LE FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

Daniela Tondini

dtondini@unite.it

Facoltà di Scienze Politiche

CdS in Economia

Università degli Studi di Teramo

COME CALCOLARE I MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI VINCOLATI

Esempio 2:

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 8\left(x^2 + y^2\right)$$

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\right\}$$

Si osservi, in primo luogo, che la funzione data è una funzione polinomiale, per cui è definita su tutto $\mathbb{R}^2$.

Il vincolo *M*, inoltre, è costituito dai punti interni alla circonferenza con centro l'origine e raggio 3, oltre che dai punti sulla frontiera (bordo) della circonferenza stessa; segue, quindi:

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 9$$

COME CALCOLARE I MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI VINCOLATI

Per determinare i <u>punti stazionari sulla frontiera della circonferenza</u> occorre utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, considerando la funzione:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=x^4+y^4-8\left(x^2+y^2\right)-\lambda\left(x^2+y^2-9\right)$$

COME CALCOLARE I MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI VINCOLATI

Si calcolino ora le derivate parziali prime della Lagrangiana:

$$\mathcal{L}_x(x,y,\lambda) = 4x^3 - 16x - \lambda(2x) = 4x^3 - 16x - 2\lambda x$$

$$\mathcal{L}_y(x,y,\lambda) = 4y^3 - 16y - \lambda(2y) = 4y^3 - 16y - 2\lambda y$$

$$\mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) = -x^2 - y^2 + 9$$

eguagliando a zero le precedenti equazioni si ottiene:

$$4x^3 - 16x - 2\lambda x = 0$$

$$4y^3 - 16y - 2\lambda y = 0$$

$$-x^2 - y^2 + 9 = 0$$

COME CALCOLARE I MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI VINCOLATI

Risolvendo il sistema costituito dalle tre equazioni precedenti si ottengono i punti stazionari della funzione Lagrangiana:

$$\begin{cases} 4x^3 - 16x - 2\lambda x = 0 \\ 4y^3 - 16y - 2\lambda y = 0 \\ -x^2 - y^2 + 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x\left(2x^2 - 8 - \lambda\right) = 0 \\ 2y\left(2y^2 - 8 - \lambda\right) = 0 \\ +x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

COME CALCOLARE I MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI VINCOLATI

Dalla prima equazione si ottengono le seguenti soluzioni:

$$2x\left(2x^2-8-\lambda\right)=0 \Rightarrow 2x=0, 2x^2-8-\lambda=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=0, \lambda=2x^2-8 \text{ oppure } x=\pm\sqrt{\frac{8+\lambda}{2}}$$

Dalla seconda equazione si ottengono le seguenti soluzioni:

$$2y\left(2y^2-8-\lambda\right)=0 \Rightarrow 2y=0, 2y^2-8-\lambda=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=0, \lambda=2y^2-8 \text{ oppure } y=\pm\sqrt{\frac{8+\lambda}{2}}$$

COME CALCOLARE I MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI VINCOLATI

Ricapitolando, si ha:

$$\begin{cases} x = 0, x = \pm\sqrt{\dfrac{8+\lambda}{2}} \\ y = 0, y = \pm\sqrt{\dfrac{8+\lambda}{2}} \\ +x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

COME CALCOLARE I MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI VINCOLATI

Sostituendo nella terza equazione del sistema il valore di *x* trovato nella prima equazione, si ottengono i seguenti valori della *y*:

$$x = 0 \Rightarrow y^2 - 9 = 0 \Rightarrow y = \pm 3$$

e sostituendo nella seconda equazione del sistema a pg.5 si ricava il valore di λ:

$$4y^3 - 16y - 2\lambda y = 0 \Rightarrow 2\lambda y = 4y^3 - 16y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\lambda(\pm 3) = 4(\pm 3)^3 - 16(\pm 3) \Rightarrow \lambda = \frac{\pm 108 \mp 48}{\pm 6} \Rightarrow \lambda = 10$$

Ne segue che i punti $\mathcal{Z}_1 = (0,+3,10), \mathcal{Z}_2 = (0,-3,10)$ sono punti stazionari per la Lagrangiana.

COME CALCOLARE I MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI VINCOLATI

Analogamente, dalla seconda equazione si ottengono le seguenti soluzioni:

$$2y\left(2y^2-8-\lambda\right)=0\Rightarrow 2y=0,2y^2-8-\lambda=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=0,\lambda=2y^2-8 \text{ oppure } y=\pm\sqrt{\frac{8+\lambda}{2}}$$

Dalla prima equazione si ottengono le seguenti soluzioni:

$$2x\left(2x^2-8-\lambda\right)=0\Rightarrow 2x=0,2x^2-8-\lambda=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=0,\lambda=2x^2-8 \text{ oppure } x=\pm\sqrt{\frac{8+\lambda}{2}}$$

COME CALCOLARE I MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI VINCOLATI

Analogamente, sostituendo nella terza equazione del sistema il valore di y trovato nella seconda equazione, si ottengono i seguenti valori della x:

$$y = 0 \Rightarrow x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$$

e sostituendo nella prima equazione di pg.5 si ricava il valore di λ:

$$4x^3 - 16x - 2\lambda x = 0 \Rightarrow 2\lambda x = 4x^3 - 16x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\lambda(\pm 3) = 4(\pm 3)^3 - 16(\pm 3) \Rightarrow \lambda = \frac{\pm 108 \mp 48}{\pm 6} \Rightarrow \lambda = 10$$

Ne segue che i punti $\mathcal{Z}_3 = (+3, 0, 10), \mathcal{Z}_4 = (-3, 0, 10)$ sono punti stazionari per la Lagrangiana.

COME CALCOLARE I MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI VINCOLATI

Sostituendo, invece, nella terza equazione, le altre soluzioni ottenute dalla prime due equazioni, precisamente:

$$x = \pm\sqrt{\frac{8+\lambda}{2}}, y = \pm\sqrt{\frac{8+\lambda}{2}}$$

si ottiene:

$$\left(\sqrt{\pm\frac{8+\lambda}{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{\pm\frac{8+\lambda}{2}}\right)^2 - 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{8+\lambda}{2} + \frac{8+\lambda}{2} - 9 = 0 \Rightarrow 8 + \lambda - 9 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

COME CALCOLARE I MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI VINCOLATI

Sostituendo ora il valore di λ appena ottenuto nella prima equazione, si ha:

$$4x^3 - 16x - 2\lambda x = 0 \Rightarrow 4x^3 - 16x - 2x = 0 \Rightarrow 4x^3 - 18x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x\left(2x^2 - 9\right) = 0 \Rightarrow 2x = 0, 2x^2 - 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{\frac{9}{2}}$$

COME CALCOLARE I MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI VINCOLATI

Analogamente, sostituendo il valore di λ nella seconda equazione, si ha:

$$4y^3 - 16y - 2\lambda y = 0 \Rightarrow 4y^3 - 16y - 2y = 0 \Rightarrow 4y^3 - 18y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y\left(2y^2 - 9\right) = 0 \Rightarrow 2y = 0, 2y^2 - 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 0, y = \pm\sqrt{\frac{9}{2}}$$

COME CALCOLARE I MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI VINCOLATI

I punti stazionari di $\mathcal{L}$, quindi, sono:

$$\mathcal{L}_{1,2} = \left(0, \pm 3, 10\right)$$

$$\mathcal{L}_{3,4} = \left(\pm 3, 0, 10\right)$$

$$\mathcal{L}_{5,6} = \left(\pm\sqrt{\frac{9}{2}}, \pm\sqrt{\frac{9}{2}}, 1\right)$$

I punti stazionari vincolati di f su M, quindi, sono:

$$P_{1,2} = \left(0, \pm 3\right), P_{3,4} = \left(\pm 3, 0\right), P_{5,6} = \left(\pm\sqrt{\frac{9}{2}}, \pm\sqrt{\frac{9}{2}}\right)$$

COME CALCOLARE I MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI VINCOLATI

L'Hessiano è dato da:

$$H(x,y,\lambda)=\begin{vmatrix} 12x^2-16-2\lambda & 0 & -2x \\ 0 & 12y^2-16-2\lambda & -2y \\ -2x & -2y & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=-4x^2\left(12y^2-16-2\lambda\right)-4y^2\left(12x^2-16-2\lambda\right)=$$

$$=-48x^2y^2+64x^2+8\lambda x^2-48x^2y^2+64y^2+8\lambda y^2$$

$$=-96x^2y^2+64x^2+64y^2+8\lambda x^2+8\lambda y^2$$

COME CALCOLARE I MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI VINCOLATI

e, sostituendo con i punti stazionari, si ottiene:

$$H\left(\mathcal{Z}_{1,2}\right) = -96x^2y^2 + 64x^2 + 64y^2 + 8\lambda x^2 + 8\lambda y^2 =$$

$$= 64(\pm 3)^2 + 8(10)(\pm 3)^2 = 576 + 720 = 1296 > 0$$

Quindi $P_{1,2}$ sono punti di massimo relativo vincolato per f su M.

COME CALCOLARE I MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI VINCOLATI

Analogamente, si ha:

$$H\left(\mathcal{Z}_{3,4}\right) = -96x^2y^2 + 64x^2 + 64y^2 + 8\lambda x^2 + 8\lambda y^2 =$$

$$= 64(\pm 3)^2 + 8(10)(\pm 3)^2 = 576 + 720 = 1296 > 0$$

Quindi $P_{3,4}$ sono punti di massimo relativo vincolato per f su M.

COME CALCOLARE I MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI VINCOLATI

Analogamente, si ha:

$$H\left(\mathcal{Z}_{5,6}\right) = -96x^2y^2 + 64x^2 + 64y^2 + 8\lambda x^2 + 8\lambda y^2 =$$

$$= -96\left(\pm\sqrt{\frac{9}{2}}\right)^2\left(\pm\sqrt{\frac{9}{2}}\right)^2 + 64\left(\pm\sqrt{\frac{9}{2}}\right)^2 + 64\left(\pm\sqrt{\frac{9}{2}}\right)^2 +$$

$$+8(1)\left(\pm\sqrt{\frac{9}{2}}\right)^2 + 8(1)\left(\pm\sqrt{\frac{9}{2}}\right)^2 =$$

COME CALCOLARE I MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI VINCOLATI

$$= -96\left(+\frac{9}{2}\right)\left(+\frac{9}{2}\right) + 64\left(+\frac{9}{2}\right) + 64\left(+\frac{9}{2}\right) +$$

$$+8(1)\left(+\frac{9}{2}\right) + 8(1)\left(+\frac{9}{2}\right) =$$

$$= -1944 + 288 + 288 + 36 + 36 = -1296 < 0$$

Quindi $P_{5,6}$ sono punti di minimo vincolato relativo per f su M.

COME CALCOLARE I MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI VINCOLATI

Per determinare i <u>punti stazionari interni alla circonferenza</u> ovvero i punti di:

$$Int(M) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 9 \right\}$$

occorre calcolare le derivate parziali prime della funzione data:

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 8\left(x^2 + y^2\right)$$

COME CALCOLARE I MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI VINCOLATI

Si ha, quindi:

$$f_x = 4x^3 - 16x$$

$$f_y = 4y^3 - 16y$$

Eguagliando a zero tali equazioni, si ottiene:

$$4x^3 - 16x = 0$$

$$4y^3 - 16y = 0$$

COME CALCOLARE I MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI VINCOLATI

da cui:

$$\begin{cases} 4x\left(x^2-4\right)=0 \\ 4y\left(y^2-4\right)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0, x=\pm 2 \\ y=0, y=\pm 2 \end{cases}$$

Ne segue che i punti stazionari di f in $Int(M)$ sono:

$$P_7=(0,0), P_{8,9}=(0,\pm 2), P_{10,11}=(\pm 2,0), P_{12,13}=(\pm 2,\pm 2)$$

COME CALCOLARE I MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI VINCOLATI

Occorre ora calcolare il determinante Hessiano attraverso le derivate parziali seconde:

$$H(x,y)=\begin{vmatrix} 12x^2-16 & 0 \\ 0 & 12y^2-16 \end{vmatrix}=\left(12x^2-16\right)\left(12y^2-16\right)=$$

$$=144x^2y^2-192x^2-192y^2+256$$

COME CALCOLARE I MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI VINCOLATI

Si calcoli adesso l'Hessiano nei punti stazionari interni ad M:

$$H(P_7) = H(0,0) = 256 > 0,\ f_{xx}(0,0) = -16 < 0$$

Dunque P_7 è un *punto di massimo relativo* della funzione.

$$H(P_{8,9}) = H(0,\pm 2) = -192(\pm 2)^2 + 256 = -768 + 256 =$$

$$= -512 < 0$$

Dunque $P_{8,9}$ sono *punti di sella* della funzione.

COME CALCOLARE I MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI VINCOLATI

Analogamente, si ha:

$$H\left(P_{10,11}\right) = H\left(\pm 2, 0\right) = -192\left(\pm 2\right)^2 + 256 = -768 + 256 =$$

$$= -512 < 0$$

Dunque $P_{10,11}$ sono *punti di sella* della funzione.

COME CALCOLARE I MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI VINCOLATI

$$H\left(P_{12,13}\right) = H\left(\pm 2, \pm 2\right) = 144\left(\pm 2\right)^2\left(\pm 2\right)^2 +$$

$$-192\left(\pm 2\right)^2 - 192\left(\pm 2\right)^2 + 256 =$$

$$= 2304 - 768 - 768 + 256 = 1024 > 0$$

$$f_{xx}\left(\pm, \pm 2\right) = 12\left(\pm 2\right)^2 - 16 = 48 - 16 = 32 > 0$$

Dunque $P_{12,13}$ sono *punto di minimo relativo* della funzione.

COME CALCOLARE I MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI VINCOLATI

Per determinare i punti di massimo e minimo assoluti vincolati occorre trovare i valori della funzione in tali punti:

$$f\left(P_{1,2}\right)= f\left(0,\pm 3\right)=+\left(\pm 3\right)^4-8\left(\pm 3\right)^2=81-72=9$$

$$f\left(P_{3,4}\right)= f\left(\pm 3,0\right)=+\left(\pm 3\right)^4-8\left(\pm 3\right)^2=81-72=9$$

$$f\left(P_{5,6}\right)= f\left(\pm\sqrt{\frac{9}{2}},\pm\sqrt{\frac{9}{2}}\right)=$$

$$=\left(\pm\sqrt{\frac{9}{2}}\right)^4+\left(\pm\sqrt{\frac{9}{2}}\right)^4-8\left[\left(\pm\sqrt{\frac{9}{2}}\right)^2+\left(\pm\sqrt{\frac{9}{2}}\right)^2\right]=$$

COME CALCOLARE I MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI VINCOLATI

$$=\frac{81}{4}+\frac{81}{4}-8\left(\frac{9}{2}+\frac{9}{2}\right)=\frac{81}{2}-72=\frac{81-144}{2}=-\frac{63}{2}$$

$$f\left(P_7\right)=f\left(0,0\right)=0$$

$$f\left(P_{8,9}\right)=f\left(0,\pm2\right)=+\left(\pm2\right)^4-8\left(\pm2\right)^2=16-32=-16$$

$$f\left(P_{10,11}\right)=f\left(\pm2,0\right)=+\left(\pm2\right)^4-8\left(\pm2\right)^2=16-32=-16$$

$$f\left(P_{12,13}\right)=f\left(\pm2,\pm2\right)=+\left(\pm2\right)^4+\left(\pm2\right)^4-8\left[\left(\pm2\right)^2+\left(\pm2\right)^2\right]=$$

$$=16+16-8\left(4+4\right)=32-64=-32$$

COME CALCOLARE I MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI VINCOLATI

Ricapitolando si ha:

- punti di massimo relativo vincolato:

$$P_{1,2}=\left(0,\pm 3\right),P_{3,4}=\left(\pm 3,0\right),P_{7}=\left(0,0\right)$$

- punti di minimo relativo vincolato:

$$P_{5,6}=\left(\pm\sqrt{\frac{9}{2}},\pm\sqrt{\frac{9}{2}}\right),P_{12,13}=\left(\pm 2,\pm 2\right)$$

- punti di sella:

$$P_{8,9}=\left(0,\pm 2\right),P_{10,11}=\left(\pm 2,0\right)$$

COME CALCOLARE I MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI VINCOLATI

Essendo ora:

$$f\left(P_{1,2}\right) = f\left(P_{3,4}\right) = 9 > f\left(P_{7}\right) = 0$$

segue che $P_{1,2}$ e $P_{3,4}$ sono punti di massimo assoluto vincolati.
Essendo, inoltre:

$$f\left(P_{5,6}\right) = -\frac{63}{2} = -31,5 > f\left(P_{12,13}\right) = -32$$

segue che $P_{12,13}$ sono punti di minimo assoluto vincolati.