I POLINOMI

Premessa.

In questa sezione verranno richiamati alcuni concetti fondamentali dell'algebra, quella parte della matematica che si occupa dello studio del cosiddetto calcolo letterale, utili ai fini della completa comprensione del Corso.
Ci si soffermerà, in particolare, sui seguenti argomenti:

1) definizione di monomi e polinomi
2) prodotti notevoli
3) divisione dei polinomi
4) principali regole di scomposizione dei polinomi in fattori

Richiamiamo in primo luogo alcune definizioni fondamentali.
Si chiama ***monomio*** un'espressione costituita da una parte numerica (generalmente situata al primo posto), da una o più parti letterali ciascuna elevata ad un esponente naturale, legata dal solo segno di moltiplicazione. Il fattore numerico del monomio si chiama ***coefficiente del monomio*** e, di solito, si scrive come primo termine. L'insieme dei fattori letterali si chiama ***parte letterale***. In genere le lettere che compaiono in un monomio vengono scritte in ordine alfabetico.
Ad esempio, sono monomi le seguenti espressioni:

$3a$; $-4b^2$; $-0{,}75y^3z^2t$; $\frac{3}{2}xa^7b^5$; a^2x^3y

in cui i coefficienti sono rispettivamente $+3$; -4; $-0{,}75$; $\frac{3}{2}$; $+1$.

Si definisce ***grado del monomio*** la somma degli esponenti delle parti letterali che lo compongono.
Esempi.
$4a^5c^2d^{10}$ ha grado $5 + 2 + 10 = 17$
$-3e^6g$ ha grado $6 + 1 = 7$
a^3b^3c ha grado $3 + 3 + 1 = 7$

Si chiama ***polinomio*** una somma algebrica di monomi. I monomi, che nel polinomio costituiscono gli addendo, sono detti ***termini del polinomio***. Il monomio che nel polinomio ha grado zero è detto ***termine noto*** del polinomio.
Ad esempio, le espressioni:
$x^3y + x^2 + 5$
$-4a^3 + 2b + c^4 - 6$
sono polinomi in cui i termini noti sono rispettivamente $+5$ e -6.
In particolare un polinomio si chiama ***binomio*** se è formato da due soli termini, ***trinomio*** se è costituito da soli tre termini, ***quadrinomio*** se ha solo quattro termini e così via.
Sono binomi:
$a^2 - b^3$; $2x - 4$; $3c^4 + 5ab$
Sono trinomi:
$a^2 + b^2 - 2ab$; $a^3b^4 + c^2b^5 - a^2c^6$
In virtù di quanto sopra detto, si può sempre considerare un monomio come un particolare polinomio, precisamente un polinomio costituito da un solo termine.
Si chiama ***grado del polinomio rispetto ad una lettera*** il massimo grado con cui la lettera compare nel polinomio. Si chiama ***grado del polinomio*** il massimo dei gradi dei termini del polinomio.
Esempi.
$a^4b^5 + a^3b + b^7 + 2$ ha grado 4 rispetto alla lettera a, grado 7 rispetto alla lettera b e grado 9 in generale (infatti $4 + 5 = 9$ è il grado del monomio a^4b^5; gli altri termini del polinomio hanno grado 4, 7 e 0 che sono tutti più piccoli di 9)
$x^2y^3z + 3xy^3 + 5$ ha grado 2 rispetto alla lettera x, grado 3 rispetto alla lettera y, grado 1 rispetto alla lettera z e grado 6 in generale (infatti $2 + 3 + 1 = 6$ è il grado del monomio x^2y^3z; gli altri termini del polinomio hanno grado 4 e 0 che sono tutti più piccoli di 6)
Un polinomio, ordinato secondo le potenze decrescenti di una lettera, si dice ***completo*** se contiene tutte le potenze di quella lettera dal grado maggiore presente al grado zero.
Un polinomio si dice ***omogeneo*** quando tutti i suoi termini sono monomi aventi il medesimo grado.

Richiamiamo ora le principali regole relative ad alcuni particolari prodotti di polinomi, detti per l'appunto ***prodotti notevoli***.

Il prodotto della somma di due termini per la loro differenza è uguale al quadrato del primo termine meno il quadrato del secondo termine:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

Esempi.

$(x+2)(x-2)=x^2-4$

$\left(\frac{2}{3}a+b\right)\left(\frac{2}{3}a-b\right)=\frac{4}{9}a^2-b^2$

Il quadrato della somma (differenza) di due monomi è uguale al quadrato del primo monomio più il quadrato del secondo monomio più (meno) il doppio prodotto del primo per il secondo:

$$(a\pm b)^2=a^2+b^2\pm 2ab$$

Esempi.

$(3x+2y)^2=9x^2+4y^2+12xy$

$(x^3-4y)^2=x^6+16y^2-8x^3y$

$(2x+3y)^2-(2x-3y)(2x+3y)=4x^2+9y^2+12xy-(4x^2-9y^2)=4x^2+9y^2+12xy-4x^2+9y^2=18y^2+12xy$

Il cubo di un binomio è la somma algebrica del cubo del primo termine più il cubo del secondo termine più il triplo prodotto del quadrato del primo termine per il secondo più il triplo prodotto del primo termine per il quadrato del secondo:

$$(a\pm b)^3=a^3\pm b^3\pm 3a^2b+3ab^2$$

Esempi.

$(x+2)^3=x^3+8+6x^2+12x$

$(x-2)^3=x^3-8-6x^2+12x$

$(-x-2)^3=-x^3-8-6x^2-12x$

Il quadrato di un polinomio si ottiene sommando i quadrati dei singoli termini del polinomio ed i doppi prodotti di ciascun termine per ognuno di quelli che lo seguono, presi uno per volta:

$$(a+b+c+d)^2=(a+b+c+d)(a+b+c+d)=$$
$$=a^2+ab+ac+ad+ab+b^2+bc+bd+ac+bc+c^2+cd+ad+bd+cd+d^2=$$
$$=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$$

Esempi.

$\left(\frac{1}{2}+2x-y\right)^2=\frac{1}{4}+4x^2+y^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2x+2\cdot\frac{1}{2}\cdot(-y)+2\cdot 2x\cdot(-y)=\frac{1}{4}+4x^2+y^2+2x-y-4xy$

$(a-3b-c+2)^2=a^2+9b^2+c^2+4+2a(-3b)+2a(-c)+2a(+2)+2(-3b)(-c)+2(-3b)(+2)+2(-c)(+2)=$
$=a^2+9b^2+c^2+4-6ab-2ac+4a+6bc-12b-4c$

Poniamo ora la nostra attenzione sul concetto di divisione tra polinomi, partendo dall'enunciato del seguente:
TEOREMA. Se $P_1(x)$ e $P_2(x)$ sono due polinomi nella variabile x, con $P_2(x)$ non nullo, e se il grado di $P_1(x)$ è non minore del grado di $P_2(x)$, allora esiste uno ed un solo polinomio $Q(x)$, di grado uguale alla differenza dei gradi dei due polinomi considerati, ed uno ed un solo polinomio $R(x)$, di grado inferiore a quello di $P_2(x)$, tali che risulta:

$$P_1(x)=P_2(x)\,Q(x)+R(x)$$

Se il resto della divisione è zero, cioè se $R(x)=0$, allora vuol dire che $P_1(x)$ è divisibile per $P_2(x)$, in quanto si verificherebbe:

$$P_1(x)=P_2(x)\,Q(x)+0=P_2(x)\,Q(x)$$

Vediamo ora come si procede nella pratica per effettuare la divisione tra due polinomi.

a) Divisione di un polinomio per un monomio.

Si consideri il polinomio:

$P_1(x)=6x^2-12x+3$

ed il monomio:

$P_2(x)=3x$

Per effettuare la divisone del polinomio per il monomio è possibile utilizzare la proprietà distributiva della divisione rispetto alla somma. Si ottiene così:

$$P_1(x):P_2(x)=\frac{P_1(x)}{P_2(x)}=\frac{6x^2-12x+3}{3x}=\frac{6x^2}{3x}-\frac{12x}{3x}+\frac{3}{3x}$$

ovvero una somma algebrica di divisioni tra monomi che si possono calcolare con le classiche regole a tutti ben note. Si ha quindi:

$$P_1(x) : P_2(x) = \frac{P_1(x)}{P_2(x)} = \frac{6x^2 - 12x + 3}{3x} = \frac{6x^2}{3x} - \frac{12x}{3x} + \frac{3}{3x} = 2x - 4 + \frac{1}{x}$$

Dunque per dividere un polinomio per un monomio, non nullo, si divide ogni termine del polinomio (numeratore) per il monomio e si sommano poi algebricamente i quozienti parziali ottenuti.

b) Divisione tra due polinomi in una variabile.

Ritornando indietro con la memoria, effettuando una divisione tra numeri interi con più cifre con la regola che si impara sin dalle scuole elementari, per calcolare il quoziente ed il resto della divisione si divide la prima cifra del dividendo per il divisore e si ottiene la prima cifra del quoziente. Si sottrae alla prima cifra del dividendo il prodotto tra il divisore e la cifra del quoziente e si ottiene il primo resto parziale. A fianco di questo resto *si abbassa* la seconda cifra del dividendo e si ricomincia dividendo il numero ottenuto per il divisore e si ottiene la seconda cifra del quoziente. Si sottrae al resto il prodotto tra il divisore e la seconda cifra del quoziente ottenendo il secondo resto parziale e così via fino a quando il resto non diventi minore del divisore.

$$\begin{array}{rl}
317 : & \underline{3} \\
\underline{-3} & 105 \\
01 & \\
\underline{-0} & \\
17 & \\
\underline{-15} & \\
2 &
\end{array}$$

Per i polinomi bisogna utilizzare sostanzialmente una regola analoga, che verrà di seguito illustrata attraverso opportuni esempi.

Si considerino i seguenti polinomi:

$P_1(x) = 15x^3 - x^2 + 9x + 9$ (***dividendo***)

$P_2(x) = 5x + 3$ (***divisore***)

L'obiettivo che ci si propone è di effettuare la divisone tra i due polinomi, cioè:

$$P_1(x) : P_2(x) = \frac{P_1(x)}{P_2(x)} = \frac{15x^3 - x^2 + 9x + 9}{5x + 3}$$

a) Innanzitutto occorre assicurarsi che entrambi i polinomi siano ordinati secondo le potenze decrescenti della variabile di cui sono funzione (proprio come i numeri interi sono ordinati secondo le migliaia, le centinaia, le decine e le unità). Nel nostro caso entrambi i polinomi sono ordinati secondo le potenze decrescenti della variabile x.

b) Il polinomio dividendo va, inoltre, completato, cioè se manca una qualsiasi potenza della variabile x, la si aggiunge con coefficiente pari a zero. Se, ad esempio, il dividendo fosse $3x^4 - x^2 + 4x - 5$, in cui manca il termine x^3, allora bisognerebbe completarlo scrivendo: $3x^4 + 0x^3 - x^2 + 4x - 5$.

Nel nostro esempio il polinomio $P_1(x)$ è già completo.

c) Per poter ora svolgere la divisione bisogna scrivere i polinomi secondo la seguente disposizione:

$$\begin{array}{l|l}
15x^3 \quad - x^2 \quad + 9x + 9 & 5x + 3 \\ \hline
 & \\
 & \\
 &
\end{array}$$

d) Esattamente come si è soliti fare con i numeri, si divide il primo termine del dividendo per il primo termine del divisore e si ottiene così il primo termine del quoziente.

Nel nostro esempio si avrà: $\dfrac{+15x^3}{+5x} = +3x^2$. Si ottiene allora:

$$\begin{array}{l|l}
15x^3 \quad - x^2 \quad + 9x + 9 & 5x + 3 \\ \hline
 & 3x^2 \\
 & \\
 &
\end{array}$$

e) Si moltiplica il primo termine del quoziente per ogni termine del divisore.

Nel nostro caso si ha: $(3x^2) \times (5x + 3) = 15x^3 + 9x^2$

f) Si cambia di segno a tutti i termini del nuovo polinomio, ottenuto nel punto e) in seguito al prodotto effettuato, e si dispongono i termini di tale polinomio *in colonna* sotto i termini, di grado uguale, del polinomio $P_1(x)$.

Nel nostro caso cambiando di segno al polinomio $15x^3 + 9x^2$, si ottiene l'altro polinomio $-15x^3 - 9x^2$, che deve essere messo in colonna:

$$\begin{array}{l|l}
15x^3 \quad - x^2 \quad + 9x + 9 & 5x + 3 \\ \hline
-15x^3 \quad - 9x^2 & 3x^2 \\
 & \\
 &
\end{array}$$

g) Si effettua la somma algebrica tra $P_1(x)$ ed il polinomio ottenuto dal prodotto.
Nell'esempio si ha:

$$
\begin{array}{r|l}
15x^3 \quad - x^2 \quad + 9x + 9 & \quad 5x + 3 \\ \cline{2-2}
- 15x^3 - \ 9x^2 \qquad\qquad & 3x^2 \\ \hline
// \quad - 10x^2 + 9x + 9 &
\end{array}
$$

h) Il polinomio $- 10x^2 + 9x + 9$, che rappresenta il primo resto parziale, diventa il nuovo polinomio su cui ripetere il ragionamento precedente, a partire dal punto d). Tale procedimento va ripetuto fino a quando non si arriva ad ottenere un resto nullo oppure un resto il cui grado sia minore strettamente (non uguale!) a quello del divisore.

i) Si divide il primo termine del polinomio $- 10x^2 + 9x + 9$ per il primo termine del divisore, cioè $\frac{-10x^2}{+5x} = -2x$. Il risultato ottenuto rappresenta il secondo termine del quoziente (cfr. punto d)).
Nel nostro caso, quindi, va scritto a fianco di $3x^2$:

$$
\begin{array}{r|l}
15x^3 \quad - x^2 \quad + 9x + 9 & \quad 5x + 3 \\ \cline{2-2}
- 15x^3 - \ 9x^2 \qquad\qquad & 3x^2 - 2x \\ \hline
// \quad - 10x^2 + 9x + 9 &
\end{array}
$$

l) Si moltiplica il secondo termine del quoziente per ogni termine del divisore: $(- 2x) \times (5x + 3) = - 10x^2 - 6x$ (cfr. punto e)).
m) Si cambia di segno al polinomio ottenuto nel punto l): $+ 10x^2 + 6x$ (cfr. punto f)).
n) Si pone il polinomio del punto m), in colonna, sotto il primo resto parziale ottenuto al punto g) (cfr. punto f)):

$$
\begin{array}{r|l}
15x^3 \quad - x^2 \quad + 9x + 9 & \quad 5x + 3 \\ \cline{2-2}
- 15x^3 - \ 9x^2 \qquad\qquad & 3x^2 - 2x \\ \hline
// \quad - 10x^2 + 9x + 9 & \\
+ 10x^2 + 6x \quad\ \ &
\end{array}
$$

o) Si effettua la somma algebrica (cfr. punto g)):

$$
\begin{array}{r|l}
15x^3 \quad - x^2 \quad + 9x + 9 & \quad 5x + 3 \\ \cline{2-2}
- 15x^3 - \ 9x^2 \qquad\qquad & 3x^2 - 2x \\ \hline
// \quad - 10x^2 + 9x + 9 & \\
+ 10x^2 + 6x \quad\ \ & \\ \hline
// \quad + 15x + 9 &
\end{array}
$$

p) Il polinomio $+ 15x + 9$, che rappresenta il secondo resto parziale, diventa il nuovo polinomio su cui ripetere di nuovo il procedimento sopra illustrato (si osservi che il grado del polinomio $15x + 9$ è pari a quello del divisore e non è strettamente minore!!!).

q) $\frac{+15x}{+5x} = +3$ (cfr. punto d))

r) Si ottiene pertanto (cfr. punti e), f), g)):

$$
\begin{array}{r|l}
15x^3 \quad - x^2 \quad + 9x + 9 & \quad 5x + 3 \\ \cline{2-2}
- 15x^3 - \ 9x^2 \qquad\qquad & 3x^2 - 2x + 3 \\ \hline
// \quad - 10x^2 + 9x + 9 & \\
+ 10x^2 + 6x \quad\ \ & \\ \hline
// \quad + 15x + 9 & \\
- 15x - 9 & \\ \hline
// \ // \quad &
\end{array}
$$

La divisione è così stata ultimata in quanto il resto ultimo ottenuto è nullo.
In particolare si è ottenuto:
$Q\,(x) = 3x^2 - 2x + 3$ (***quoziente***)
$R\,(x) = 0$ (***resto***)
dove:
– il grado di $Q\,(x)$ è 2, cioè grado $(Q\,(x)) = 2 =$ grado $(P_1\,(x))$ – grado $(P_2\,(x)) = 3 - 1 = 2$;
– il grado di $R\,(x)$ è 2, cioè grado $(R\,(x)) = 0 <$ grado $(P_2\,(x)) = 1$

Dall'esempio precedente, risulta ora possibile enunciare la seguente **regola** che consente di effettuare la divisione tra due polinomi:
Per dividere un polinomio $P_1\,(x)$, di grado m, per un polinomio $P_2\,(x)$, di grado n, con $m \geq n$, si procede nel seguente modo:
1) si scrivono i due polinomi in modo ordinato, secondo le potenze decrescenti della variabile x; il polinomio $P_1\,(x)$, inoltre, deve essere completato, qualora non lo sia;
2) si divide il primo termine del dividendo $P_1\,(x)$ per il primo termine del divisore $P_2\,(x)$, ottenendo il primo termine del quoziente $Q\,(x)$;
3) si moltiplica il primo termine del quoziente per il polinomio divisore e si cambia il segno a tutti i termini del polinomio ottenuto dopo aver effettuato il prodotto;
4) si scrivono i termini del polinomio prodotto sotto i termini simili di $P_1\,(x)$ e si effettua la somma algebrica; si ottiene, così, il primo resto parziale;
5) si divide il primo termine del resto parziale per il primo termine di $P_2\,(x)$, ottenendo il secondo termine del quoziente;
6) si moltiplica questo secondo termine di $Q\,(x)$ per il polinomio $P_2\,(x)$ e si cambia di segno a tutti i termini del polinomio ottenuto dopo aver effettuato il prodotto;
7) si scrivono i termini del polinomio prodotto sotto i termini simili del primo resto parziale e si effettua la somma algebrica; si ottiene, così, il secondo resto parziale;
8) si continua sempre allo stesso modo fino a quando il grado del resto ottenuto non diventi strettamente minore del grado del divisore oppure fino a quando il resto non sia nullo: se si verifica questo secondo caso (resto nullo) allora vuol dire che il polinomio $P_1\,(x)$ è divisibile per il polinomio $P_2\,(x)$.

N.B.: In base al Teorema sopra enunciato, se si volesse controllare l'esattezza della divisione effettuata, bisognerebbe verificare che sia valida la seguente relazione:

$$P_1\,(x) = P_2\,(x)\,Q\,(x) + R\,(x)$$

Nell'esempio sopra riportato si ha:
$P_1\,(x) = 15x^3 - x^2 + 9x + 9$
$P_2\,(x) = 5x + 3$
$Q\,(x) = 3x^2 - 2x + 3$
$R\,(x) = 0$
cioè:

$$P_2\,(x)\,Q\,(x) + R\,(x) = (5x + 3)(\,3x^2 - 2x + 3) + 0 = 15x^3 - 10x^2 + 15x + 9x^2 - 6x + 9 = 15x^3 - x^2 + 9x + 9 = P_1\,(x)$$

Per meglio comprendere la regola della divisione, si propone di seguito un altro esempio.
Si considerino i seguenti due polinomi:
$P_1\,(x) = 6x^5 + 7x + 3 - 13x^3$ (***dividendo***)
$P_2\,(x) = 2x^2 - 3$ (***divisore***)
Bisogna eseguire la divisone tra i due polinomi, cioè:

$$P_1\,(x) : P_2\,(x) = \frac{P_1(x)}{P_2(x)} = \frac{6x^5 + 7x + 3 - 13x^3}{2x^2 - 3}$$

Innanzitutto bisogna ordinare i due polinomi:
$P_1\,(x) = 6x^5 - 13x^3 + 7x + 3$ (non era ordinato secondo le potenze decrescenti della variabile x)
$P_2\,(x) = 2x^2 - 3$ (era già ordinato secondo le potenze decrescenti della variabile x)
e completare $P_1\,(x)$:
$P_1\,(x) = 6x^5 + 0x^4 - 13x^3 + 7x + 3$ (mancava il termine in x^4)
Ora si può effettuare la divisione richiesta:

$$\begin{array}{l|l}
6x^5 + 0x^4 - 13x^3 + 7x + 3 & 2x^2 - 3 \\ \cline{2-2}
-6x^5 \qquad\;\; + 9x^3 & 3x^3 - 2x \\ \cline{1-1}
// \;\; + 0x^4 - 4x^3 + 7x + 3 & \\
\qquad\quad + 4x^3 - 6x & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad // \quad + x + 3 &
\end{array}$$

A questo punto non si può più continuare perché il grado del resto è 1 che è strettamente minore del grado del divisore che è, invece, 2. Si è ottenuto quindi:
$Q(x) = 3x^3 - 2x$
$R(x) = x + 3$
La verifica dell'esattezza della divisione è lasciata al lettore!!!

c) Divisione di un polinomio per un binomio di primo grado: regola di Ruffini.

La regola di Ruffini ci consente di effettuare più rapidamente la divisione tra polinomi nel caso in cui il divisore sia un binomio (polinomio costituito da due soli monomi) di primo grado, cioè della forma $x + a$, dove a è un qualsiasi numero reale.

OSSERVAZIONI.

a) Poiché il divisore ha sempre grado 1 ed il resto deve avere grado strettamente inferiore a quello del divisore, ne segue che il resto avrà sempre grado 0 (zero), ovvero il resto sarà sempre costituito da un numero.
b) Se il dividendo ha grado n, il quoziente avrà grado $n - 1$, in quanto, dovendo dividere il primo termine del dividendo, di grado n, per il primo termine del divisore, cioè per x, di grado 1, si otterrà sempre un termine di grado $n - 1$: il quoziente, quindi, avrà un grado in meno rispetto a quello del dividendo.

Come di consueto, prima di enunciare la regola di Ruffini, la si illustrerà servendosi di un esempio.
Si considerino i seguenti due polinomi:
$P_1(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 3$ (***polinomio dividendo***)
$P_2(x) = x - 2$ (***binomio divisore***)
Bisogna eseguire la divisone tra i due polinomi, cioè:

$$P_1(x) : P_2(x) = \frac{P_1(x)}{P_2(x)} = \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 3}{x - 2}$$

Innanzitutto si osservi che:
– i due polinomi sono entrambi ordinati secondo le potenze decrescenti della variabile x;
– che il polinomio dividendo è già completato.

Si costruisca ora un prospetto in cui si scrivano:
– all'interno delle due linee verticali, i coefficienti dei monomi del dividendo;
– all'esterno delle due linee verticali, il termine noto;

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -6 & +11 & -3 \\ & & & & \\ & & & & \end{array}$$

Si traccia poi, più in basso, una linea orizzontale, al di sotto della quale e a destra della prima linea verticale, si riporta esattamente il primo coefficiente del dividendo:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -6 & +11 & -3 \\ & & & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

Si trascrive, sopra la linea orizzontale e a sinistra della prima linea verticale, il termine noto del divisore cambiato di segno:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -6 & +11 & -3 \\ +2 & & & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

Si moltiplicano ora tra di loro i due numeri, quello che si trova sotto la linea orizzontale, cioè 1, e quello che si trova sopra le stessa linea orizzontale, cioè 2, e si incolonna il prodotto ottenuto, cioè 2, sotto il secondo coefficiente del polinomio dividendo, cioè – 6:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -6 & +11 & -3 \\ +2 & & 2 & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

Si effettua ora la somma algebrica tra – 6 e 2 e si trascrive il risultato ottenuto, cioè – 4, sotto la linea orizzontale:

	1	– 6	+11	– 3
+ 2		2		
	1	– 4		

Si ripete il procedimento precedente, moltiplicando, questa volta, – 4 e 2 e trascrivendo il risultato ottenuto, cioè – 8, sotto al terzo coefficiente del dividendo, cioè 11:

	1	– 6	+11	– 3
+ 2		2	– 8	
	1	– 4		

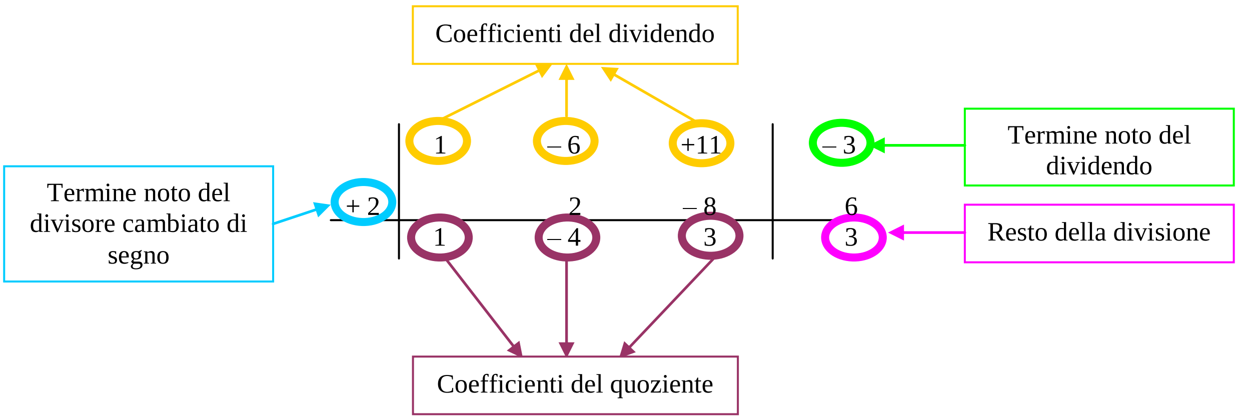
Si effettua di nuovo la somma algebrica tra 11 e – 8 e si trascrive il risultato, cioè 3, sotto alla linea orizzontale:

	1	– 6	+11	– 3
+ 2		2	– 8	
	1	– 4	3	

Si moltiplica questa volta 3 con 2 e si trascrive il risultato, cioè 6, sotto al termine noto del dividendo:

	1	– 6	+11	– 3
+ 2		2	– 8	6
	1	– 4	3	

Si esegue ancora la somma algebrica, ma questa volta tra – 3 e 6 e si scrive il risultato, cioè 3, sempre sotto la linea orizzontale ma a destra della seconda linea verticale:



Ricordando (cfr. osservazione b)) che il quoziente ha un grado in meno rispetto al dividendo, ne segue che:

$$\text{grado } (Q\,(x)) = 2 < 3 = \text{grado } (P_1\,(x))$$

Dunque risulta:

$P_1\,(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 3$ (***polinomio dividendo***)

$P_2\,(x) = x - 2$ (***binomio divisore***)

e, per poter scrivere il polinomio quoziente $Q\,(x)$, bisogna partire da x^2 con coefficiente pari ad 1 e continuare con le potenze decrescenti della x, dando ad ognuna, nell'ordine, come coefficienti, i numeri che compaiono in basso nel prospetto:

$Q\,(x) = x^2 - 4x + 3$ (***quoziente***)

$R\,(x) = 3$ (***resto***)

La verifica è lasciata per esercizio al lettore ($P_1\,(x) = P_2\,(x)\;Q\,(x) + R\,(x)$)!!!

Regola di Ruffini.

Il quoziente $Q(x)$ tra un polinomio di grado n, $P_1(x)$, ordinato secondo le potenze decrescenti della x e completato, ed un binomio $P_2(x)$, della forma $x + a$, è un polinomio di grado $n - 1$, ordinato secondo le potenze decrescenti della x. Per calcolare i coefficienti dei suoi termini si procede nel seguente modo:

- il primo coefficiente è uguale al primo coefficiente del dividendo;
- gli altri coefficienti si ottengono moltiplicando il termine precedente per $-a$ e aggiungendo al prodotto ottenuto il corrispondente coefficiente del dividendo di ugual posto;
- il prodotto dell'ultimo coefficiente di $Q(x)$ per $-a$, sommato al termine noto del dividendo, dà il resto della divisione.

N.B.: La regola di Ruffini si applica solo con binomi di primo grado in cui il coefficiente della x sia sempre uguale ad 1. Ne segue che il primo coefficiente del quoziente sarà sempre uguale al primo coefficiente del dividendo.

OSSERVAZIONE.

Se, ad esempio, il coefficiente della x del binomio $P_2(x)$, risulta diverso da 1, cioè se $P_2(x) = bx + a$ con $b \neq 1$, è possibile dividere o moltiplicare entrambi i polinomi, $P_1(x)$ e $P_2(x)$ per una stessa quantità senza alterare il quoziente; il resto, invece, viene moltiplicato o diviso, rispettivamente, per quella stessa quantità.

Ad esempio, si considerino i seguenti due polinomi:

$P_1(x) = 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 4$ (***polinomio dividendo***)

$P_2(x) = 2x - 3$ (***binomio divisore***)

Per poter applicare la regola di Ruffini il coefficiente della x del divisore deve essere 1. Poiché nel nostro caso è $2 \neq 1$, bisogna dividere sia il dividendo che il divisore per 2:

$$\frac{P_1(x)}{2} = \frac{2x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 4}{2} = x^4 - \frac{3}{2}x^3 + x^2 + \frac{1}{2}x - 2$$

$$\frac{P_2(x)}{2} = x - \frac{3}{2}$$

Risulta ora possibile applicare la Regola di Ruffini, come nell'esempio precedente:

	1	$-\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	-2
$\frac{3}{2}$		$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	3
	1	0	1	2	1

Dunque risulta:

$P_1(x) = 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 4$ (***polinomio dividendo***)

$P_2(x) = 2x - 3$ (***binomio divisore***)

$Q(x) = x^3 + 0x^2 + x + 2 = x^3 + x + 2$ (***quoziente***)

$R(x) = 1$ (***resto della divisione originaria***)

$R(x) = 2 \times 1 = 2$ (***resto della divisione finale dopo aver diviso entrambi i polinomi per b = 2***)

Ne segue che, per dividere un polinomio per il binomio della forma $P_2(x) = bx + a$ (con $b \neq 1$) bisogna dividere sia il dividendo che il divisore per b, ottenendo, così, come divisore, il binomio $x + \frac{a}{b}$, in cui il coefficiente della x è proprio 1. Per eseguire ora la divisione tra i nuovi polinomi ottenuti in seguito alla divisione per b, risulta possibile applicare la Regola di Ruffini determinando, come di consueto, il polinomio quoziente della divisione e moltiplicando il resto ottenuto per b.

La verifica è lasciata per esercizio al lettore ($P_1(x) = P_2(x)\,Q(x) + bR(x)$)!!!

ESERCIZI PROPOSTI.

a) Divisione di un polinomio per un monomio.

$(3x^4 + 6x^3 - 24x^2 + 9x - 18) : (-3)$ $\quad$ $[-x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 3x + 6]$

$(6x^3 - 2x^2 + 4x) : (2x)$ $\quad$ $[3x^2 - x + 2]$

$\left(\frac{3}{2}x^5 - \frac{9}{2}x^4 + \frac{9}{4}x^3 + 18x^2 - \frac{3}{2}x\right) : \left(\frac{3}{2}x\right)$ $\quad$ $\left[x^4 - 3x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 12x - 1\right]$

$(16x^7 + 24x^6 - 12x^5) : (2x^2)^2$ $\quad$ $[4x^3 + 6x^2 - 3x]$

$(2x^5 - 3x^3 + 4x^2 + 6x) : (3x)$ $\quad$ $\left[\frac{2}{3}x^4 - x^2 + \frac{4}{3}x + 2\right]$

$\left(\frac{18}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^6 + 6x^4\right) : (-3x^3)$ $\quad$ $\left[-\frac{6}{5}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - 2x\right]$

b) Divisione tra due polinomi in una variabile.

$(x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 - 3x + 1) : (x^2 - x + 1)$ $\quad$ $[Q(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 1;\ R(x) = 0]$

$(x^5 + 3x^3 + 17x^2 - 4x + 1) : (x^2 + 3x)$ $\quad$ $[Q(x) = x^3 - 3x^2 + 12x - 19;\ R(x) = 53x + 1]$

$(x^6 - 4x^5 + 3x^3 - 12x - 4) : (x^3 - 2x^2 + 4)$ $\quad$ $[Q(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 9;\ R(x) = -10x^2 + 4x + 32]$

$(x^3 - 6x^2 + 11x - 9) : (x^2 - 3x + 2)$ $\quad$ $[Q(x) = x - 3;\ R(x) = -3]$

$(2x^3 + 3x^2 - 2x - 3) : (2x + 3)$ $\quad$ $[Q(x) = x^2 - 1;\ R(x) = 0]$

$(3x^4 + x^2 - 3x + 1) : (3x^2 + 1)$ $\quad$ $[Q(x) = x^2;\ R(x) = -3x + 1]$

$(x^7 + x) : (x^5 - x^3 + x)$ $\quad$ $[Q(x) = x^2 + 1;\ R(x) = 0]$

$(x^6 - 64) : (x^2 - 4)$ $\quad$ $[Q(x) = x^4 + 4x^2 + 16;\ R(x) = 0]$

$\left(x^4 - \frac{16}{3}x^3 - 9x^2 + \frac{50}{3}x + 6\right) : (x^2 - 6x - 2)$ $\quad$ $\left[Q(x) = x^2 + \frac{2}{3}x - 3;\ R(x) = 0\right]$

$(x^4 + 10x^3 + 19x^2 - 27x + 20) : (x + 5)$ $\quad$ $[Q(x) = x^3 + 5x^2 - 6x + 3;\ R(x) = 5]$

$(15x^6 - 16x^5 + 16x^4 - 11x^3 + 2x^2 + x + 6) : (3x^2 - 2x)$ $\quad$ $[Q(x) = 5x^4 - 2x^3 + 4x^2 - x;\ R(x) = x + 6]$

$\left(-\frac{2}{5}x^3 + 3\right) : \left(\frac{1}{3}x^2 + x - \frac{1}{5}\right)$ $\quad$ $\left[Q(x) = -\frac{6}{5}x + \frac{18}{5};\ R(x) = -\frac{96}{25}x + \frac{93}{25}\right]$

$\left(3x^5 - \frac{2}{15}x^4 - \frac{22}{15}x^3 + \frac{23}{3}x^2 - \frac{13}{3}x + 2\right) : (5x^2 - 3x + 2)$ $\quad$ $\left[Q(x) = \frac{3}{5}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{6}{5};\ R(x) = -\frac{1}{15}x - \frac{2}{5}\right]$

$(-1 + x^{10}) : (x^2 - 1)$ $\quad$ $\left[Q(x) = x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1;\ R(x) = 0\right]$

$(x^3 + 2x^7 - x) : (x^3 - 2)$

$(18x^6 + 8x^2 - 10x^4 - 12x^3 + 3x^5 + 4) : (-2x^2 + 3x^3)$ $\quad$ $[Q(x) = 6x^3 + 5x^2 - 4;\ R(x) = 4]$

$(12x^4 - 8x^3 + x^2 + 18x - 3) : \left(2x - \frac{1}{3}\right)$ $\quad$ $[Q(x) = 6x^3 - 3x^2 + 9;\ R(x) = 0]$

c) Divisione di un polinomio per un binomio di primo grado: regola di Ruffini.

$(x^5 - 32) : (x - 2)$ $\quad$ $[Q(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16;\ R(x) = 0]$

$(3x^4 + 2x^2 - x + 1) : (x + 1)$ $\quad$ $[Q(x) = 3x^3 - 3x^2 + 5x - 6;\ R(x) = 7]$

$(-3x - 3x^2 + 4 + x^3) : (x - 4)$ $\quad$ $[Q(x) = x^2 + x + 1;\ R(x) = 8]$

$(x^3 + x^4 - 6x^2 - 5x - 15) : (x + 3)$ $\quad$ $[Q(x) = x^3 - 2x^2 - 5;\ R(x) = 0]$

$\left(\frac{4}{5}x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{2}{3}x\right) : \left(x + \frac{3}{2}\right)$ $\quad$ $\left[Q(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{20}x - \frac{89}{120};\ R(x) = \frac{89}{80}\right]$

$\left(\frac{2}{3}x^2 + x^3 - \frac{2}{3}x^5 - 1\right) : (x + 1)$ $\quad$ $\left[Q(x) = -\frac{2}{3}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{3};\ R(x) = -\frac{2}{3}\right]$

$(3x^4 + 3 - 2x^2 - x) : \left(x + \frac{1}{3}\right)$ $\quad$ $\left[Q(x) = 3x^3 - x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{4}{9};\ R(x) = \frac{85}{27}\right]$

$(x^5 - 2x^3 + x) : (x - 2)$ $\quad$ $[Q(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 4x + 9;\ R(x) = 18]$

$\left(x^3 - \frac{8}{3}x + 1 - \frac{4}{3}x^2\right) : \left(x - \frac{1}{3}\right)$ $\quad$ $[Q(x) = x^2 - x - 3;\ R(x) = 0]$

$\left(2x^5 - \frac{3}{2}x + 4x^2 - 4\right) : \left(x + \frac{1}{2}\right)$ $\quad$ $\left[Q(x) = 2x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{15}{4}x - \frac{27}{8};\ R(x) = -\frac{37}{16}\right]$

$(7x^4 - 2x^2 + x + 1) : (x - 1)$ $\quad$ $[Q(x) = 7x^3 + 7x^2 + 5x + 6;\ R(x) = 7]$

$(x^6 - 2x^4 - x^2 - 2) : (x + 1)$ $\quad$ $[Q(x) = x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 2x + 2;\ R(x) = -4]$

$(7 + 3x + x^4 - x^2 + x^3) : (x + 1)$	$[Q\,(x) = x^3 - x + 4;\ R\,(x) = 3]$
$\left(\frac{5}{3}x^3 + x - \frac{6}{5}\right) : (x+1)$	$\left[Q(x) = \frac{5}{3}x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{8}{3};\ R(x) = -\frac{58}{15}\right]$
$(x^3 - 4x^2 - 6 + 8x) : (x - 2)$	$[Q\,(x) = x^2 - 2x + 4;\ R\,(x) = 2]$
$(x^2 - 4x + 2) : (2x - 1)$	$\left[Q(x) = \frac{1}{2}x - \frac{7}{4};\ R(x) = \frac{1}{4}\right]$
$(8x^3 - 1) : (2x - 1)$	$[Q\,(x) = 4x^2 + 2x + 1;\ R\,(x) = 0]$
$(4x^4 + 10x^2 - 2) : (2x + 1)$	
$(6x^2 + 7x + 2) : (3x + 2)$	$[Q\,(x) = 2x + 1;\ R\,(x) = 0]$
$(6x^3 - 11x^2 + 12x - 6) : (3x - 1)$	$[Q\,(x) = 2x^2 - 3x + 3;\ R\,(x) = -3]$
$(2x^3 - 2x^2 - 2x - 1) : (2x - 4)$	$[Q\,(x) = x^2 + x + 1;\ R\,(x) = 3]$
$(4x^3 - 2x^2 - 2) : (-4x + 12)$	$\left[Q(x) = -x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{15}{2};\ R(x) = 88\right]$
$\left(x^3 - 2x^2 + x\right) : \left(\frac{1}{2}x - 1\right)$	$[Q\,(x) = 2x^2 + 2;\ R\,(x) = 2]$
$\left(x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x + 1\right) : \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right)$	$\left[Q(x) = 3x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2;\ R(x) = \frac{5}{3}\right]$
$\left(\frac{2}{3}x^8 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{3}\right) : (x+2)$	$\left[Q(x) = \frac{2}{3}x^7 - \frac{4}{3}x^6 + \frac{8}{3}x^5 - \frac{16}{3}x^4 + \frac{33}{3}x^3 - 22x^2 + 44x - 88;\ R(x) = \frac{529}{3}\right]$
$(-2x^3 + 4x^2 - 3x + 6) : (x - 2)$	$[Q\,(x) = -2x^2 - 3;\ R\,(x) = 0]$

Si passerà ora ad analizzare alcuni metodi utili ai fini di scomporre un polinomio. In realtà, per scomporre un polinomio non esiste una regola ben precisa, ma vi sono vari metodi basati su proprietà e regole delle operazioni tra polinomi.

a) Raccoglimento a fattor comune.

Nell'effettuare la scomposizione di un polinomio occorre chiedersi in primo luogo, prima cioè di applicare una qualunque regola, se è possibile effettuare un raccoglimento a fattore comune.
Ad esempio il polinomio

$$P\,(x) = 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 + x$$

può essere scomposto mettendo in evidenza la x:
$P\,(x) = 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 + x = x\,(2x^3 + 3x^2 - 5x + 1)$
Dunque, se tutti i termini di un polinomio hanno in comune uno o più fattori, si può effettuare il *raccoglimento a fattor comune*, detto anche *messa in evidenza*.

Può capitare, però, che i termini del polinomio abbaino a gruppi dei fattori comuni, come ad esempio, nel polinomio:

$$P\,(x, y) = xy + y + 2x + 2$$

in cui i quattro monomi tra loro non hanno fattori in comune ma il primo ed il secondo hanno in comune y ed il terzo ed il quarto, invece, hanno in comune il 2. Si può allora scrivere:
$P\,(x, y) = xy + y + 2x + 2 = y\,(x + 1) + 2\,(x + 1)$
che, a sua volta, è la somma di due termini aventi in comune il fattore $x + 1$, per cui si ha:
$P\,(x, y) = xy + y + 2x + 2 = y\,(x + 1) + 2\,(x + 1) = (x + 1)\,(y + 2)$
Dunque, i termini di un polinomio, pur non avendo fattori comuni a tutti, possono avere fattori comuni a gruppi. Si può allora effettuare un primo *raccoglimento parziale* tra tali gruppi riuscendo, spesso, ad ottenere un polinomio nel quale si può effettuare un altro raccoglimento arrivando, così, ad ottenere la scomposizione del polinomio dato.

b) Differenza di due quadrati.

Se un polinomio si presenta come la differenza di due quadrati, esso si può scomporre nel prodotto della somma delle basi per la loro differenza:

$$a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b)$$

<u>*Esempi*</u>.
$x^2 - 4 = (x + 2)\,(x - 2)$
$49 - 9x^2 = (7 + 3x)\,(7 - 3x)$
$x^4 - 16 = (x^2 + 4)\,(x^2 - 4) = (x^2 + 4)\,(x - 2)\,(x + 2)$

c) Trinomio che sia quadrato di un binomio.

Se in un trinomio due termini sono quadrati di monomi ed il terzo termine è il doppio delle rispettive basi, allora il trinomio è il quadrato di un binomio:

$$a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$$
$$a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$$

<u>*Esempi*</u>.
$x^2 + 9 + 6x = (x + 3)^2$
$4a^2 - 20ab + 25b^2 = (2a - 5b)^2 = (-\,2a + 5b)^2$
$x^3 - 2x^2 + x = x\,(x^2 - 2x + 1) = x\,(x - 1)^2$

d) Trinomio particolare di secondo grado.

Non sempre un trinomio di secondo grado è il quadrato di un binomio.
Se nel trinomio di secondo grado $x^2 + ax + b$, il coefficiente del termine di primo grado, cioè a, ed il termine noto, cioè b, sono rispettivamente la somma algebrica ed il prodotto di una stessa coppia di numeri, s e p, allora il trinomio si scompone nel prodotto di due binomi di primo grado, precisamente $(x + s)$ e $(x + p)$:

$$x^2 + ax + b = (x + s)\,(x + p)$$

<u>*Esempi*</u>.
$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)\,(x + 3)$ [infatti: $s + p = 2 + 3 = 5 = a$; $s \times p = 2 \times 3 = 6 = b$]
$x^2 - 2x - 15 = (x - 5)\,(x + 3)$ [infatti il numero 15 è il prodotto di 3 e 5; poiché, però, 15 ha segno negativo vuol dire che uno dei due fattori deve essere negativo, cioè: $-\,15 = (-\,5)\,(+\,3)$ oppure $-\,15 = (+\,5)\,(-\,3)$; se si analizza ora il coefficiente del termine di primo grado, cioè $-\,2$, si può banalmente verificare come esso sia il risultato della somma algebrica solo dei numeri $-\,5$ e $+\,3$, che sono appunto i numeri cercati]
$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)\,(x - 3)$
$x^2 + 4x - 5 = (x - 1)\,(x + 5)$

Si osservi che, qualora il coefficiente del termine di secondo grado sia diverso da 1, bisognerà trovare due numeri s e p la cui somma sia sempre uguale al coefficiente del termine di primo grado, cioè a, ed il cui prodotto sia uguale al prodotto del termine noto, cioè b, per il coefficiente del termine di secondo grado.

Esempi.

$10x^2 + 9x + 2 = (2x + 1)\ (5x + 2)$

Infatti si ha:

$$s + p = 9 = a$$
$$s \times p = 2 \times 10 = 20$$

Ne segue che i due numeri, la cui somma è 9 ed il cui prodotto è 20, sono proprio $s = 4$ e $p = 5$; per poter effettuare la scomposizione bisognerà necessariamente sostituire al coefficiente della x la somma dei due numeri trovati ed effettuare successivi raccoglimenti, perché non esiste una regola risolutiva come nel caso in cui il coefficiente della x^2 sia uguale ad 1. Si può quindi scrivere:

$10x^2 + 9x + 2 = 10x^2 + (4 + 5)\ x + 2 = \underline{10x^2} + \underline{\underline{4x}} + \underline{5x} + \underline{\underline{2}} = 5x\ (2x + 1) + 2\ (2x + 1) = (2x + 1)\ (5x + 2)$

Dunque, se nel trinomio di secondo grado il coefficiente del termine al quadrato è diverso da 1, si cercherà di trovare due numeri la cui somma sia uguale al coefficiente del termine di primo grado ed il cui prodotto, invece, sia uguale al prodotto del coefficiente del termine di secondo grado per il termine noto. Si sostituisce poi al coefficiente del termine di primo grado la somma dei due numeri trovati e si procede con una scomposizione con raccoglimenti a fattori parziali.

e) Somma e differenza di potenze simili.

$$x^3 + y^3 = (x + y)\ (x^2 - xy + y^2)$$
$$x^n + y^n = (x + y)\ (x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \ldots + x^2y^{n-3} - xy^{n-2} + y^{n-1})$$
$$x^3 - y^3 = (x - y)\ (x^2 + xy + y^2)$$
$$x^n - y^n = (x - y)\ (x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots + x^2y^{n-3} + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

Esempi.

$x^3 + 1 = (x + 1)\ (x^2 - x + 1)$

$x^3 + 27 = x^3 + 3^3 = (x + 3)\ (x^2 - 3x + 3^2) = (x + 3)\ (x^2 - 3x + 9)$

$x^3 - 1 = (x - 1)\ (x^2 + x + 1)$

$x^6 - 64y^6 = x^6 - 2^6y^6 = x^6 - (2y)^6 = (x - 2y)\ [x^5 + x^4 2y + x^3(2y)^2 + x^2(2y)^3 + x(2y)^4 + (2y)^5] =$

$= (x - 2y)\ (x^5 + 2x^4y + 4x^3y^2 + 8x^2y^3 + 16xy^4 + 32y^5) = (x - 2y)\ [x^4(x + 2y) + 4x^2y^2(x + 2y) + 16y^4(x + 2y)] =$

$= (x - 2y)\ (x + 2y)\ (x^4 + 4x^2y^2 + 16y^4)$

Si osservi che l'esercizio precedente poteva essere risolto anche per altra via, cioè scrivendo:

$x^6 - 64y^6 = (x^3)^2 - (8y^3)^2 \underset{\substack{\downarrow \\ \textit{differenza di} \\ \textit{due quadrati}}}{=} (x^3 - 8y^3)\ (x^3 + 8y^3) \underset{\substack{\downarrow \\ \textit{differenza e} \\ \textit{somma di cubi}}}{=} (x - 2y)\ (x^2 + 2xy + 4y^2)\ (x + 2y)\ (x^2 - 2xy + 4y^2) =$

$= (x - 2y)\ (x + 2y)\ (x^4 + 4x^2y^2 + 16y^4)$

f) Polinomio sviluppo del cubo di un binomio.

Se in un quadrinomio due termini sono cubi di monomi e gli altri due termini sono i tripli prodotti del quadrato di una delle due basi per l'atra, il quadrinomio è il cubo di un binomio:

$a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 = (a + b)^3$

Esempi.

$a^3 + 27b^3 + 9a^2b + 27ab^2 = (a + 3b)^3$

$x^5 + 3x^4y + 3x^3y^2 + x^2y^3 = x^2\ (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) = x^2\ (x + y)^3$

g) Scomposizione con la Regola di Ruffini.

Quando ci si accorge che non è possibile applicare uno dei metodi sopra richiamati, bisogna ricorrere, qualora sia possibile, alla scomposizione tramite la Regola di Ruffini.

Si definiscono ***zeri*** o ***radici*** di un polinomio i valori numerici che annullano il polinomio stesso.

Si consideri il polinomio:

$P_1\,(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 8$

in cui il coefficiente del termine di grado massimo sia uguale ad 1.

Si procederà per tentativi nell'intento di determinare quel numero, da ricercare tra i divisori del termine noto di $P_1\,(x)$, che sia proprio uno zero per il polinomio in esame.

Si osservi, in primo luogo, che i divisori del termine noto, cioè di 8, sono ± 1, ± 2, ± 4, ± 8.

Si consideri, ad esempio, $x = +\,1$. Si avrà allora:

$P\,(1) = 1^3 + 3 \times 1^2 - 6 \times 1 - 8 = 1 + 3 - 6 - 8 = -\,14 + 4 = -\,10 \neq 0$

Ne segue che $x = 1$ non è uno zero, ovvero una radice, per il polinomio $P_1\,(x)$.

Si procede allora con il successivo divisore del termine noto, cioè si prova con $x = -\,1$. Si avrà:

$P(-1) = (-1)^3 + 3 \times (-1)^2 - 6 \times (-1) - 8 = -1 + 3 + 6 - 8 = -9 + 9 = 0$
Ne segue che $x = -1$ è soluzione dell'equazione $P_1(x) = 0$, ovvero $x = -1$ è radice del polinomio $P_1(x)$.
È ora possibile effettuare la divisione tra il polinomio $P_1(x)$ ed il binomio $x - (-1) = x + 1$, dove -1 è proprio lo zero del polinomio dato, utilizzando la Regola di Ruffini:

Zero del polinomio →

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 3 & -6 & -8 \\ -1 & & -1 & -2 & +8 \\ \hline & 1 & 2 & -8 & 0 \end{array}$$

← Resto della divisione

Dunque il polinomio dato si può scomporre come segue:

$$x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = (x^2 + 2x - 8)(x + 1)$$

ovvero nel prodotto di un polinomio di secondo grado, $x^2 + 2x - 8$, per un polinomio di primo grado $x + 1$.

ESERCIZI PROPOSTI.

a) Raccoglimento a fattor comune.

$2x^2y + 10x$	$[2x(xy) + 5]$
$4x^4 + 2x^3 - 2x^2$	$[2x^2(2x^2 + x - 1)]$
$-4x^5y^3 - 16x^6y^5 - 8x^3y^4$	$[-4x^3y^3(x^2 + 4x^3y^2 + 2y)]$
$\frac{3}{2}x^7y^6 - \frac{9}{4}x^3y^2 - \frac{27}{2}x^4y^7 - \frac{3}{8}x^5y^5$	$\left[\frac{3}{2}x^3y^2\left(x^4y^4 - \frac{3}{2} - 9xy^5 - \frac{1}{4}x^2y^3\right)\right]$
$(x - y)a + (x - y)b$	$[(x - y)(a + b)]$
$(x + y)^3 + (x + y)^2$	$[(x + y)^2(x + y + 1)]$
$(a + b)(x - 3) + (a + b)(2x + 1) + (a + b)(4x - 3)$	$[(a + b)(7x - 5)]$
$(ax - ay) + (3x - 3y) - (2x - 2y)$	$[(x - y)(a + 1)]$
$x^4 + x^3 + 5x + 5$	$[(x + 1)(x^3 + 5)]$
$2x + 2y + ax + ay + bx + by$	$[(x + y)(a + b + 2)]$
$\frac{3}{2}x^2 - 4x + 4 - \frac{3}{2}x$	$\left[\left(\frac{3}{2}x - 4\right)(x - 1)\right]$
$x^2 + 4xy - 24y - 6x$	$[(x + 4y)(x - 6)]$
$x^3 - x^2 + 3x^2(x - 1) + 2x(x - 1)^2$	$[2x(3x - 1)(x - 1)]$
$2(x + y)^3 - 4x(x + y)^2 + 4x^3 + 4x^2y$	$[2(x + y)(x^2 + y^2)]$
$x^5 + 4x^4y - 4x^3yz - x^4z$	$[(x^4 - x^3z)(x + 4y)]$

b) Differenza di due quadrati.

$x^2 - 1$	$[(x + 1)(x - 1)]$
$25x^2 - 4$	$[(5x + 2)(5x - 2)]$
$16 - x^4$	$[(4 + x^2)(4 - x^2)]$
$16x^2 - 81y^2$	$[(4x + 9y)(4x - 9y)]$
$x^4 - 64$	$[(x^2 + 8)(x^2 - 8)]$
$625a^4 - 81$	$[(25a^2 + 9)(25a^2 - 9)]$
$2x^2 - \frac{9}{2}y^2$	$\left[2\left(x + \frac{3}{2}y\right)\left(x - \frac{3}{2}y\right)\right]$
$\frac{25}{3}a^2 - 3b^2$	$\left[3\left(\frac{5}{3}a + b\right)\left(\frac{5}{3}a - b\right)\right]$
$(3x + 2y)^2 - (x + 3y)^2$	$[(4x + 5y)(2x - y)]$
$49x^2 - (2 - 5x)^2$	$[(2x + 2)(12x - 2]$
$(3x - 4)^2 - 9$	$[(3x + 5)(3x - 13)]$
$x^7 - x^5 + x^3 - x$	$[x(x - 1)(x + 1)(x^4 + 1)]$
$4x^2 - 25y^2 - 6yx + 15y^2$	$[2(2x - 5y)(x + y)]$
$(2x + 1)^2 - \frac{9}{4}x^2$	$\left[\left(\frac{1}{2}x + 1\right)\left(\frac{7}{2}x + 1\right)\right]$

c) Trinomio che sia quadrato di un binomio.

$x^2 - 4x + 4$	$[(x-2)^2]$
$x^2 + 9 - 6x$	$[(x-3)^2]$
$9x^2 - 6xy + y^2$	$[(3x + y)^2]$
$a^6 + 2a^4 + a^2$	$[(a^3 + a)^2]$
$\frac{3}{4}x^2 + 9xy + 27y^2$	$\left[3\left(\frac{1}{2}x + 3y\right)^2\right]$
$4a^4 + 32a^3 + 64a^2$	$[(2a^2 + 8a)^2]$
$9x^2 - y^2 + 2y - 1$	$[9x^2 - (y-1)^2 = \ldots = (3x + y - 1)(3x - y + 1)]$
$1 - 4y^2 + 9x^2 - 6x$	$[(3x + 4y - 1)(3x - 4y - 1)]$
$y^2 - 9x^2 + 4 - 4y$	$[(9x^2 + y - 2)(y - 9x^2 - 2)]$
$x^2 - 2xy + y^2 + x - y$	$[(x - y)(x - y + 1)]$
$x^4 - x^2 - 4y^2 - 4xy$	$[(x^2 + x + 2y)(x^2 - x - 2y)]$
$x^4 - y^4 + x^2 + y^2 + 2xy$	$[(x + y)((x - y)(x^2 + y^2) + 1)]$
$x^2 - 2xy + y^2 + x^3 - xy^2$	$[(x - y)(x - y + x^2 + xy)]$
$a^2 + 2ab + b^2 - c^2$	$[(a + b + c)(a + b - c)]$
$x^3 - 4x^2y + 4xy^2 - x$	$[x((x - 2y)^2 - 1)]$

d) Trinomio particolare di secondo grado.

$x^2 + 4x + 3$	$[(x + 1)(x + 3)]$
$x^2 - 4x + 3$	$[(x - 1)(x - 3)]$
$x^2 + 6x - 7$	$[(x - 1)(x + 7)]$
$x^2 + 2x - 15$	$[(x + 5)(x - 3)]$
$x^2 - 9x + 14$	$[(x - 2)(x - 7)]$
$a^2 + 17a + 72$	$[(a + 8)(a + 9)]$
$5y^2 - 3y - 2$	$[(5y + 2)(y - 1)]$
$x^4 - 7x^2 + 6$	$[(x - 1)(x + 1)(x^2 - 6)$
$a^2 + 3ab + 2b^2$	$[(a + 2b)(a + b)]$
$x^2 + 2x - 3$	$[(x - 1)(x + 3)]$
$x^2 - 2x - 3$	$[(x + 1)(x - 3)]$
$x^2 + 12x + 36$	$[(x - 1)^2]$
$x^2 - 5x + 36$	$[(x - 9)(x + 4)]$
$8x^2 + 2x - 3$	$[(2x - 1)(4x + 3)]$
$6x^2 + 11x + 3$	$[(3x + 1)(2x + 3)]$
$6x^2 + 5xy - y^2$	$[(6x - y)(x + y)]$

e) Somma e differenza di potenze simili.

$a^3 - 27$	$[(a - 3)(a^2 + 3a + 9)]$
$a^3 + 27$	$[(a + 3)(a^2 - 3a + 9)]$
$8x^3 + 27$	$[(2x + 3)(4x^2 - 6x + 9)]$
$8x^3 - 27$	$[(2x - 3)(4x^2 + 6x + 9)]$
$32a^5 - b^5$	$[(2a - b)(16a^4 + 8a^3b + 4a^2b^2 + 2ab^3 + b^4)]$
$32a^5 + b^5$	$[(2a + b)(16a^4 - 8a^3b + 4a^2b^2 - 2ab^3 + b^4)]$
$x^8 - y^8$	$[(x - y)(x^7 + x^6y + x^5y^2 + x^4y^3 + x^3y^4 + x^2y^5 + xy^6 + y^7)]$
$x^7 - y^7$	$[(x - y)(x^6 + x^5y + x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 + xy^5 + y^6)]$
$a^6 - 1$	$[(a - 1)(a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)]$
$a^6 + 1$	$[(a + 1)(a^5 - a^4 + a^3 - a^2 + a - 1)]$
$x^3y^3 - \frac{8}{27}$	$\left[\left(xy - \frac{2}{3}\right)\left(x^2y^2 + \frac{2}{3}xy + \frac{4}{9}\right)\right]$
$x^7y^7 - 128$	$[(xy-2)(x^6y^6 + 2x^5y^5 + 4x^4y^4 + 8x^3y^3 + 16x^2y^2 + 32xy + 64)]$

f) Polinomio sviluppo del cubo di un binomio.

$a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$	$[(a + b)^3]$
$27x^3 + 54x^2 + 36x + 8$	$[(3x + 2)^3]$

$x^3 - x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{27}$ $\left[\left(x - \frac{1}{3}\right)^3\right]$

$\frac{1}{27}x^3 - 8y^3 - \frac{2}{3}x^2y + 4xy^2$ $\left[\left(\frac{1}{3}x - 2y\right)^3\right]$

$x^3y^3 - 9x^2y^2 + 27xy - 27$ $[(xy - 3)^3]$

$x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ $[(x - 2)^3]$

$8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$ $[(2x + 1)^3]$

$8a^3 - 12a^2b + 6ab^2 - b^3 - 2a + b$ $[(2a - b)(2a - b - 1)(2a - b + 1)]$

$a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 - a^2 - b^2 - 2ab$ $[(a + b)^2(a + b - 1)]$

g) Scomposizione con la Regola di Ruffini.

$x^3 - 3x^2 + 7x - 5$ $[(x - 1)(x^2 - 2x + 5)]$

$5x^3 - x^2 - 5x + 1$ $[(x - 1)(x + 1)(5x - 1)]$

$x^4 + 6x^3 - 12x^2 - 70x + 75$ $[(x + 5)^2(x - 3)(x - 1)]$

$x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$ $[x(x - 2)(x - 1)(x + 1)]$

$2x^4 + 5x^3 - 3x^2$ $[x^2(x + 3)(2x - 1)]$

$2y^3 + 2y^2 - 3y - 1$ $[(y - 1)(2y^2 + 4y + 1)]$

$y^4 - 11y^2 - 18y - 8$ $[(y + 1)^2(y + 2)(y - 4)]$

$y^4 + 4y^3 - 2y^2 - 12y + 9$ $[(y - 1)^2(y + 3)]$

$y^5 + 2y^4 - 81y - 162$ $[(y + 3)(y - 3)(y + 2)(y^2 + 9)]$

$x^6 - 14x^4 + 49x^2 - 36$ $[(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)(x - 3)(x + 3)]$

$x^7 - 3x^3 + 2x$ $[x(x - 1)^2(x + 1)^2(x^2 + 2)]$

$x^5 - 3a^2x^3 + 2a^4x$ $[x(x - a)(x + a)(x^2 - 2a^2)]$