazione della Liguria era pari a 1.807.893€ nel 1981 e a 1.735.753€ nel 1989.

Calcolare il tasso di incremento e il tempo di dimezzamento.

$$= 1/8 \log_e(1.735.753/1.807.893) = -0,00509$$

$$=-70/(-0,00509*100)= 137,5$$



T= 137,5
Nel 2126 (867.876)

Relazione tra tasso d'incremento e tempo di raddoppio

