LA MATEMATICA FINANZIARIA

Daniela Tondini

dtondini@unite.it

Facoltà di Scienze politiche

CdS in Economia

Università degli Studi di Teramo

DEFINIZIONI FONDAMENTALI

La **matematica finanziaria** si occupa di operazioni finanziarie ovvero di operazioni che danno origine allo scambio tra somme di denaro riferite ad epoche diverse

↓

interazioni tra due parti

DEFINIZIONI FONDAMENTALI

La **matematica finanziaria** è quella matematica «ad hoc» che si occupa di operazioni economico-finanziarie ed è necessaria quando un operatore si trova in una situazione in cui deve tener conto di:

tempo**:** il valore di una determinata somma disponibile immediatamente è diverso da quello di una somma, identica nell'importo, ma disponibile in un periodo successivo

incertezza**:** il futuro è, in misura minore o maggiore a seconda dei casi, indeterminato; una determinata somma spettante ad un operatore in un momento futuro stabilito, cioè, può essere corrisposta, in parte o affatto, ovvero può essere liquidata in un momento diverso da quello pattuito

DEFINIZIONI FONDAMENTALI

Per **operazioni economico-finanziarie** si intendono quelle operazioni economiche che hanno per oggetto l'impiego di uno o più capitali monetari o riconducibili ad una valutazione monetaria, quali un immobile, una macchina o un prestito.

DEFINIZIONI FONDAMENTALI

Considereremo SOLO il fattore tempo

↓

somme certe ma disponibili in istanti diversi

(un euro oggi non ha lo stesso valore di un euro incassato due mesi fa o di un euro che si incasserà tra cinque mesi, questo perché si trovano in tempi diversi per cui non si possono sommare con una semplice operazione algebrica)

DEFINIZIONI FONDAMENTALI

Questo accade perché il capitale finanziario spostato nel tempo modifica il proprio valore, in aumento o in diminuzione, a seconda se parliamo di capitali futuri o di capitali passati.

Tale variazione è dovuta al prezzo d'uso del capitale finanziario che prende il nome di **interesse**.

DEFINIZIONI FONDAMENTALI

I CASO

Se depositiamo in banca, alla fine di giugno, 1000,00€, allora, alla fine di dicembre, avremmo sempre 1000,00€ oppure qualcosa in più?

II CASO

Viceversa, siamo in possesso di un titolo di stato di 1000,00€ che possiamo ritirare alla fine di dicembre ma decidiamo di ritirarlo, per un qualsiasi motivo, alla fine di giugno, quindi sei mesi prima; allora incasseremo lo stesso 1000,00€ oppure qualcosa di più?

OPERAZIONI FINANZIARIE

Le operazioni finanziarie possono essere finalizzate a:

una capitalizzazione: chi rinuncia oggi ad una disponibilità finanziaria, differendola nel tempo, richiede che gli venga corrisposto un adeguato compenso.

una attualizzazione: chi richiede oggi una somma, che gli sarebbe dovuta ad una data futura, deve corrispondere un adeguato compenso, ovvero chi anticipa il pagamento di un debito ha diritto ad un compenso.

OPERAZIONI FINANZIARIE

Quanto vale domani il mio capitale attuale?

Operazione finanziaria

Quanto vale oggi il mio capitale futuro?

- **capitalizzazione**
  - **tasso di interesse**
  - **interesse**
  - **montante**
- **attualizzazione**
  - **tasso di sconto**
  - **sconto**
  - **valore attuale**

OPERAZIONI FINANZIARIE

Quanto vale domani il mio capitale attuale?

posticipazione

capitalizzazione o prestito o investimento

capitale

si porta il capitale in avanti

montante

anticipazione

Quanto vale oggi il mio capitale futuro?

attualizzazione o sconto

valore attuale

si porta il capitale indietro

valore nominale

OPERAZIONI FINANZIARIE

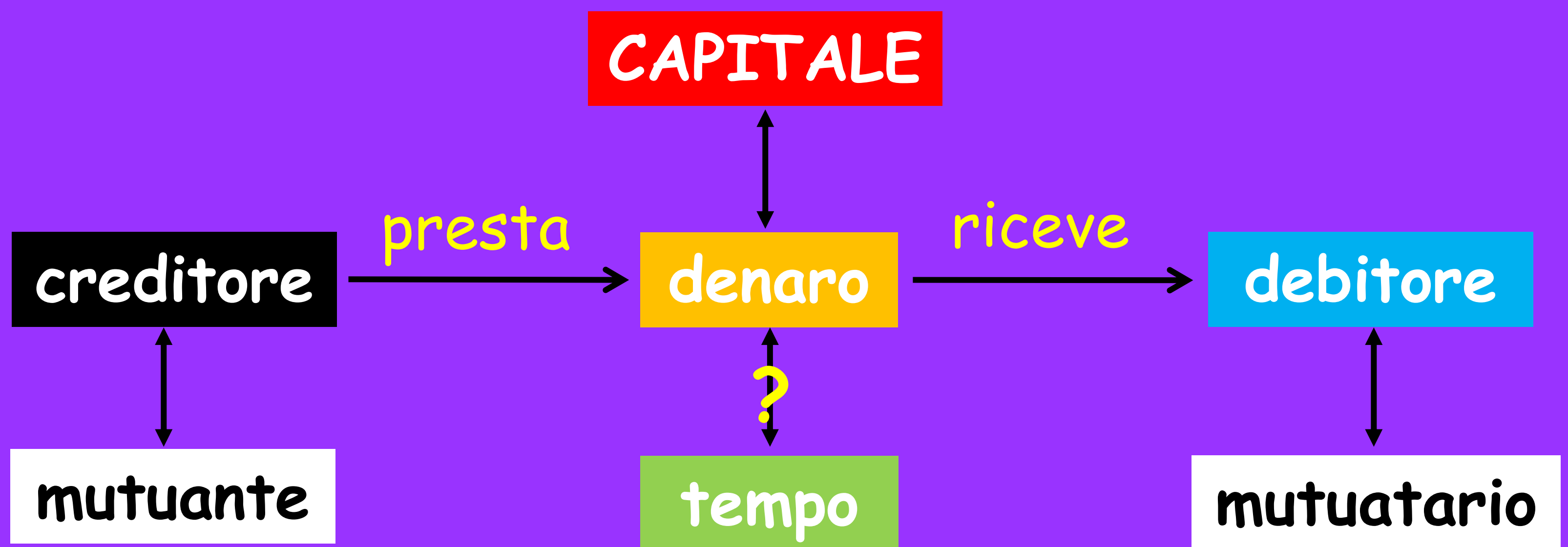
Regimi finanziari

INTERESSE SEMPLICE

INTERESSE COMPOSTO

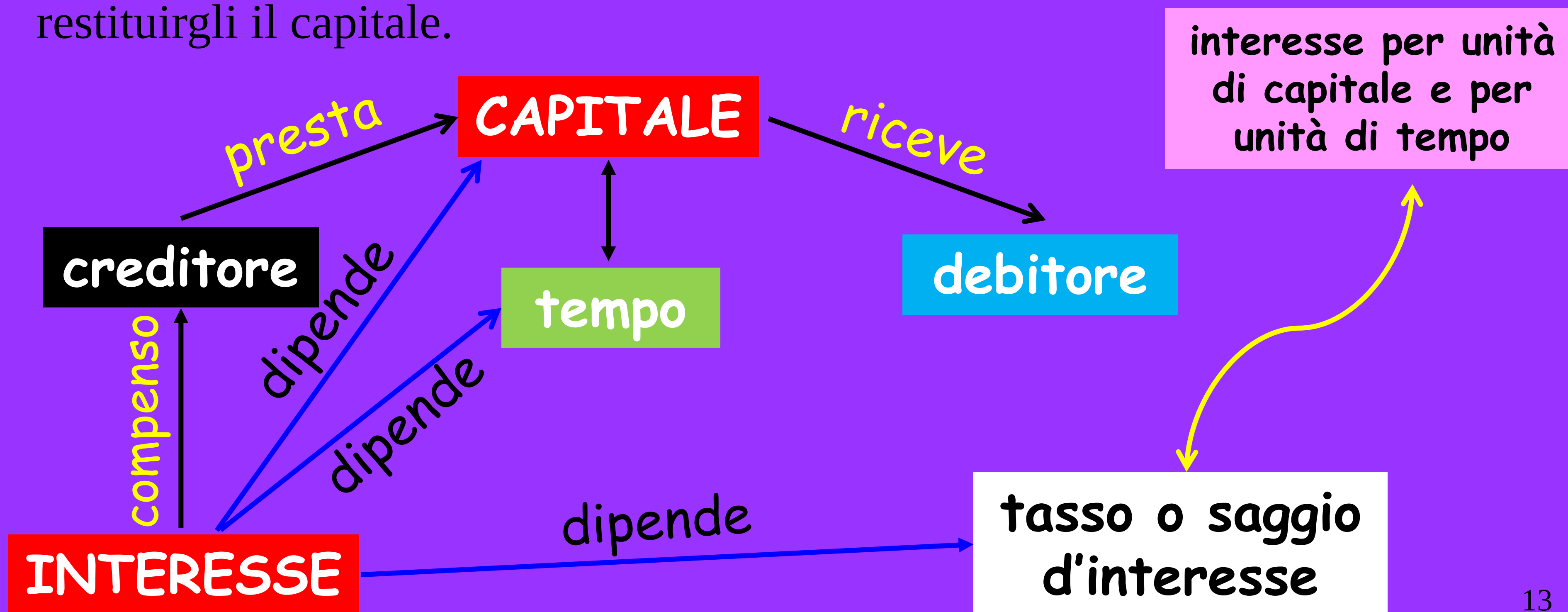
INTERESSE SEMPLICE

La **capitalizzazione ad interesse semplice**, ovvero un contratto di prestito (o di mutuo), è un'operazione finanziaria tra due parti, che possono essere persone o società, precisamente un **creditore** (o mutuante) e un **debitore** (o mutuatario). Il creditore presta del denaro per un certo intervallo di tempo e il debitore riceve. Il denaro prestato prende il nome di **Capitale**.



INTERESSE SEMPLICE

Il **creditore** presta il capitale al **debitore**, non perché è una persona o società generosa che lo fa senza alcun compenso, ma perché il debitore dovrà pagare al creditore tale compenso, che prende il nome di **interesse**, oltre a restituirgli il capitale.



INTERESSE SEMPLICE

Nel regime di **capitalizzazione ad interesse semplice**, gli interessi prodotti da un'operazione di investimento **NON** sono fruttiferi; in tal caso, cioè, l'interesse viene calcolato alla fine di ciascun periodo SOLO sul capitale, ovvero va a frutto solo il capitale e non gli interessi maturati periodo per periodo. Si ha:

$$\boxed{I = C \cdot i \cdot t}$$

L'interesse, cioè, è direttamente proporzionale al capitale *C*, al tempo *t*, ovvero alla durata del prestito, e al tasso unitario *i*.

INTERESSE SEMPLICE

Il montante, o valore nominale, invece, è dato da:

$$\boxed{M = C + I = C + C \cdot i \cdot t = C(1 + i \cdot t)}$$

$$C = 1$$

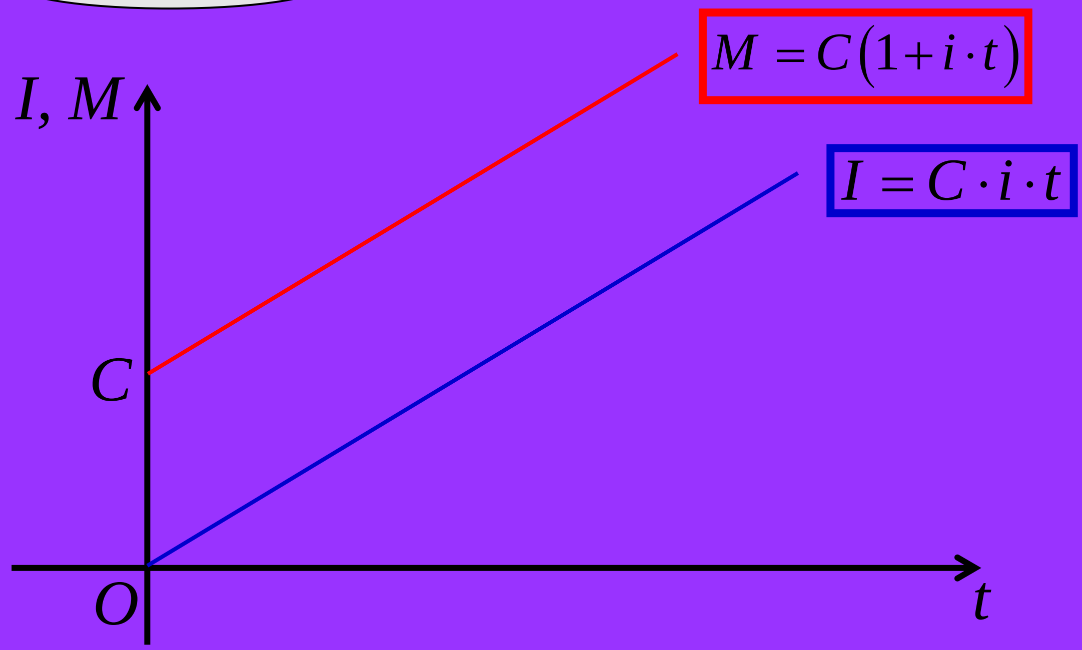
$$\boxed{r = 1 + i \cdot t}$$

fattore di capitalizzazione (posticipazione)

Il debitore dovrà restituire al creditore il **montante**, ovvero sia il capitale prestato sia l'interesse maturato durante il tempo del prestito

INTERESSE SEMPLICE

GRAFICO



INTERESSE SEMPLICE

OSSERVAZIONI

- Il capitale è riferito al momento iniziale ed il montante è riferito al momento finale.
- Il montante è superiore al capitale.
- Capitale e montante rappresentano lo stesso valore finanziario riferito a due momenti differenti.
- Il montante e l'interesse hanno andamento lineare rispetto al tempo.
- Le due rette sono parallele con coefficiente angolare $m = C \cdot i \cdot t$.
- Il coefficiente angolare cresce all'aumentare del capitale C o del tasso di interesse i o del tempo t.

INTERESSE SEMPLICE

OSSERVAZIONE

Il tasso di interesse *i* e il tempo *t* devono essere espressi nella stessa unità di misura per cui o si cambia il tasso o si esprime il tempo nella stessa unità di misura del tasso.

INTERESSE SEMPLICE

N.B.

tasso trimestrale del 1,5% = 1,5 : 3 = 0,5% mensile

tasso semestrale del 3% = 3 × 2 = 6% annuo

tasso quadrimestrale del 4% = 4 × 3 = 12% annuo

tasso quadrimestrale del 4% = 4 : 4 = 1% mensile

tasso annuo del 20% = 20 : 2 = 10% semestrale

INTERESSE SEMPLICE

N.B.

m mesi = $m : 12$

gg giorni = $gg : 360$ (l’anno commerciale è costituito da 360 giorni)

a anni, m mesi, gg giorni = $a + m : 12 + gg : 360$

INTERESSE SEMPLICE

ESEMPIO

Consideriamo un'operazione finanziaria di prestito, ovvero a capitalizzazione dell'interesse semplice, sapendo che il capitale prestato è di €1350 per un tasso annuo del 4,9% e per un tempo di 6 mesi e 19 giorni. Calcolare l'interesse maturato.

tasso annuo

$$i_{12} = 4,9\% = 0,049$$

$$t = 6m + 19gg = \frac{6}{12} + \frac{19}{360} = \frac{180+19}{360} = \frac{199}{360}$$

tempo da trasformare in anno

capitalizzazione semplice

$$\boxed{I = C \cdot i \cdot t}$$

$$I = 1350 \cdot 0,049 \cdot \frac{199}{360} = 36,57€$$

INTERESSE SEMPLICE

ESEMPIO

Consideriamo un’operazione finanziaria di prestito, ovvero a capitalizzazione dell’interesse semplice, sapendo che sono stati pagati interessi pari a €345, che c’è un tasso trimestrale del 2,3% e che il prestito è protratto per un tempo di 2 anni e 4 mesi. Calcolare il capitale.

capitalizzazione semplice

$$\boxed{C = \frac{I}{i \cdot t}}$$

tasso trimestrale

$$i_3 = 2,3\% = 0,023$$

$$t = 2a + 4m = 2 \cdot 4 + 3m + 1m = 8 + 1 + \frac{1}{3} = \frac{28}{3} \ \textit{trimestri}$$

in un anno ci sono 4 trimestri

3 mesi costituiscono 1 trimestre

va trasformato in frazione di trimestre

$$C = \frac{345}{0,023 \cdot \frac{28}{3}} = 1607,14€$$

INTERESSE SEMPLICE

ESEMPIO

Consideriamo un prestito con un capitale di €5500 e supponiamo che il compenso spettante al creditore, ovvero gli interessi, corrisponda a €853; sappiamo inoltre che la durata del prestito è di 3 anni e 9 mesi. Calcoliamo il tasso bimestrale.

capitalizzazione semplice

$$\boxed{i = \frac{I}{C \cdot t}}$$

$$t = 3a + 9m = 3 \cdot 6 + 8m + 1m = 18 + 4 + \frac{1}{2} = \frac{45}{2} \ \textit{bimestri}$$

in un anno ci sono 6 bimestri

8 mesi costituiscono 4 bimestri

va trasformato in frazione di bimestre

$$i = \frac{853}{5500 \cdot \frac{45}{2}} = 0,0069 = 0,69\%$$

INTERESSE SEMPLICE

Nel regime di **attualizzazione ad interesse semplice**, un operatore rinuncia ad una parte del capitale *M* che gli è dovuto in futuro, ad un istante *t*, pur di entrare immediatamente in possesso del valore attuale $C < M$:

$$\boxed{d = \frac{i \cdot t}{1 + i \cdot t}}$$

tasso di sconto

sconto

$$\boxed{D = M \cdot d = M \cdot \frac{i \cdot t}{1 + i \cdot t}}$$

INTERESSE SEMPLICE

$$\boxed{v = \frac{1}{r} = \frac{1}{1 + i \cdot t}}$$

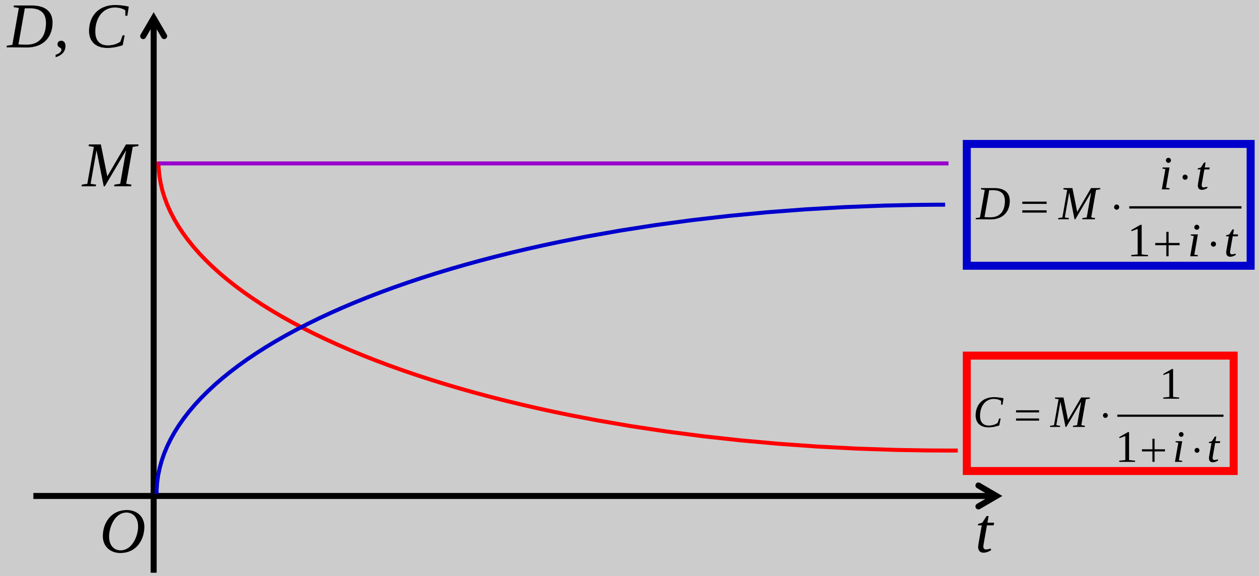
fattore di attualizzazione (anticipazione)

valore attuale o capitale

$$\boxed{C = M \cdot \frac{1}{1 + i \cdot t}}$$

INTERESSE SEMPLICE

GRAFICO



INTERESSE COMPOSTO

Nel regime di **capitalizzazione ad interesse composto**, gli interessi maturati non vengono restituiti al debitore al termine di ogni periodo ma vanno sommati al capitale e diventano a loro volta fruttiferi di interessi, ovvero vanno a produrre a loro volta, insieme al capitale, gli interessi.

INTERESSE COMPOSTO

CAPITALIZZAZIONE COMPOSTA

annua

gli interessi sono capitalizzati annualmente

frazionata

gli interessi sono capitalizzai per periodi inferiori all'anno

capitalizzazioni semestrali (interessi capitalizzati ogni 6 mesi, quindi 2 volte l'anno)

capitalizzazioni bimestrali (interessi capitalizzati ogni 2 mesi, quindi 6 volte l'anno)

capitalizzazioni trimestrali (interessi capitalizzati ogni 3 mesi, quindi 4 volte l'anno)

capitalizzazioni quadrimestrali (interessi capitalizzati ogni 4 mesi, quindi 3 volte l'anno)

INTERESSE COMPOSTO

Nel regime di **capitalizzazione ad interesse composto**, risulta:

$$M_1 = C + C \cdot i = C(1+i)$$

al termine del primo anno

capitale iniziale

interessi maturati

stessa relazione che ci dà il montante, dopo un anno, nella capitalizzazione dell'interesse semplice

$$M_2 = M_1(1+i) = C(1+i)(1+i) = C(1+i)^2$$

al termine del secondo anno

interessi maturati in quell'anno

capitale all'inizio del secondo anno (possiamo usare la formula usata in precedenza come se ripartissimo da zero, ovvero il nuovo capitale è il montante ottenuto al termine del primo anno)

gli interessi maturati vanno a sommarsi al capitale

INTERESSE COMPOSTO

Generalizzando, dopo *t* anni, avremo la seguente relazione:

$$\boxed{M = C(1+i)^t}$$

$$C = 1$$

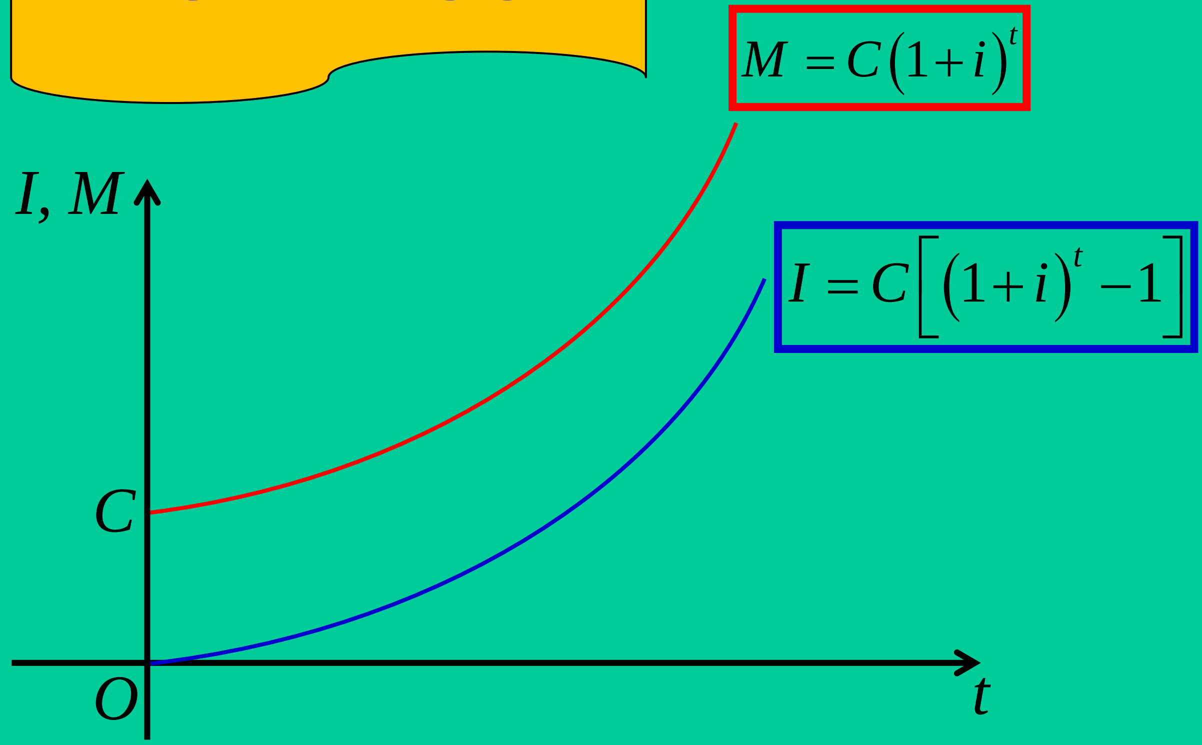
$$\boxed{r = (1+i)^t}$$

fattore di capitalizzazione

$$\boxed{I = M - C = C(1+i)^t - C = C\left[(1+i)^t - 1\right]}$$

INTERESSE COMPOSTO

GRAFICO



INTERESSE COMPOSTO

OSSERVAZIONI

- Il montante è una funzione esponenziale del tempo.
- La base $1+i$ è maggiore di 1 per cui la funzione esponenziale, ovvero il montante, è crescente.
- L'interesse non è proporzionale al tasso e al tempo per cui bisogna trovare una relazione tra tassi frazionati e tasso annuo per poter esprimere tassi e tempi attraverso la stessa unità di misura.

INTERESSE COMPOSTO

ESEMPIO

A quale tasso un capitale di €5000, dopo 3 anni, dà un montante di €6250?

capitalizzazione composta

$$\boxed{M = C(1+i)^t}$$

$$6250 = 5000(1+i)^3 \Rightarrow \frac{6250}{5000} = (1+i)^3 \Rightarrow 1,25 = (1+i)^3 \Rightarrow \sqrt[3]{1,25} = 1+i \Rightarrow i = \sqrt[3]{1,25} - 1$$

$$i = 1,08 - 1 = 0,08 = 8\%$$

INTERESSE COMPOSTO

ESEMPIO

Impiegando €1250 al 2,5%, dopo quanto tempo avremo un montante di €2500?

capitalizzazione composta

$$\boxed{M = C(1+i)^t}$$

$$2500 = 1250(1+0,025)^t \Rightarrow \frac{2500}{1250} = (1,025)^t \Rightarrow 2 = (1,025)^t \Rightarrow \log(2) = \log(1,025)^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log(2) = t\log(1,025) \Rightarrow t = \frac{\log(2)}{\log(1,025)} \Rightarrow t \cong 28,07 \Rightarrow t = 28a + 0,07 \cdot 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = 28a + 0,84m \cdot 30gg \Rightarrow t \cong 28a + 25,5gg$$

INTERESSE COMPOSTO

Nel regime di **attualizzazione ad interesse composto**, invece, si ha:

$$\boxed{d = 1-\left(1+i\right)^{-t}}$$

tasso di sconto

sconto

$$\boxed{D = M \cdot d = M \cdot \left[1-\left(1+i\right)^{-t}\right]}$$

INTERESSE COMPOSTO

$$v = \frac{1}{r} = \frac{1}{\left(1+i\right)^{t}} = \left(1+i\right)^{-t}$$

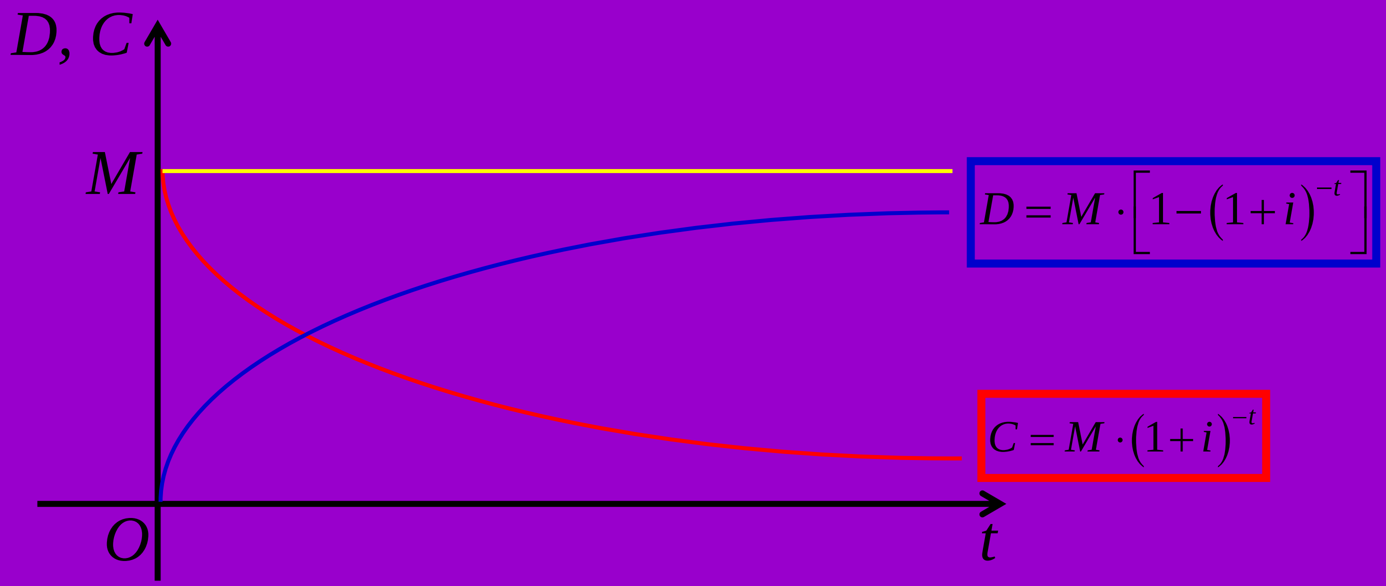
fattore di attualizzazione

valore attuale
o capitale

$$C = M \cdot \left(1+i\right)^{-t}$$

INTERESSE COMPOSTO

GRAFICO



CONFRONTO TRA I DUE REGIMI

CAPITALIZZAZIONE

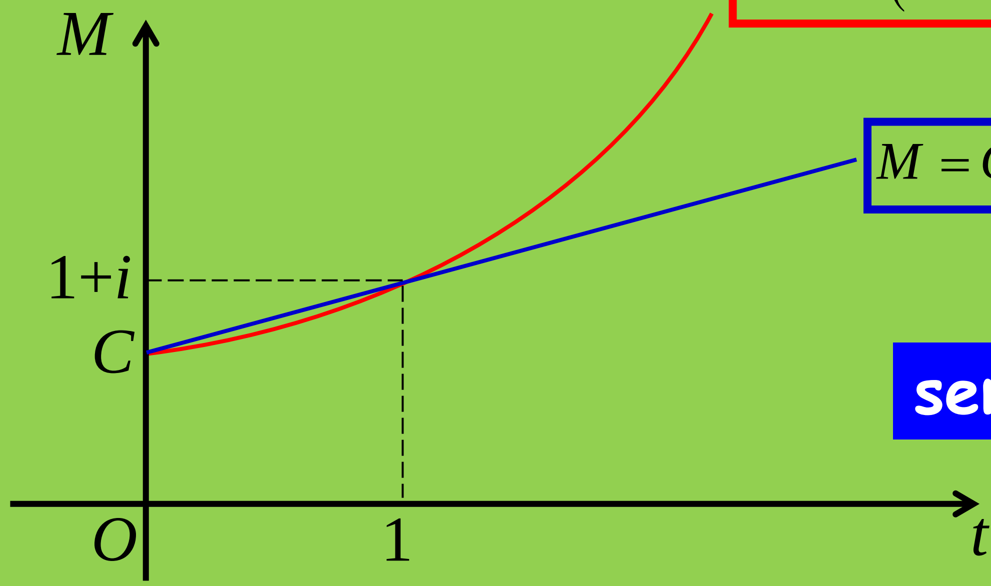
GRAFICI

composta

$$\boxed{M = C(1+i)^t}$$

$$\boxed{M = C(1+i \cdot t)}$$

semplice



CONFRONTO TRA I DUE REGIMI

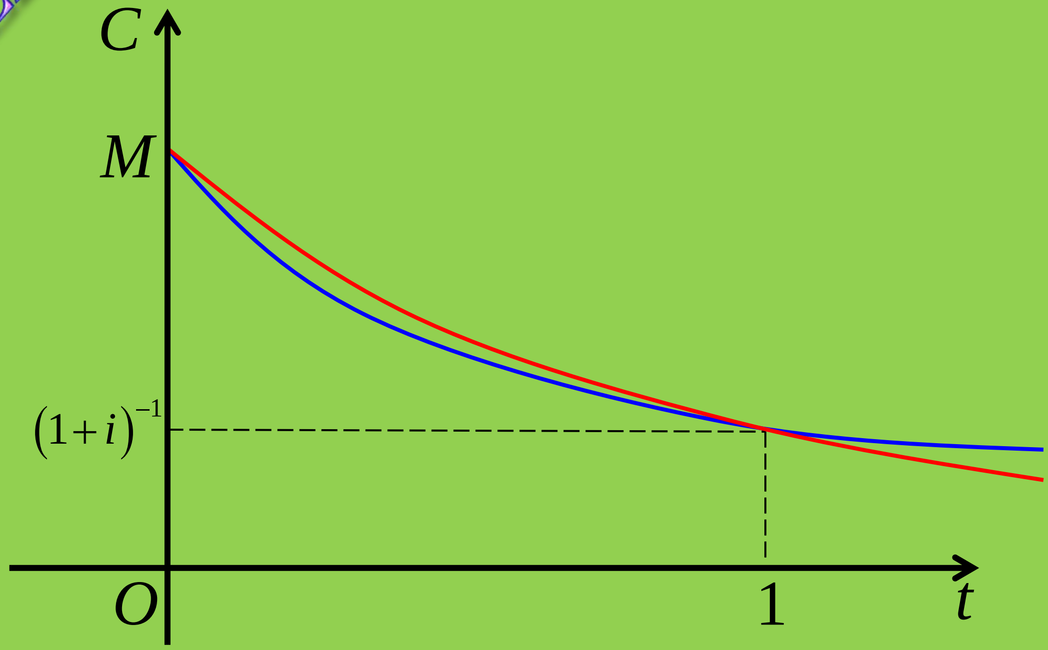
OSSERVAZIONI

- Per $t = 0$ e per $t = 1$, il montante semplice e il montante composto sono equivalenti.
- Per $0 < t < 1$ è più vantaggiosa la capitalizzazione semplice.
- Per $t > 1$ è più vantaggiosa la capitalizzazione composta.
- Per tempi «brevi» si usa la capitalizzazione semplice.
- Per tempi «lunghi» si usa la capitalizzazione composta.

CONFRONTO TRA I DUE REGIMI

ATTUALIZZAZIONE

GRAFICI



semplice

$C = M \cdot \frac{1}{1+i \cdot t}$

$C = M \cdot (1+i)^{-t}$

composta

CONFRONTO TRA I DUE REGIMI

OSSERVAZIONI

- Per $t = 0$ e per $t = 1$, il valore attuale (capitale) semplice e il valore attuale composto sono equivalenti.
- Per $0 < t < 1$ è più vantaggiosa la capitalizzazione composta.
- Per $t > 1$ è più vantaggiosa la capitalizzazione semplice.
- Per tempi «brevi» si usa la capitalizzazione composta.
- Per tempi «lunghi» si usa la capitalizzazione semplice.

CAPITALIZZAZIONE FRAZIONATA

Si parla di **capitalizzazione frazionata** quando la capitalizzazione avviene per periodi che sono sottomultipli dell’anno. Ad esempio:

$\boxed{i_2}$ è il tasso di una **capitalizzazione semestrale** in cui, cioè, gli interessi saranno capitalizzati 2 volte l’anno (in un anno ci sono 2 semestri), ovvero la capitalizzazione avverrà due volte l’anno

$\boxed{i_3}$ è il tasso di una **capitalizzazione quadrimestrale** in cui, cioè, gli interessi saranno capitalizzati 3 volte l’anno (in un anno ci sono 3 quadrimestri)

CAPITALIZZAZIONE FRAZIONATA

$\boxed{i_4}$ è il tasso di una **capitalizzazione trimestrale** in cui, cioè, gli interessi saranno capitalizzati 4 volte l'anno (in un anno ci sono 4 trimestri)

$\boxed{i_6}$ è il tasso di una **capitalizzazione bimestrale** in cui, cioè, gli interessi saranno capitalizzati 6 volte l'anno (in un anno ci sono 6 bimestri)

$\boxed{i_{12}}$ è il tasso di una **capitalizzazione mensile** in cui, cioè, gli interessi saranno capitalizzati 12 volte l'anno (in un anno ci sono 12 mesi)

CAPITALIZZAZIONE FRAZIONATA

I tassi possono essere:

periodali relativi ad un periodo di una frazione di anno (tassi di capitalizzazione semestrale, quadrimestrale, …)

annui nominali convertibili *k* volte l'anno e si indicano con:

$$\boxed{j_k}$$

(ad esempio, se è convertibile 2 volte l'anno si avrà j_2)

tasso periodale corrispondente al tasso annuo nominale convertibile (*k* è il numero di volte all'anno in cui avviene la capitalizzazione)

$$\boxed{i_k = \frac{j_k}{k}}$$

CAPITALIZZAZIONE FRAZIONATA

ESEMPIO

Il tasso annuo nominale convertibile trimestralmente del 10% è dato da:

$$\boxed{j_k = 10\%}$$

$$i_4 = \frac{0,1}{4} = 0,025$$

numero di trimestri in un anno

Un tasso annuo nominale convertibile trimestralmente del 10% corrisponde ad un tasso periodale trimestrale del 2,5%, cioè:

$$\boxed{i_4 = 2,5\%}$$

CAPITALIZZAZIONE FRAZIONATA

ESEMPIO

Determiniamo il montante di €3550 dopo 5 anni in capitalizzazione quadrimestrale al 5,2% in un regime ad interesse composto. Si ha:

$$i_3 = 5,2\% = 0,052 \longrightarrow$$

tasso periodale quadrimestrale (la capitalizzazione avviene 3 volte l'anno perché in un anno di sono 3 quadrimestri)

$$C = 3550€ \longrightarrow$$

capitale iniziale

$$t = 5a = 5 \cdot \underset{\uparrow}{3} = 15 \; quadrimesti \longrightarrow$$

il tempo va trasformato in quadrimestri perché abbiamo un tasso periodale in quadrimestri

in un anno ci sono 3 quadrimestri

CAPITALIZZAZIONE FRAZIONATA

$$M = C(1+i)^{t}$$

formula generica del montante in un regime di capitalizzazione ad interesse composto

$$M = 3550(1+0{,}052)^{15} = 3550(1{,}052)^{15} = 7593{,}89€$$

CAPITALIZZAZIONE FRAZIONATA

OSSERVAZIONI

Interesse composto al 5% semestrale

Interesse composto con capitalizzazione semestrale al 5%

Interesse composto al 10% annuo nominale convertibile semestralmente

EQUIVALENTI

$$i_2 = \frac{0{,}1}{2} = 0{,}05 = 5\%$$

CAPITALIZZAZIONE FRAZIONATA

OSSERVAZIONI

Capitalizzazione annua al 12%

Capitalizzazione semestrale al 6%

Capitalizzazione bimestrale al 2%

i montanti sono diversi

NON EQUIVALENTI

TASSI EQUIVALENTI

Due tassi si dicono **equivalenti** se, applicati allo stesso capitale, producono, nello stesso tempo, il medesimo montante.

Se, ad esempio, consideriamo $C = 1$ *euro* e $t = 1$ *anno*, indicando con i il tasso annuo e con i_k il tasso periodale relativo ad una frazione di anno, ovvero pari ad $1/k$ anno (un k-esimo di anno), allora, per il primo anno, avremo la seguente relazione per il montante, essendo $C = 1$:

$$\boxed{1+i=\left(1+i_k\right)^k}$$

relazione tra tasso annuo e tasso periodale equivalente frazionato per k-esimi di anno (per $t = 1$ *anno*)

$$\boxed{\left(1+i\right)^n=\left[\left(1+i_k\right)^k\right]^n}$$

relazione tra tasso annuo e tasso periodale equivalente frazionato per k-esimi di anno (per $t = n$ *anni*)

TASSI EQUIVALENTI

ESEMPIO

Assegnato il tasso annuo del 6,5%, determinare l'equivalente tasso semestrale:

$$1+i=\left(1+i_2\right)^2 \Rightarrow 1+0,065=\left(1+i_2\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1+0,065\right)^{\frac{1}{2}}=\left[\left(1+i_2\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \left(1,065\right)^{\frac{1}{2}}=1+i_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1,065\right)^{\frac{1}{2}}-1=i_2 \Rightarrow i_2=0,032=3,2\%$$

tasso periodale semestrale

TASSI EQUIVALENTI

ESEMPIO

Assegnato il tasso annuo nominale convertibile trimestralmente del 6,6%, determinare l'equivalente tasso annuo:

$$j_4 = 0,066$$

tasso annuo nominale convertibile trimestralmente

$$i_4 = \frac{j_4}{4} = \frac{0,066}{4} = 0,0165$$

tasso periodale

frazione di anno corrispondente (in un anno ci sono 4 trimestri)

TASSI EQUIVALENTI

$$i_4 = 1,65\%$$

$$1 + i = (1 + i_k)^k$$

$$1 + i = (1 + 0,0165)^4 \Rightarrow 1 + i = (1,0165)^4 \Rightarrow i = (1,0165)^4 - 1 \Rightarrow$$

$$i = 0,068 = 6,8\%$$

tasso annuale, ovvero il tasso annuo equivalente

INTERESSE COMPOSTO

ESEMPI

tasso annuo del 0,12% ⇨ $i=(1+0,12)^{\frac{1}{2}}-1$

tasso semestrale equivalente

tasso semestrale del 0,032% ⇨ $i=(1+0,032)^{2}-1$

tasso annuo equivalente

tasso quadrimestrale del 0,032% ⇨ $i=(1+0,032)^{\frac{3}{4}}-1$

tasso trimestrale equivalente