- **FUNZIONI**

Funzione reale:

Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $A, B \neq \emptyset$.

Si definisce funzione reale f da A (dominio) a B (codominio) di variabile reale una corrispondenza che ad ogni elemento $x \in A$ associa uno ed un solo elemento $y \in B$ e si indica col simbolo:

$$f : A \rightarrow B$$

$$f : x \in A \rightarrow y \in \mathrm{B}$$

- A si dice **dominio** di f, anche denotato con $dom(f)$, Df

- B si dice **codominio** di f,

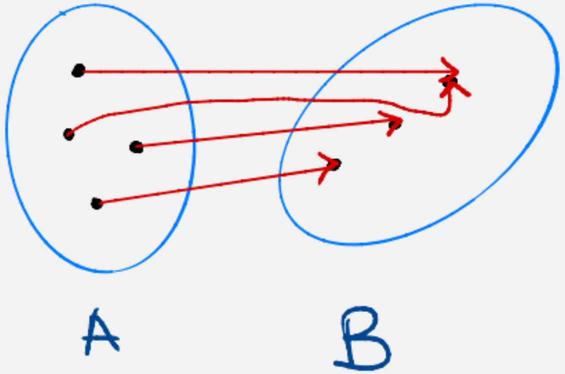
Per la legge che alla **variabile indipendente** x associa la sua **immagine** $f(x)$

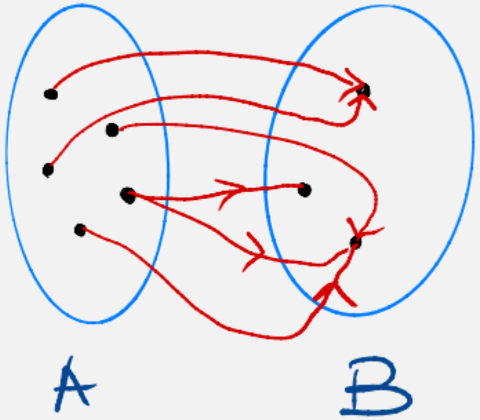
- L'immagine è l'insieme di tutti i possibili valori $f(x)$ associati ad almeno un elemento del dominio:

$$im(f) = \{y \in B : y = f(x), x \in A\}$$

Per essere tale, una funzione deve far corrispondere univocamente a ogni $x \in dom(f)$ un valore $f(x)$.
Non è necessario che valori differenti di x diano valori differenti di $f(x)$: può capitare che per $x_1, x_2 \in dom(f), x_1 \neq x_2$ si abbia $f(x_1) = f(x_2)$

$$\forall x \in A, \quad \exists! y \in B \ : \ y = f(x).$$





La def. permette che a diversi x corrisponda lo stesso y.

Funzione reale:

Una funzione viene assegnata fornendo la sua espressione analitica e, cioè, fornendo un insieme di operazioni matematiche ben definite che, applicate in un certo ordine, permettono di trovare, per ogni assegnato valore di x, il corrispondente valore $y = f(x)$

$$y = x + 1 \Rightarrow \text{se } x = 1, y = 2; \text{se } x = 2, y = 3; \ldots$$

$$y = x^3 + x^2 \Rightarrow \text{se } x = 1, y = 2; \text{se } x = 2, y = 12; \ldots$$

N.B. nel caso di una funzione reale di variabile reale $f : dom(f) \to \mathbb{R}$, considereremo sempre come codominio l'insieme $\mathbb{R}$

Le funzioni possono essere iniettive, suriettive, o biunivoche:

- $f: A \to B$ è **iniettiva** se

$$\forall a_1, a_2 \in A, \qquad a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall a_1, a_2 \in A, \qquad f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$$

  prendo due elementi diversi e le loro immagini sono diverse; il ritorno è garantito

- $f: A \to B$ è **suriettiva** se $im(f) = B$
  tutti gli elementi di B sono presi nella funzione; non implica, però, che sia iniettiva, perché diversi a_1 e a_2 possono avere la stessa immagine:

$$\forall y \in B \; \exists x \in A : f(x) = y$$

- $f: A \to B$ è **biunivoca** se e allo stesso tempo iniettiva e suriettiva.
  è garantito il ritorno, quindi esiste anche una funzione inversa

Il grafico di una funzione $f : D \to \mathbb{R}$

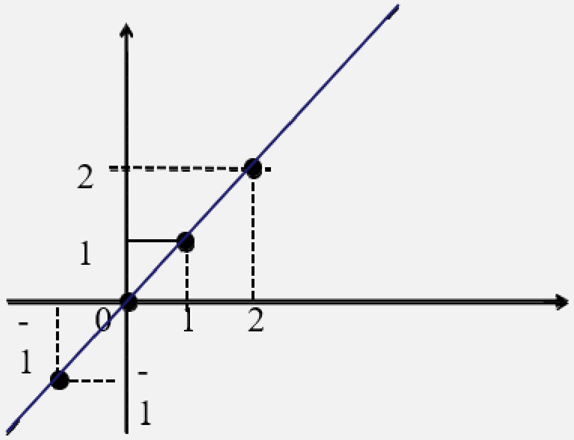
non è altro che l'insieme dei punti del piano cartesiano Oxy di coordinate (x, y) che hanno per ascissa il generico elemento x del dominio D e per ordinata il corrispondente valore $y = f(x)$

$$G_f = \{(x, y) : x \in D, y = f(x)\}$$

$f : x \in R \to x \in R$

$f(x) = x$

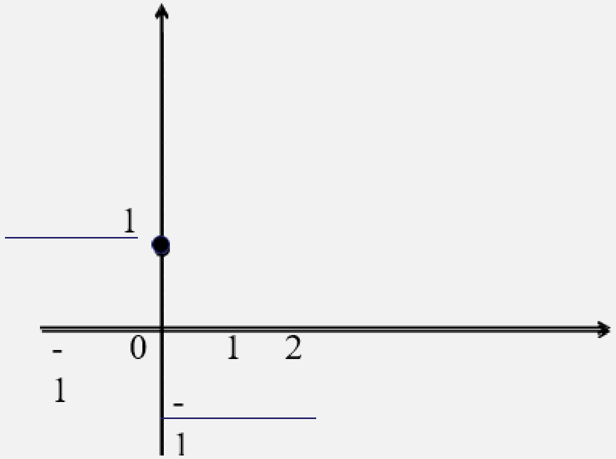
x	$f(x)$
-1	-1
0	0
1/2	1/2
1	1
2	2
…	…



Il grafico è la retta passante per i punti individuati

$$f : x \in R \to \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -1 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

x	$f(x)$
-2	-1
-1	-1
0	1
1/2	1
1	1
…	…



Funzione definita a tratti

Operazioni fra funzioni

Le funzioni possono essere «combinate» fra loro attraverso operazioni aritmetiche.

Consideriamo due funzioni reali f, g con il medesimo dominio:

$$f : A \to \mathbb{R}, \qquad g : A \to \mathbb{R}$$

- $(f + g)x = f(x) + g(x)$
- $(f - g)x = f(x) - g(x)$
- $(f \cdot g)x = f(x) \cdot g(x)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)x = \frac{f(x)}{g(x)}, con\ g(x) \neq 0$

Operazioni fra funzioni

COMPOSIZIONE

Siano $f : A \to B, \quad g: B \to C$, si dice **funzione composta di f e g** la funzione di A in C che si indica con

$$g \circ f : A \to C$$

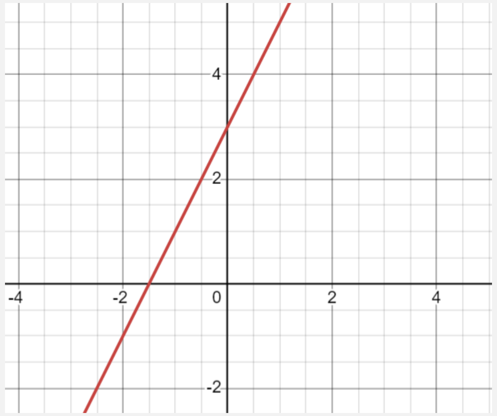
Quindi:

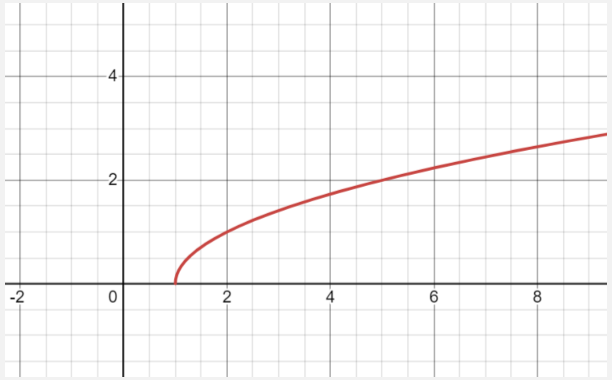
$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$

N.B. si calcola prima la f poi la g

Esempio. $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = \sqrt{x-1}$

$$(g \circ f) = g\big(f(x)\big) = g(2x+3)$$
$$= \sqrt{2x-2} = \sqrt{2(x-1)}$$





$$(f \circ g) = f\big(g(x)\big) = f\big(\sqrt{x-1}\big)$$
$$= 2\sqrt{x-1} + 3$$

I risultati sono diversi: la composizione non gode della proprietà commutativa

Trovare il dominio

Determinare il dominio di una funzione significa porre delle condizioni che eliminino i casi in cui una determinata funzione non è consentita.

$$g(x) = \sqrt{x-1} \qquad x - 1 \geq 0 \ \rightarrow x \geq 1$$

$$Df = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$$

REGOLE:

- Quando ho una <u>radice di ordine pari</u>, si impone che tutto il radicando sia ≥ 0

- Se ho una <u>frazione</u>, è necessario che il denominatore sia $\neq 0$:

  $f(x) = \frac{1-x}{x^2-3}$ → tutte le operazioni sono consentite singolarmente, ma è necessario che

  $$x^2 - 3 \neq 0 \ \rightarrow \ x^2 \neq 3 \ \rightarrow x \neq \pm\sqrt{3}$$

  $$Df = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pm\sqrt{3}\}$$

- Se ho un <u>logaritmo</u>, il suo argomento deve essere > 0:

$$f(x) = 2 - x\log(x+5) \rightarrow \ x + 5 > 0 \ \rightarrow x > -5$$

$$Df = \{x \in \mathbb{R} : x > -5\}$$

Dominio e Codominio

Determinare il dominio di una funzione significa porre delle condizioni che eliminino i casi in cui una determinata funzione non è consentita.

$$g(x) = \sqrt{x-1} \qquad\qquad x - 1 \geq 0 \; \rightarrow x \geq 1$$

$$Df = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$$

$\boldsymbol{Df}$: insieme dei valori che può assumere la x (detto anche <u>insieme di definizione</u>)

L'**immagine di $\boldsymbol{x}$ mediante $\boldsymbol{f}$** è il valore di y corrispondente a un fissato valore di x

$\boldsymbol{Cf}$: insieme di tutti gli elementi che sono immagine mediante f di almeno un elemento x del dominio (detto anche <u>immagine di f</u>)

Esercizi.

$$f(x) = \frac{\sqrt{1 - \ln(x-3)}}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{x-1}{1+x^2}$$

$$f(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{x^2-2}$$

$$f(x) = \frac{\ln(1-\sqrt{x})}{2x-1}$$

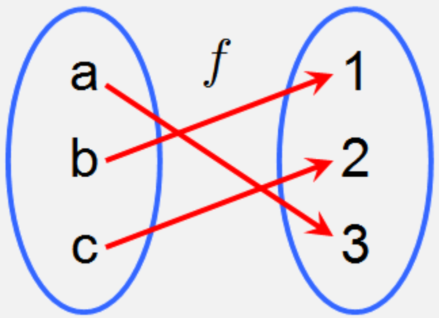
Funzione inversa

Data una funzione biunivoca:

$$f : A \to B, \qquad con\ A, B \subseteq \mathbb{R}, \qquad A, B \neq \emptyset$$

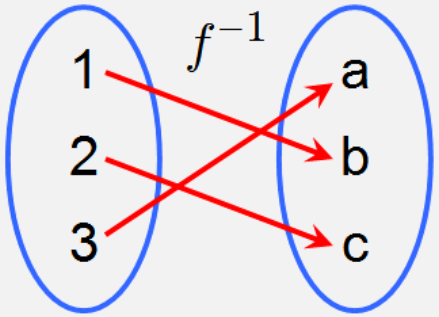
Una funzione è detta inversa di f e si indica con il simbolo f^{-1} se

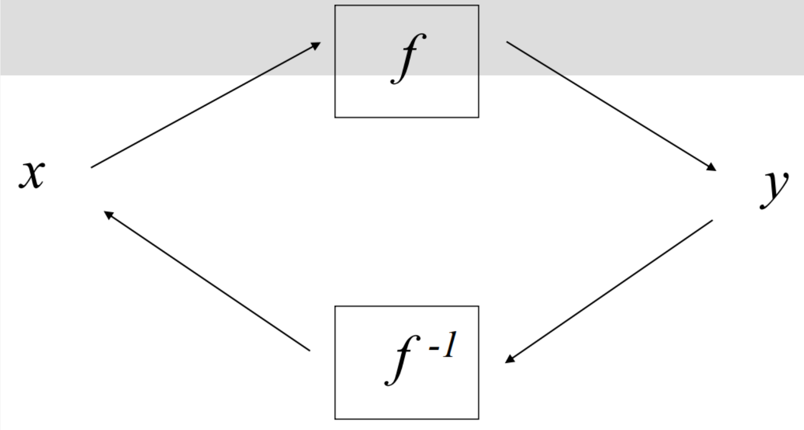
$$\begin{array}{ccc} f^{-1}: f(A) & \longrightarrow & A \\ y & & x \end{array}$$



Questa funzione $\forall y \in f(A)$ associa uno e un solo $x \in A$ tale che:

$$x = f^{-1}(y)$$



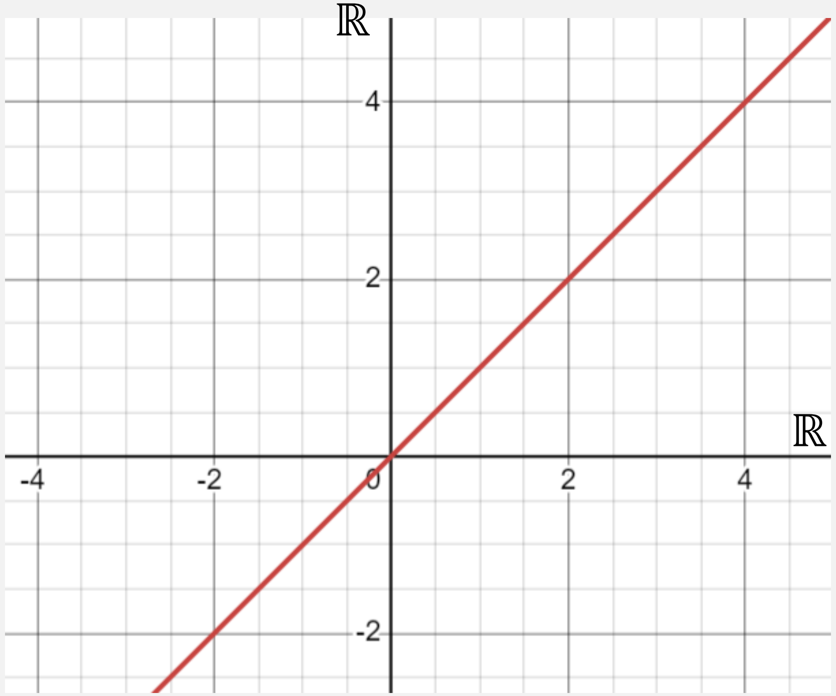


Se si parte da x e si effettua un giro completo, passando per f e poi per f^{-1} , si torna in x.

$$f^{-1}(f(x)) = x, \qquad \forall x \in A$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x$$

$(f^{-1} \circ f)$ prende il nome di funzione identità



$(f^{-1} \circ f)(a)$ funzione identità sull'insieme A

$(f \circ f^{-1})(b)$ funzione identità sull'insieme B

Esercizi.

$$f(x) = x$$

$$f(x) = 2x - 1$$

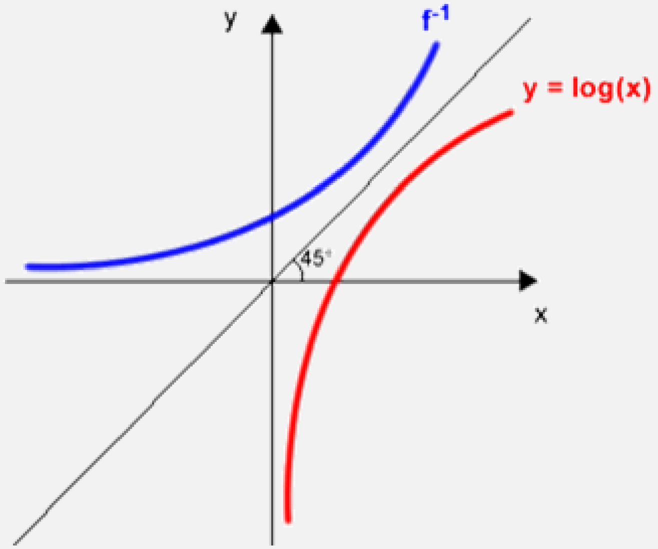
$$f(x) = x^2$$

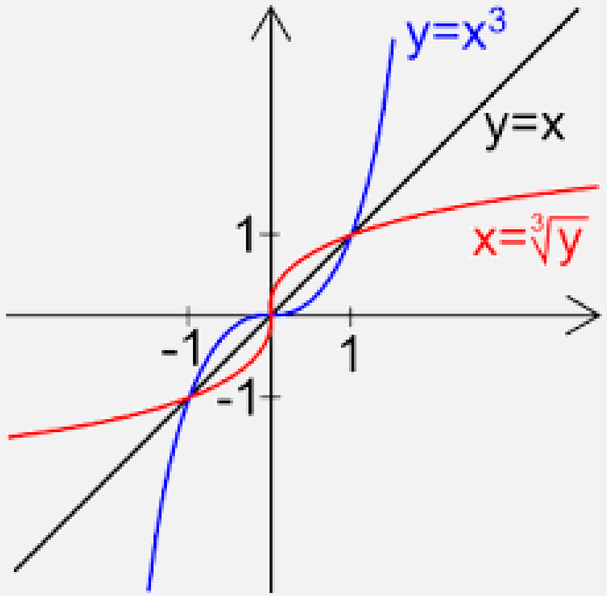
Data una funzione biunivoca:

$$f : A \to B, \qquad con\ A, B \subseteq \mathbb{R}, \qquad A, B \neq \emptyset$$

Se f è strettamente monotona (crescente o decrescente), allora è invertibile

Graficamente, l'inversa f^{-1} di una funzione invertibile f è una funzione il cui grafico si ricava da quello della f per simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante (identità)





Funzioni limitate

Data una funzione :

$$f : A \to B, \qquad con\ A, B \subseteq \mathbb{R}, \qquad A, B \neq \emptyset$$

- si dice che f è limitata superiormente se il suo insieme immagine $f(A)$ è limitato superiormente e cioè se $f(A)$ ammette maggioranti

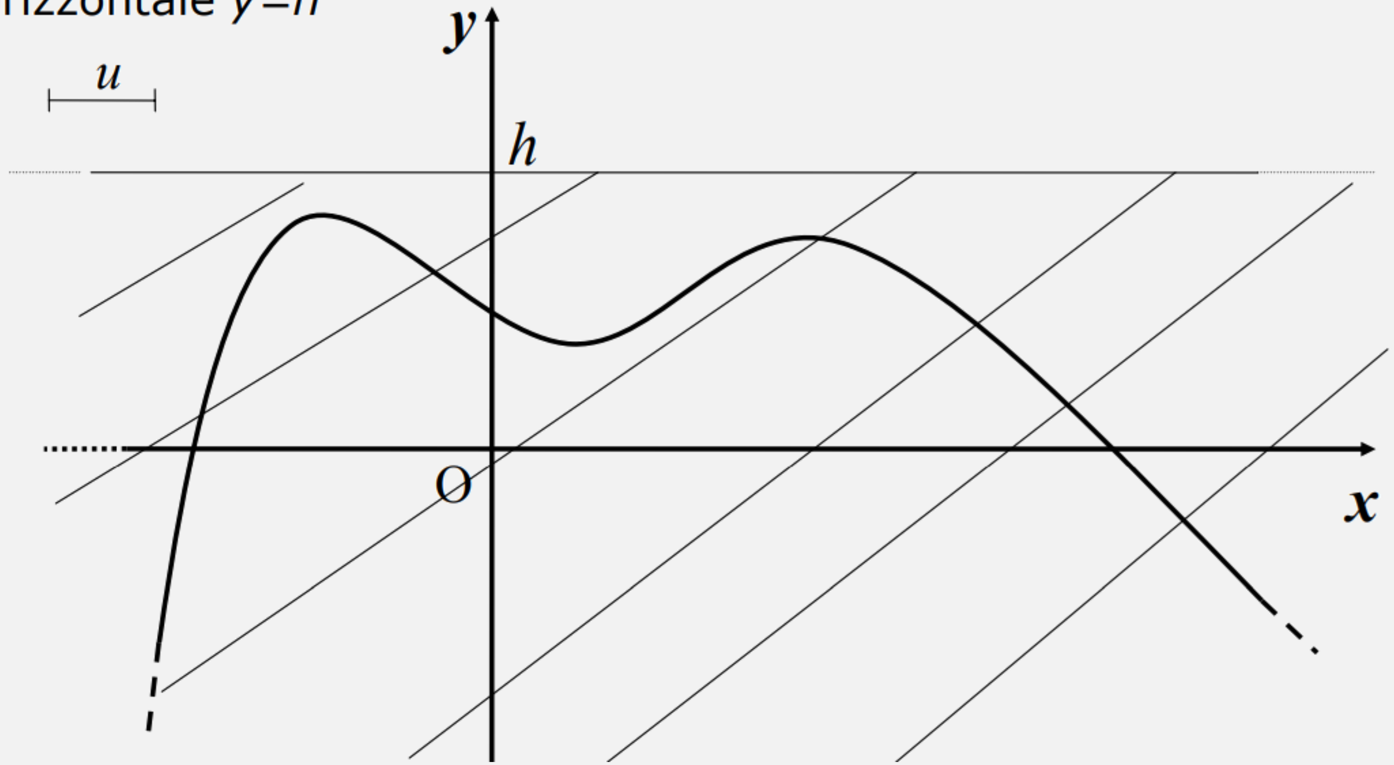
- si dice che f è limitata inferiormente se il suo insieme immagine $f(A)$ è limitato inferiormente e cioè se $f(A)$ ammette minoranti

- si dice che f è limitata se il suo insieme immagine $f(A)$ è limitato sia superiormente sia inferiormente e cioè se $f(A)$ ammette maggioranti e minoranti

Funzione limitata superiormente

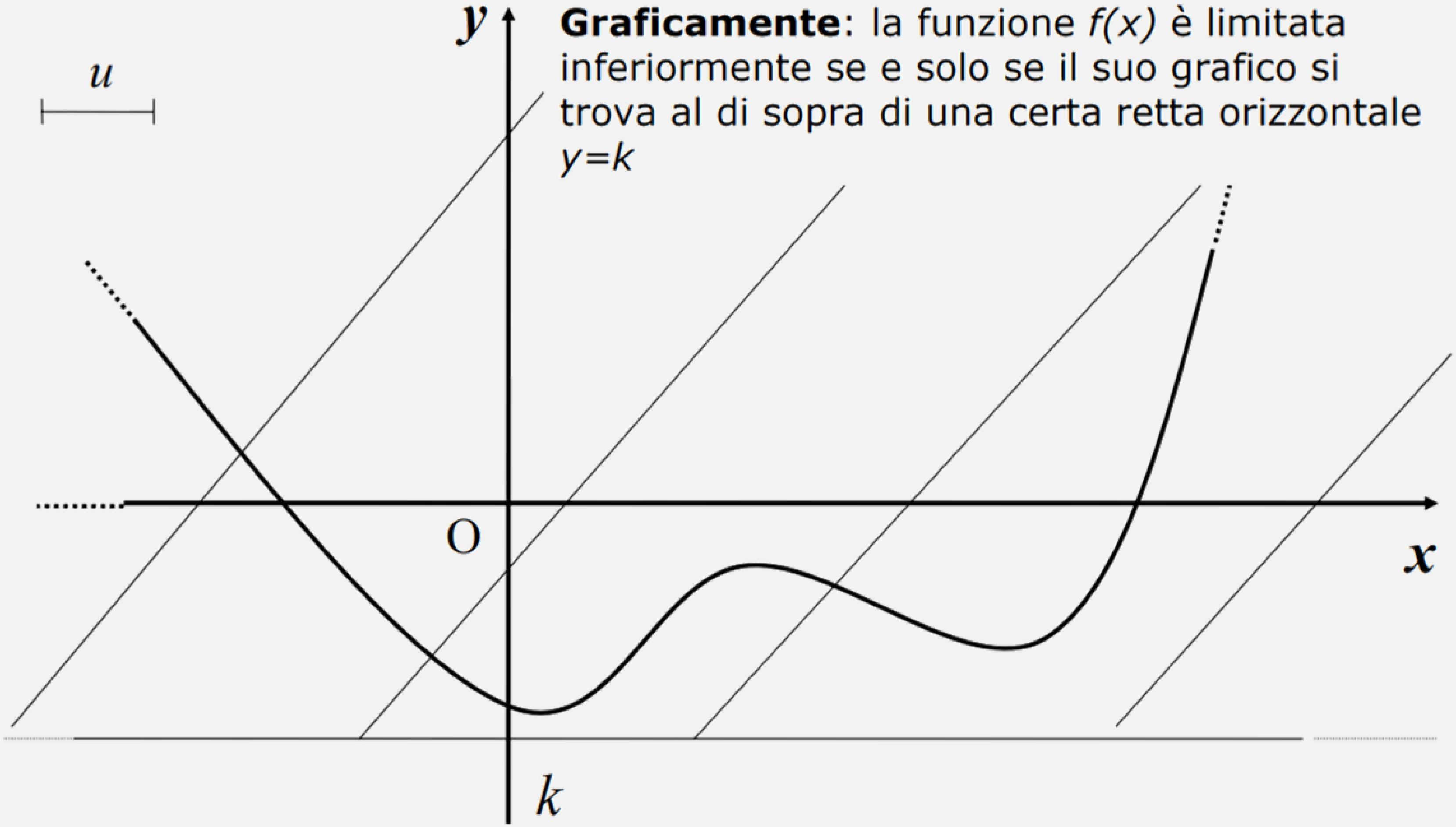
$$f \textit{ limitata superiormente } \Leftrightarrow \exists\, h \in \mathbb{R} : f(x) \leq h, \forall x \in A$$

Graficamente: la funzione *f(x)* è limitata superiormente se e solo se il suo grafico si trova al di sotto di una certa retta orizzontale *y=h*



Funzione limitata inferiormente

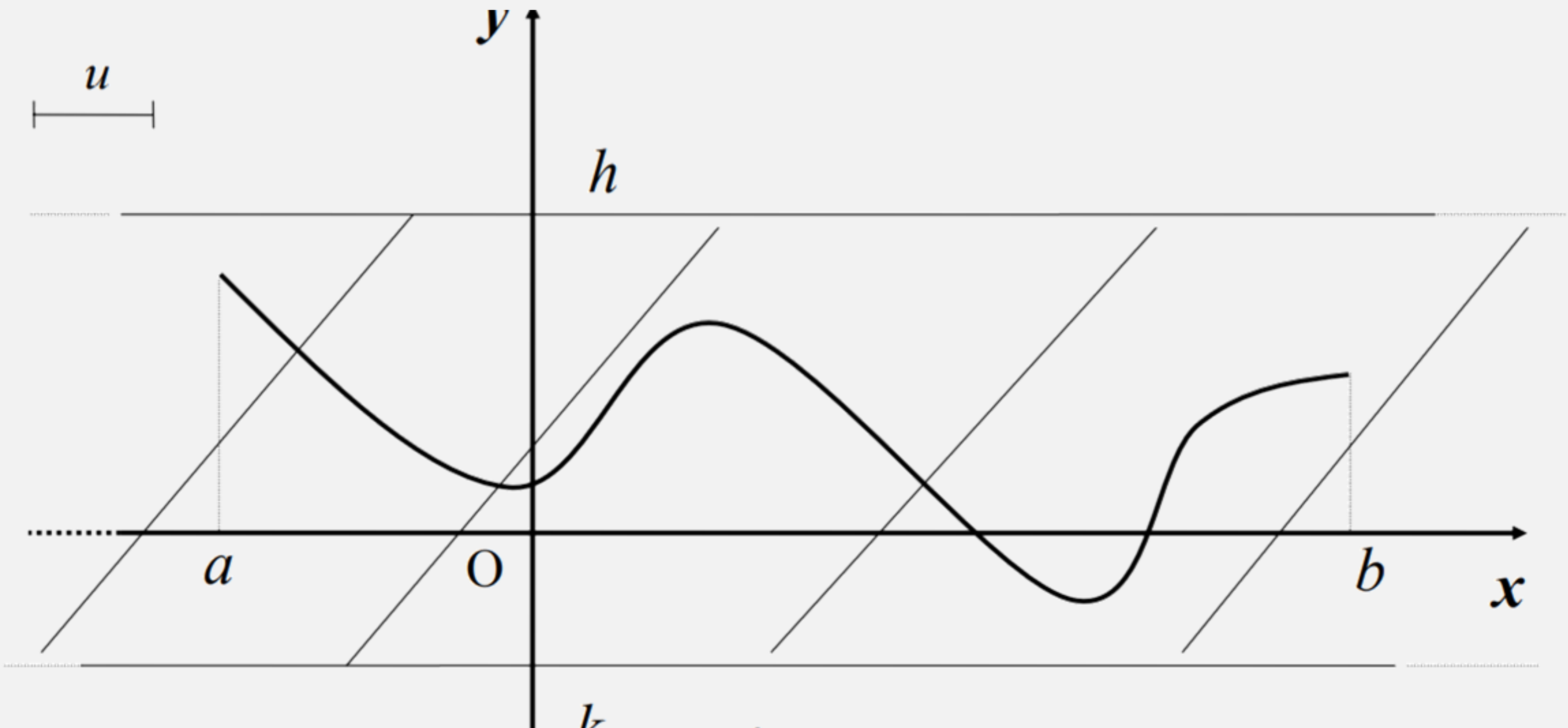
$$f\ limitata\ inferiormente \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : f(x) \geq k, \forall x \in A$$



Graficamente: la funzione *f(x)* è limitata inferiormente se e solo se il suo grafico si trova al di sopra di una certa retta orizzontale *y=k*

Funzione limitata

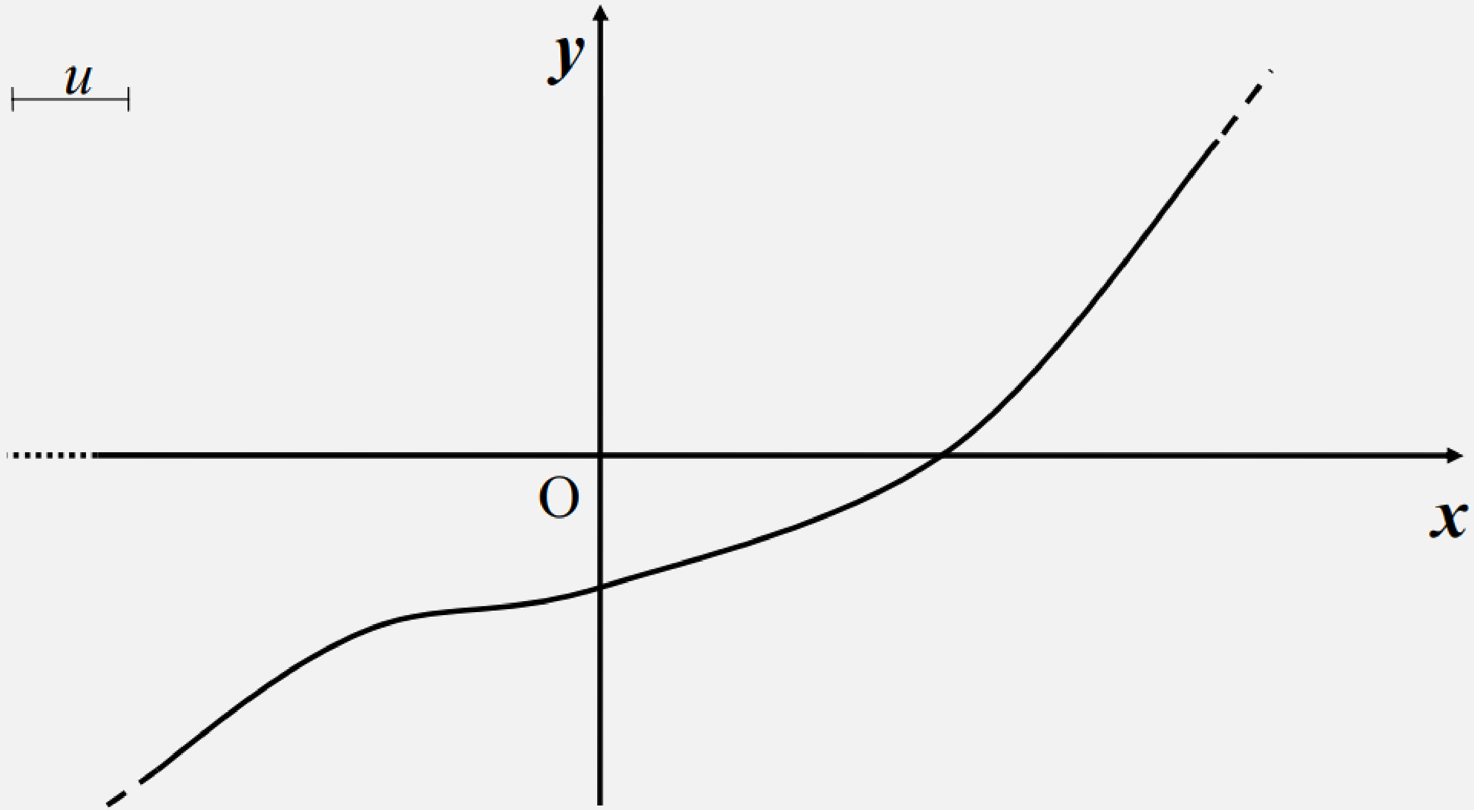
$$f \; limitata \iff \exists h, k \in \mathbb{R} : k \leq f(x) \leq h, \forall x \in A$$



Graficamente: la funzione *f(x)* è limitata se e solo se il suo grafico si trova nella striscia di piano compresa fra due rette orizzontali *y=k* e *y=h*

Funzione non limitata

Una funzione non limitata è una funzione il cui insieme immagine non ammette né maggioranti né minoranti



Estremo superiore

Sia data una funzione

$$f : A \to B, \qquad con\, A, B \subseteq \mathbb{R}, \qquad A, B \neq \emptyset$$

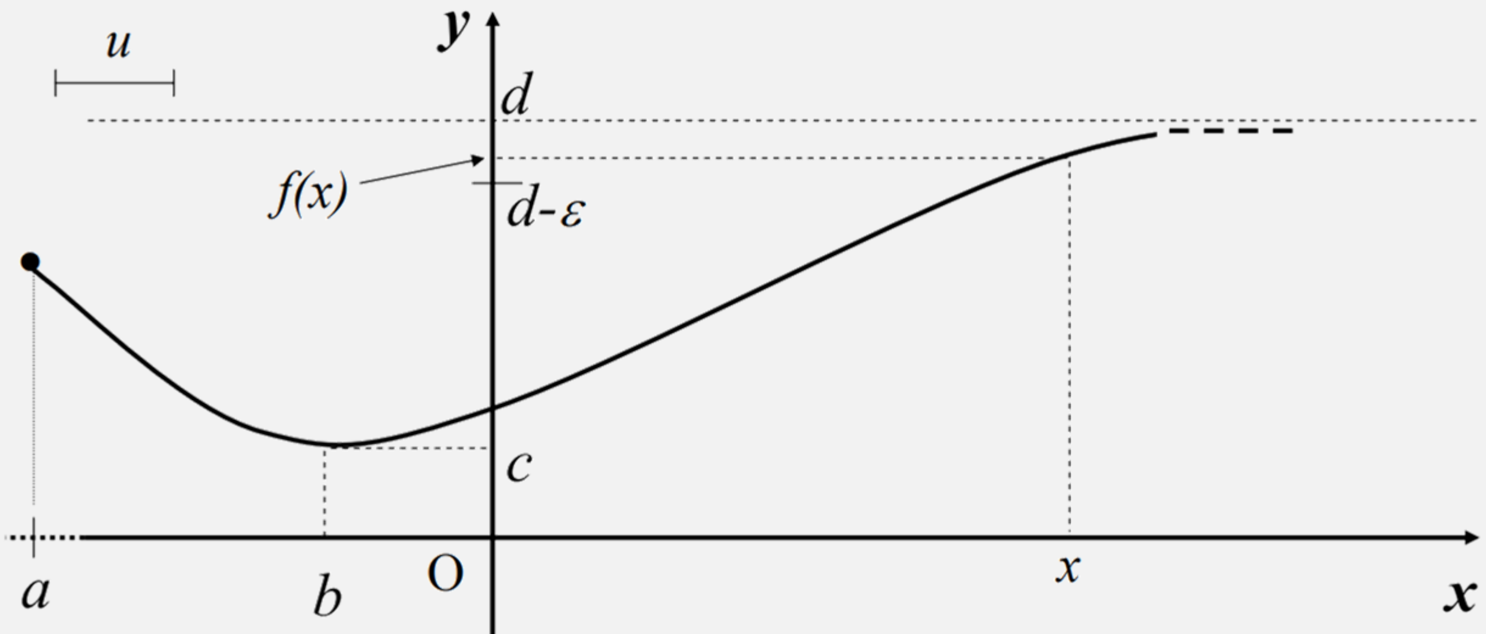
limitata superiormente ($\Rightarrow$ il suo codominio $f(A)$ ammette maggioranti).

Si dice che M è l'**estremo superiore** di f se è l'estremo superiore di $f(A)$:

$$M = \sup f \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, f(x) \leq M \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : M - \varepsilon < f(x) \end{cases}$$

Se f non è limitata superiormente, allora: $\sup f = +\infty$

Esercizio. Dal grafico, dedurre dominio, codominio, estremo superiore.



$$A = [a, +\infty);\ f(A) = [c, d)$$

$$\sup f = d;$$

Estremo inferiore

Sia data una funzione

$$f : A \to B, \qquad con\ A, B \subseteq \mathbb{R}, \qquad A, B \neq \emptyset$$

limitata inferiormente ($\Rightarrow$ il suo codominio $f(A)$ ammette minoranti).

Si dice che m è l'**estremo inferiore** di f se è l'estremo inferiore di $f(A)$:

$$m = \inf f \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, f(x) \geq m \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : m + \varepsilon > f(x) \end{cases}$$

Se f non è limitata inferiormente, allora: $\inf f = -\infty$

Massimo assoluto

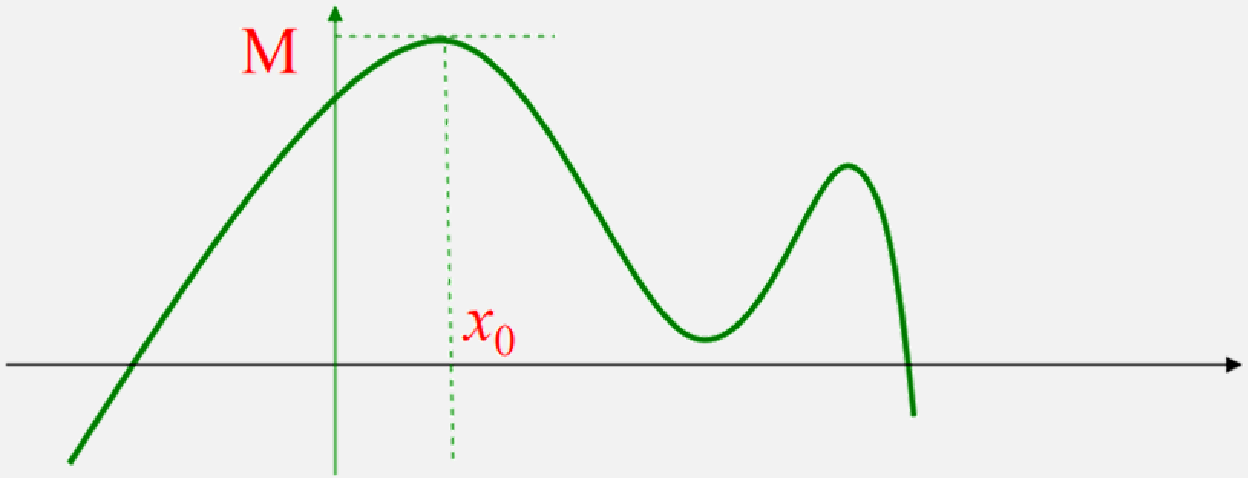
Sia data una funzione

$$f : A \to B, \qquad con\ A, B \subseteq \mathbb{R}, \qquad A, B \neq \emptyset$$

Si dice che il numero reale M è il **massimo assoluto** di f se M è un valore appartenente all'immagine di f e se è il più grande valore:

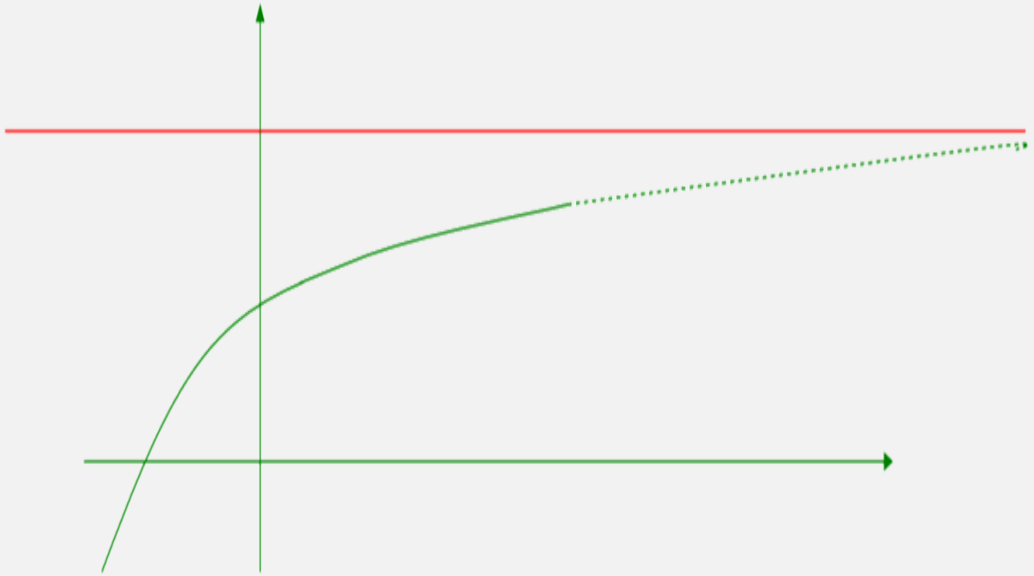
$$M = \max f \Leftrightarrow \begin{cases} \exists x_0 \in A : f(x_0) = M \\ \forall x \in A, f(x) \leq M \end{cases}$$

Con x_0 **punto di massimo assoluto**



Massimo assoluto

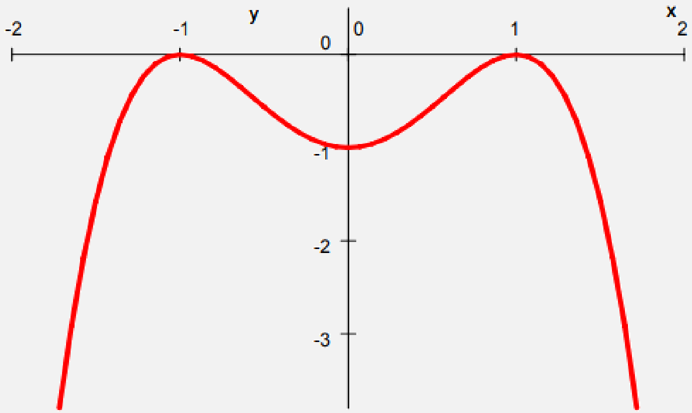
- Il massimo di una funzione, se esiste, è il valore massimo assunto dalla funzione
- Se una funzione ammette massimo assoluto, essa è limitata superiormente
- Se una funzione è limitata superiormente essa ammette estremo superiore, non necessariamente massimo assoluto
- Una funzione può avere più punti di massimo



$$f(x) = -(x-1)^2(x+1)^2$$

$$M = 0$$

$$x_0 = 1; \quad x_1 = -1$$



Minimo assoluto

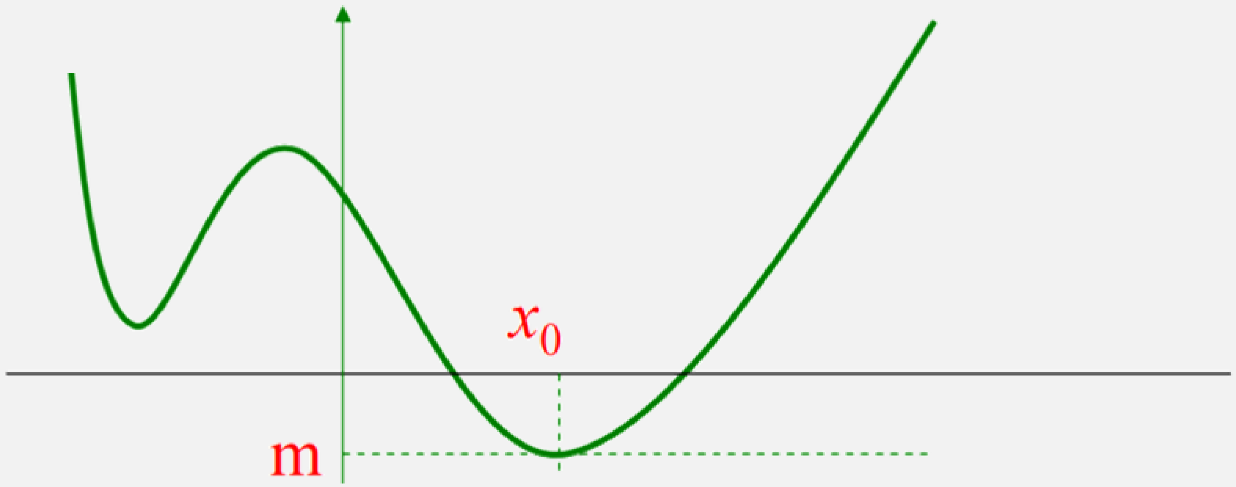
Sia data una funzione

$$f : A \to B, \qquad con\ A, B \subseteq \mathbb{R}, \qquad A, B \neq \emptyset$$

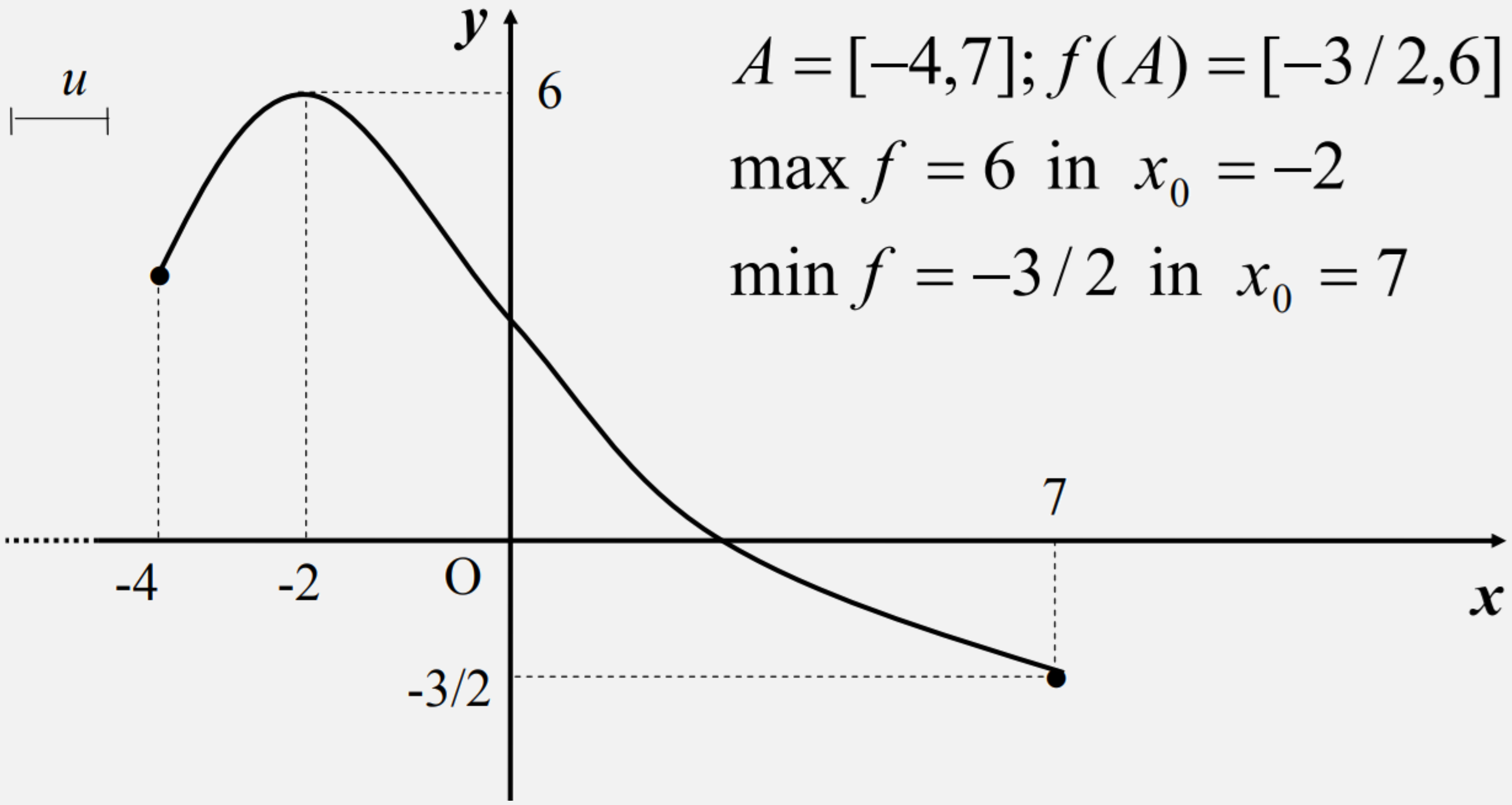
Si dice che il numero reale m è il **minimo assoluto** di f se m è un valore appartenente all'immagine di f e se è il più grande valore:

$$m = \min f \Leftrightarrow \begin{cases} \exists x_0 \in A : f(x_0) = m \\ \forall x \in A, f(x) \geq m \end{cases}$$

Con x_0 **punto di minimo assoluto**



Esercizio. Dal grafico, dedurre dominio, codominio, massimo e minimo.



$$A = [-4,7]; f(A) = [-3/2,6]$$

$$\max f = 6 \text{ in } x_0 = -2$$

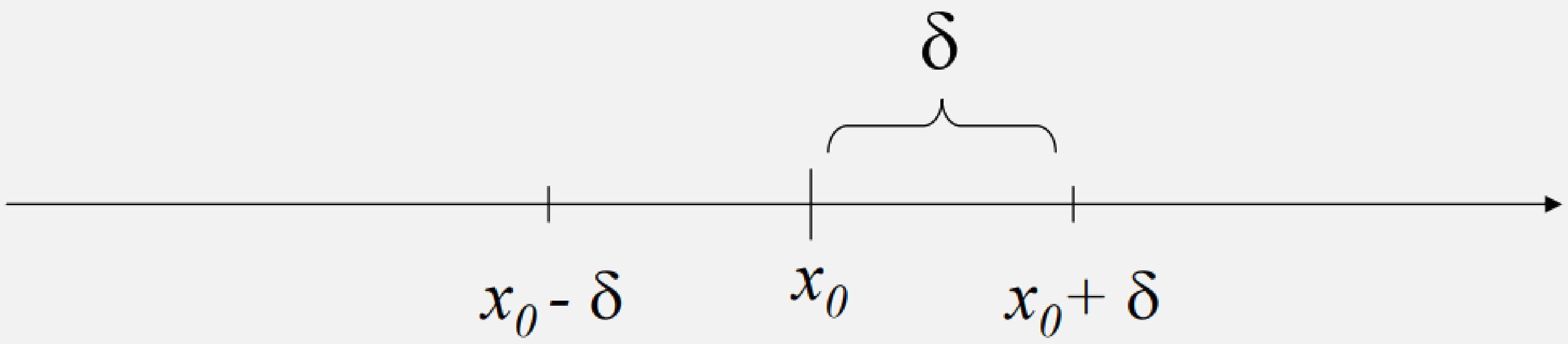
$$\min f = -3/2 \text{ in } x_0 = 7$$

Intorno

Fissato un punto x_0 sull'asse reale, si definisce **intorno** $\boldsymbol{I_{x0}}$ del punto x_0 un intervallo aperto contenente x_0.

Solitamente, detta δ la semi-ampiezza di tale intervallo, l'intorno si indica come segue:

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$



Massimo relativo

Sia data una funzione

$$f : A \to B, \qquad con\ A, B \subseteq \mathbb{R}, \qquad A, B \neq \emptyset$$

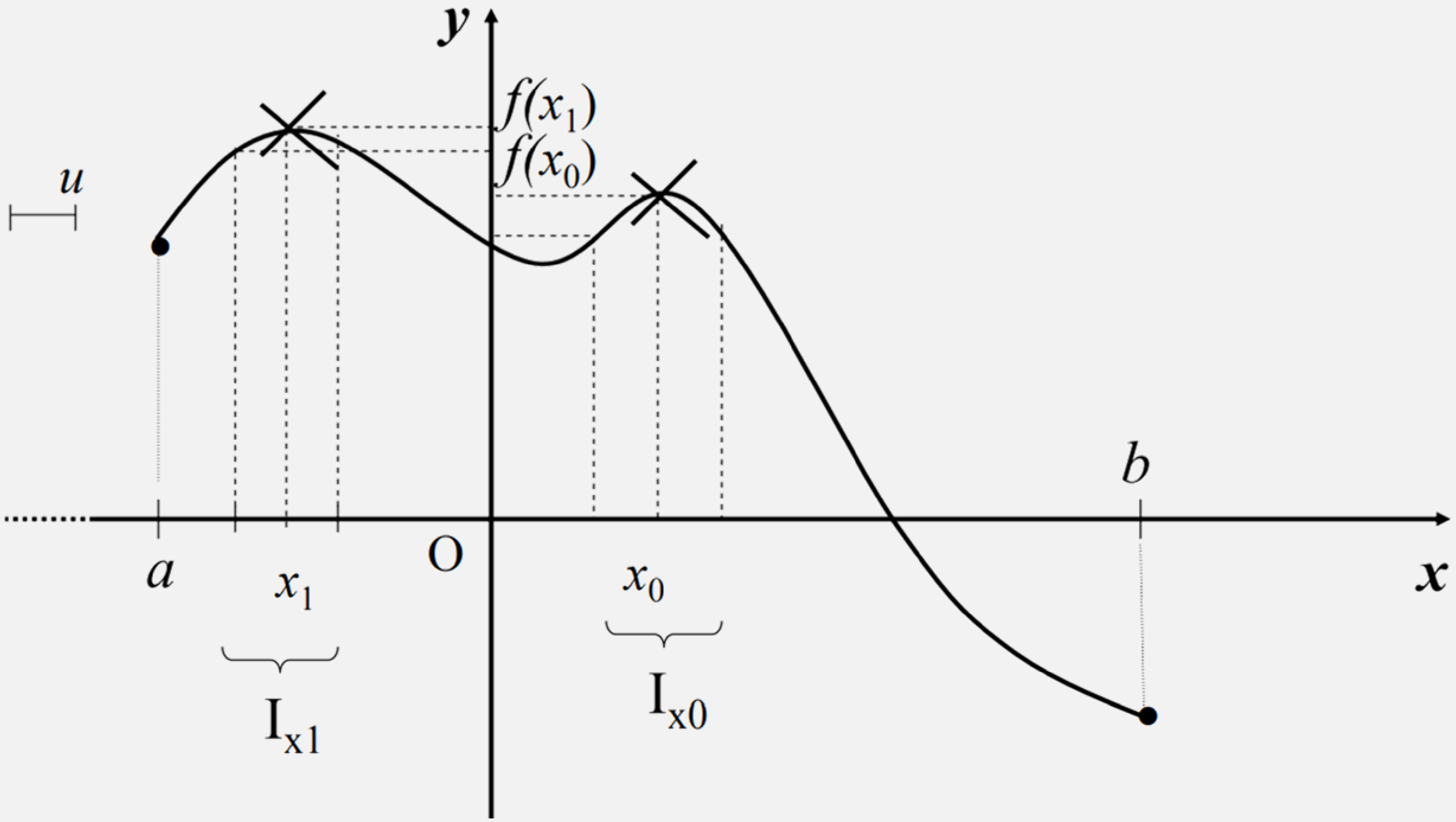
Dato un punto x_0 di A, si dice che $L = f(x_0)$ è un **massimo relativo** per f se:

$$\exists\ intorno\ I_{x0}\ tale\ che$$

$$\forall x \in I_{x0} \cap A, f(x) \leq L$$

Con x_0 **punto di massimo relativo**

Massimo relativo



Minimo relativo

Sia data una funzione

$$f : A \to B, \qquad con\ A, B \subseteq \mathbb{R}, \qquad A, B \neq \emptyset$$

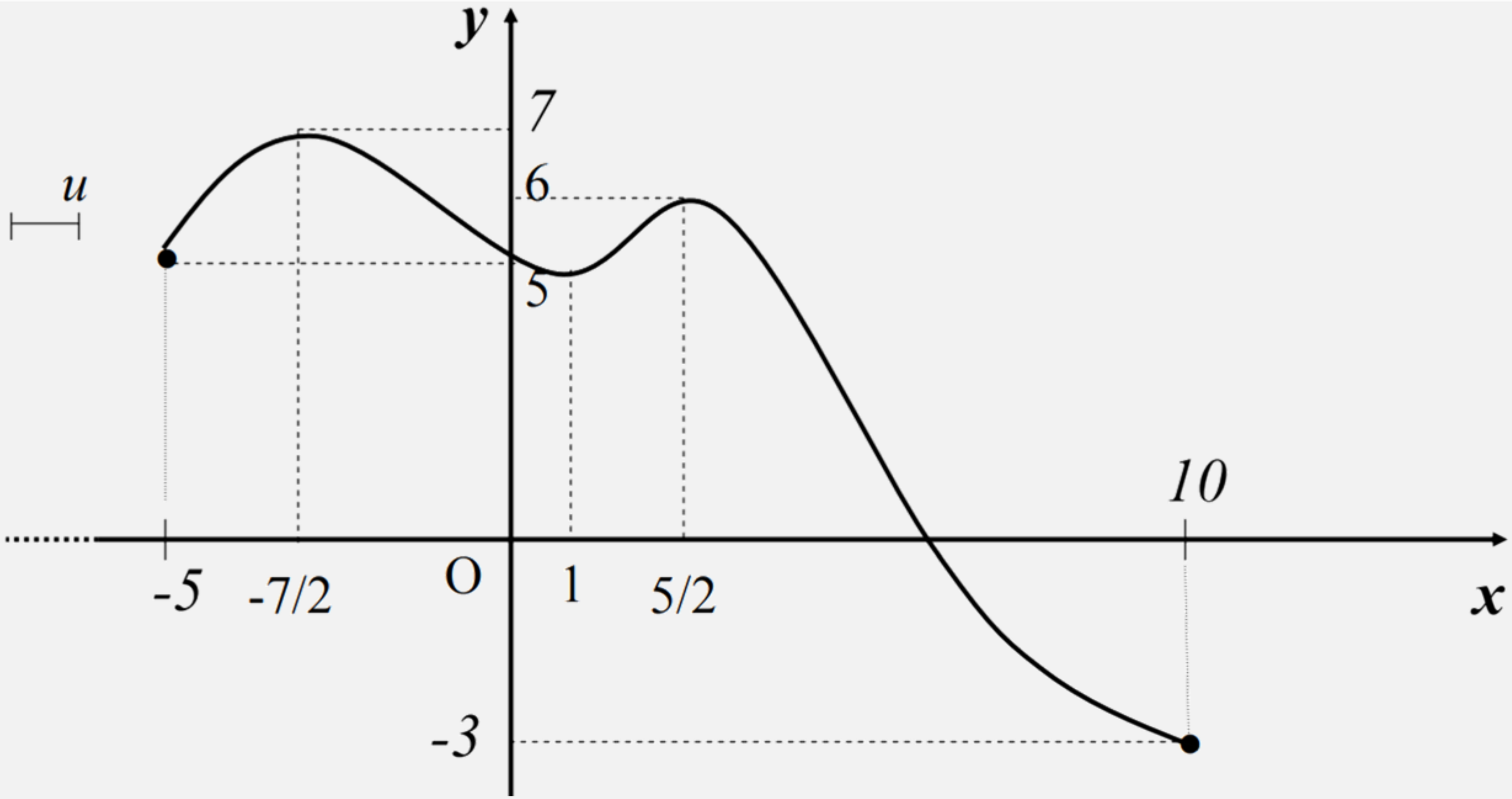
Dato un punto x_0 di A, si dice che $l = f(x_0)$ è un **minimo relativo** per f se:

$$\exists\ intorno\ I_{x0}\ tale\ che$$

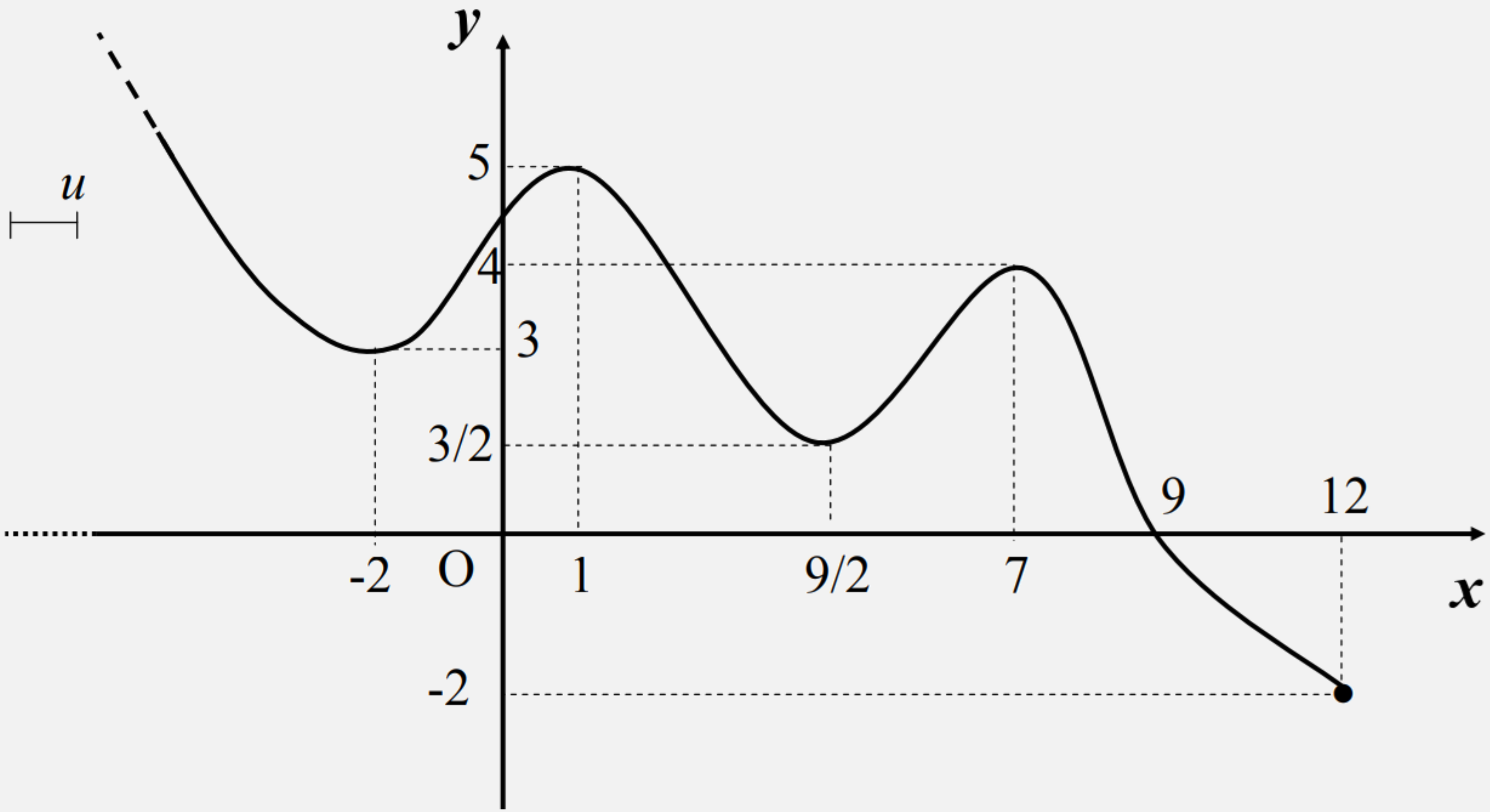
$$\forall x \in I_{x0} \cap A, f(x) \geq l$$

Con x_0 **punto di minimo relativo**

Esercizio. Dal grafico di f dedurre dominio, immagine, massimo (rel e ass), minimo (rel e ass), estremo superiore e inferiore di f, i valori $f(0)$ e $f(10)$ e i valori x tali che $f(x) = 5$.



Esercizio. Dal grafico di f dedurre dominio, immagine, massimo (rel e ass), minimo (rel e ass), estremo superiore e inferiore di f, i valori $f(-2)$ e $f(9/2)$ e i valori x tali che $f(x) = 0$.



Funzioni monotone – crescenti

Sia data una funzione

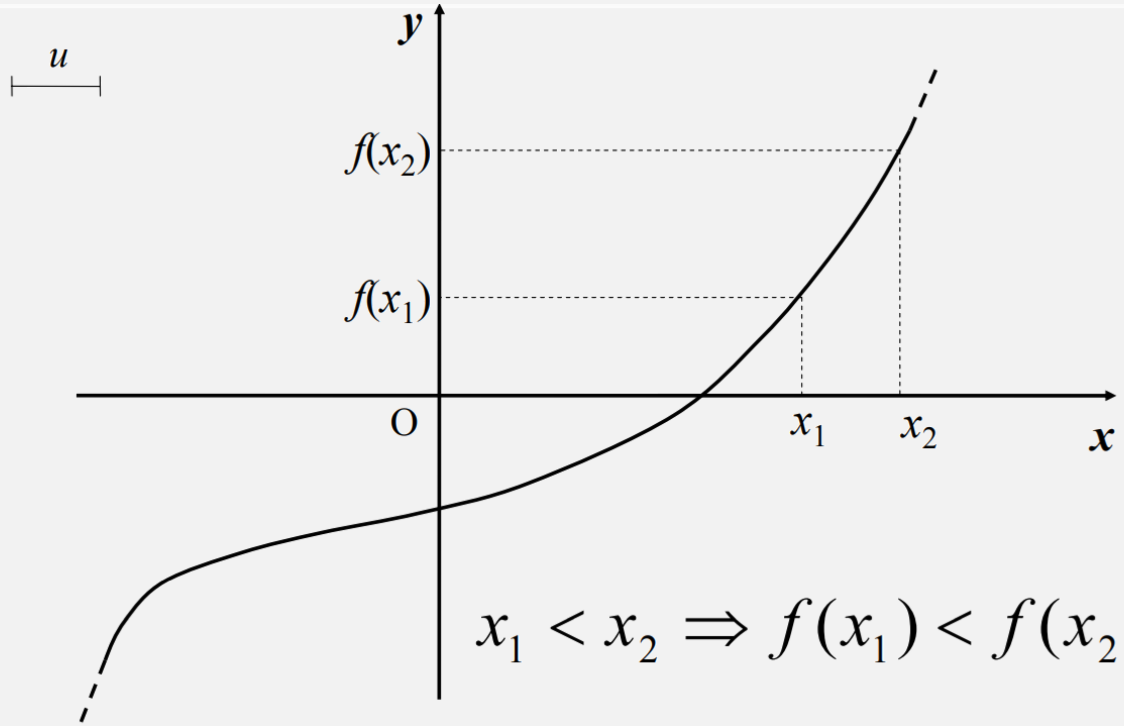
$f : A \to B, \qquad con\ A, B \subseteq \mathbb{R}, \qquad A, B \neq \emptyset$

Si dice che f è **strettamente crescente** in A se:

$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Si dice che f è **crescente** in A se:

$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$



$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Funzioni monotone – decrescenti

Sia data una funzione

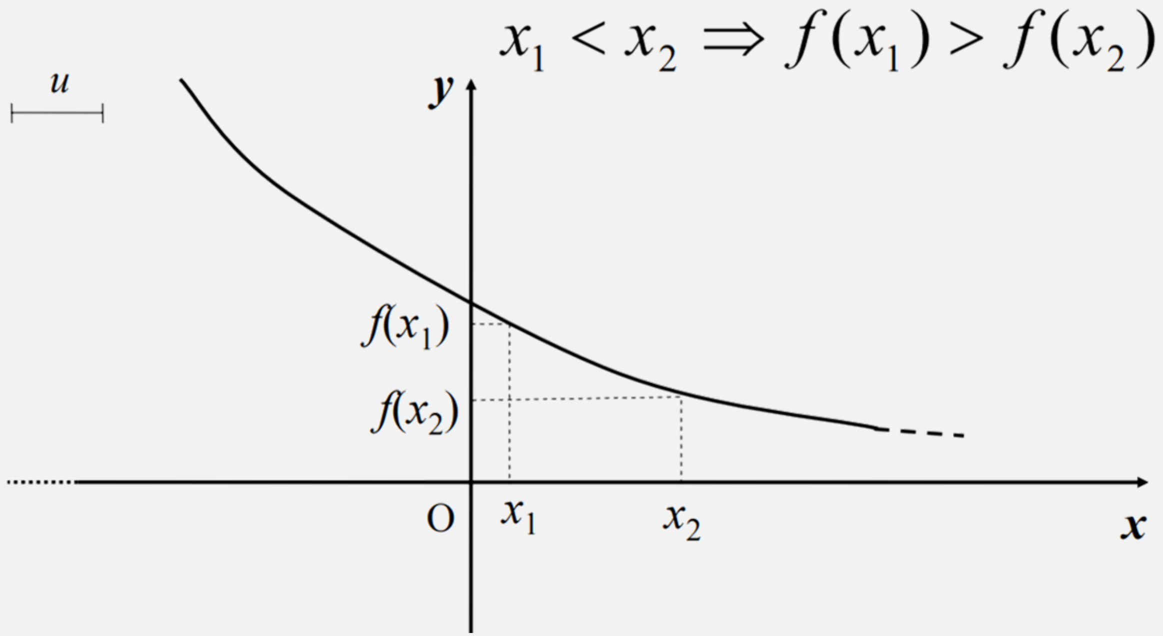
$f : A \to B, \qquad con\ A, B \subseteq \mathbb{R}, \qquad A, B \neq \emptyset$

Si dice che f è **strettamente decrescente** in A se:

$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Si dice che f è **decrescente** in A se:

$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$



Funzioni monotone

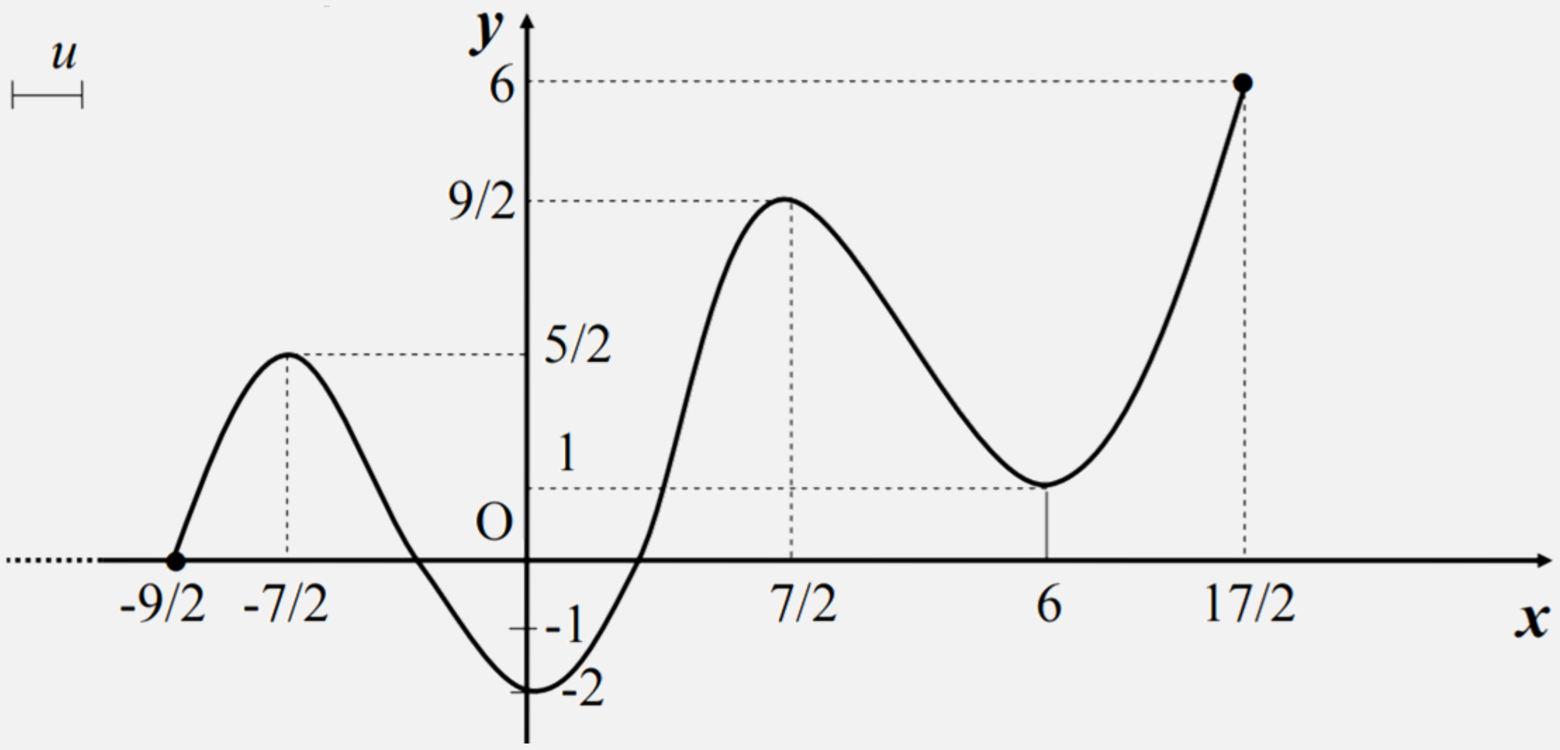
Sia data una funzione

$$f : A \to B, \qquad con\, A, B \subseteq \mathbb{R}, \qquad A, B \neq \emptyset$$

Si dice che f è **monotona** se è strettamente crescente, crescente, strettamente decrescente o decrescente

ATTENZIONE La nozione di funzione crescente o decrescente è sempre associata all'informazione di quale sia l'intervallo del dominio in cui la funzione stessa ha quel comportamento.

Esempio. Dal grafico di f dedurre dominio, codominio, monotonia



Funzione positiva/negativa, zero

Sia data una funzione

$$f : A \to B, \qquad con\, A, B \subseteq \mathbb{R}, \qquad A, B \neq \emptyset$$

Si dice che f è **positiva** in A se:

$$\forall x \in A \Rightarrow f(x) > 0$$

Si dice che f è **negativa** in A se:

$$\forall x \in A \Rightarrow f(x) < 0$$

Si dice che un punto x_0 è **uno zero** di f in A se:

$$f(x_0) = 0$$

Esempio. Dal grafico di f dedurre dominio, estremi e segno