- **ELEMENTI DI INSIEMISTICA**

Insieme:

è una collezione, un raggruppamento, una famiglia di oggetti, detti **elementi**

Notazioni:

- Gli insiemi si indicano con lettera maiuscole $(A, B, C, \ldots)$
- Gli elementi che fanno parte degli insiemi si indicano con lettere minuscole $(a, b, c, \ldots)$

- $a \in A$ significa: a <u>appartiene a</u> A
- $a \notin A$ significa: a <u>non appartiene a</u> A

- <u>Cardinalità di un insieme</u>: numero dei suoi elementi

Rappresentazioni degli insiemi

Per descrivere e precisare quali siano gli elementi di un insieme si possono utilizzare varie rappresentazioni:

- Rappresentazione tabulare
- Rappresentazione grafica
- Rappresentazione caratteristica

Rappresentazione tabulare

La rappresentazione tabulare di un insieme consiste nello scriverne, quando è possibile, tutti gli elementi entro parentesi graffe.

Esempio. Consideriamo l'insieme A costituito dai numeri 1 e 0. Allora la rappresentazione tabulare dell'insieme A è la seguente :

$$A = \{1,0\} \; oppure \; A = \{0,1\}$$

Notiamo che l'ordine in cui si elencano gli elementi di un insieme è irrilevante

Esempio. Consideriamo l'insieme B costituito dalle cifre del numero 2211. Allora la rappresentazione tabulare dell'insieme B è la seguente :

$$B = \{2,1\} \; oppure \; B = \{1,2\}$$

Notiamo che la molteplicità non viene considerata nella descrizione tabulare di un insieme: non ha senso "contare due volte" un elemento di un insieme.

Rappresentazione tabulare

La rappresentazione tabulare di un insieme consiste nello scriverne, quando è possibile, tutti gli elementi entro parentesi graffe.

Esempio. Consideriamo L'insieme B formato dalle vocali dell'alfabeto italiano ha la seguente rappresentazione tabulare:

$$B = \{a, e, i, o, u\}$$

Esempio. L'informazione genetica è nel DNA. Ogni molecola di DNA ha una struttura a doppia elica, ed ogni elica è una catena di strutture chimiche che contengono basi azotate. Le basi azotate del DNA sono 4: adenina (A), citosina (C), guanina (G), timina (T)

$$A_{DNA} = \{A, C, G, T\}$$

Rappresentazione tabulare

La rappresentazione tabulare di un insieme consiste nello scriverne, quando è possibile, tutti gli elementi entro parentesi graffe.

Insieme finito *vs* insieme infinito

Un insieme infinito è intuitivamente un insieme che non contiene un numero finito di elementi.

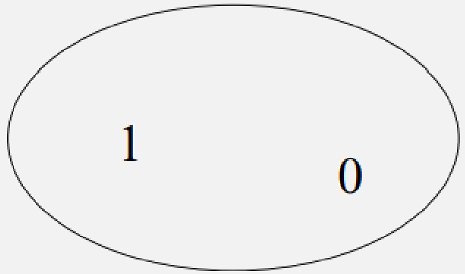
Di un insieme finito è possibile scriverne la rappresentazione tabulare e tale scrittura ha termine.

Rappresentazione grafica

La rappresentazione grafica di un insieme consiste nel racchiudere i suoi elementi in una linea chiusa

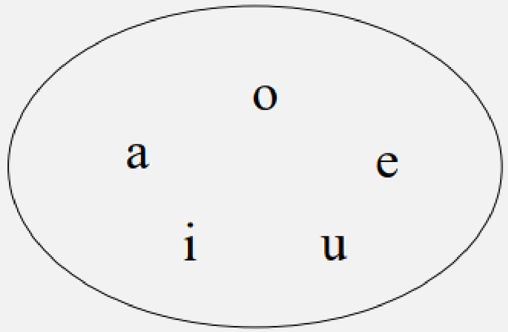
Esempio. L'insieme A costituito dalle cifre del numero 1 e 0 ha la seguente rappresentazione grafica

A



Esempio. L'insieme B formato dalle vocali dell'alfabeto italiano ha la seguente rappresentazione grafica:

B



Rappresentazione caratteristica

La rappresentazione caratteristica di un insieme consiste nel caratterizzare i suoi elementi con una proprietà comune detta appunto **proprietà caratteristica**.

- Descrivo un insieme come una famiglia di elementi verificanti una certa proprietà (predicato)

Esempio. L'insieme A costituito dalle cifre del numero 1 e 0 ha la seguente rappresentazione caratteristica

$$A = \{numeri\ interi\ compresi\ tra\ 0\ e\ 1\} =$$

$$\{x : numeri\ interi\ e\ 0 \le x \le 1\}$$

Esempio. L'insieme B formato dalle vocali dell'alfabeto italiano ha la seguente rappresentazione caratteristica:

$$A = \{vocali\ dell'alfabeto\ italiano\} =$$

$$\{x : x\ vocale\ dell'alfabeto\ italiano\}$$

Rappresentazione caratteristica

La rappresentazione caratteristica di un insieme consiste nel caratterizzare i suoi elementi con una proprietà comune detta appunto **proprietà caratteristica**.

- Descrivo un insieme come una famiglia di elementi verificanti una certa proprietà (predicato)

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ → considero l'insieme come collezione di tutti gli elementi che appartengono a un certo insieme più grande (insieme ambiente), per i quali vale una certa proprietà:

$$\mathbb{N} = \{x : x \in E \ e \ verifica\, \mathcal{P}(x)\} \quad o \quad \mathbb{N} = \{x \in E : x \ verifica\, \mathcal{P}(x)\} \quad o \quad \mathbb{N} = \{x \in E : \mathcal{P}(x) \text{ è } vera\}$$

Alcune definizioni

- **Insieme vuoto**: insieme privo di elementi (simbolo ∅)

- Due insiemi sono **uguali** quando sono costituiti dagli stessi elementi ($A = B$)
  → ogni elemento dell'uno è anche elemento dell'altro

- In caso contrario, gli insiemi si definiscono **diversi** ($A \neq B$)

- Se nessun elemento di A sta in B, si dice che A e B sono **disgiunti**

$$A = \{r, t\}, \qquad B = \{t, r\} \quad \rightarrow \quad A = B$$

$$A = \{a, b, c\}, \qquad B = \{a, d, e\} \quad \rightarrow \quad A \neq B$$

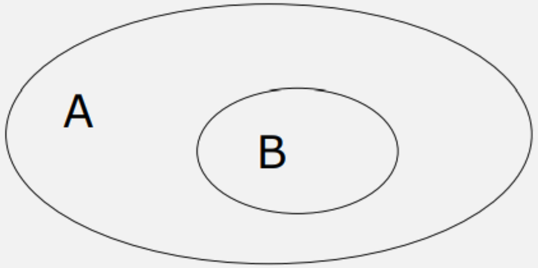
$$A = \{a, b, c\}, \qquad B = \{m, n, t\} \quad \rightarrow \quad A\ e\ B\ disgiunti$$

Inclusione fra insiemi: sottoinsiemi

Si dice che B è un **sottoinsieme** dell'insieme A se tutti gli elementi di B sono anche elementi di A e si scrive simbolicamente:

$$A \supseteq B \quad oppure \quad B \subseteq A$$

$$\forall x \in B, x \in A$$



Se esistono elementi di A che non appartengono ad B,
si dice che B è **incluso strettamente** in A :

$$A \supset B \quad oppure \quad B \subset A$$

$$\{x \in \mathbb{N} : x\ pari\} \subseteq \mathbb{N}\ , \{0,2\} \subset \{0,2,4,6\}$$

$$B \subsetneq A \quad significa \quad B \subset A \ \mathbf{e}\ B \neq A$$

Sottoinsiemi impropri e propri

- Ogni insieme non vuoto A **ha due sottoinsiemi detti** impropri**:** A stesso e $\emptyset$

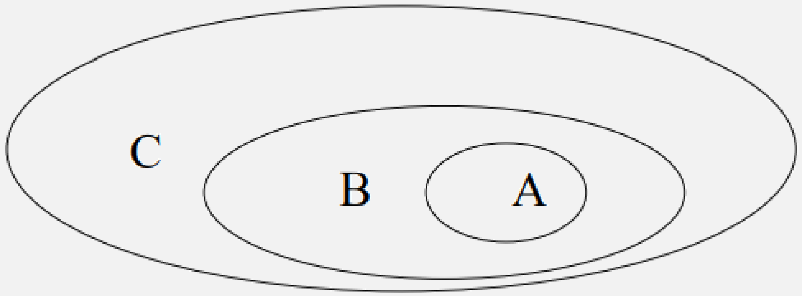
- Si definisce sottoinsieme proprio di un insieme A ogni suo sottoinsieme non vuoto e distinto da A

Osservazioni:

- Due insiemi A e B sono uguali se e solo se $B \subseteq A$ e $A \subseteq B$

- È facile dimostrare che:

$$A \subseteq B \ e \ B \subseteq C \ \Rightarrow A \subseteq C$$

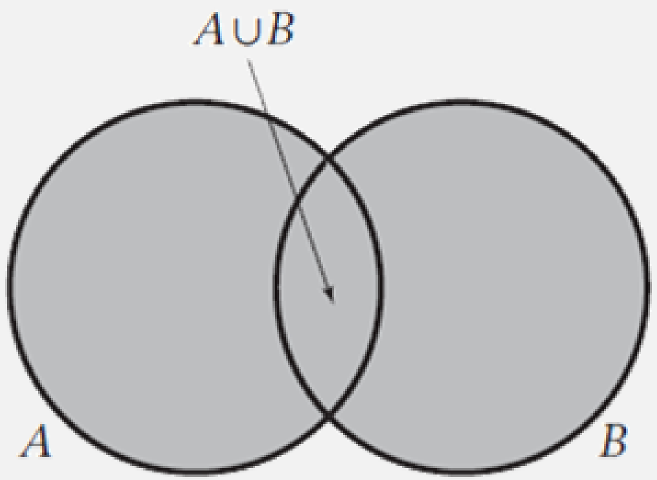


Operazioni su insiemi

A partire dagli insiemi A e B , si definisce:

- L'**insieme unione**, insieme formato dagli elementi che appartengono almeno ad A o B

$$A \cup B = \{x : x \in A \textbf{ o } x \in B\}$$



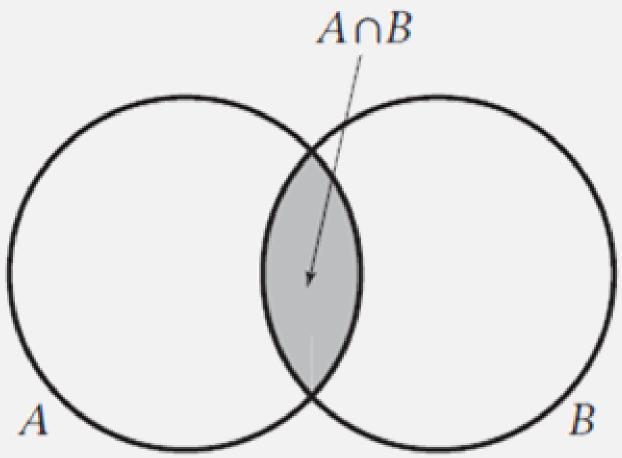
Operazioni su insiemi

A partire dagli insiemi A e B , si definisce:

- L'**insieme intersezione**, insieme formato dagli elementi comuni ad A e B

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ } \boldsymbol{e} \text{ } x \in B\}$$

- Se $A \cap B = \emptyset$ si dice che A e B sono **disgiunti**

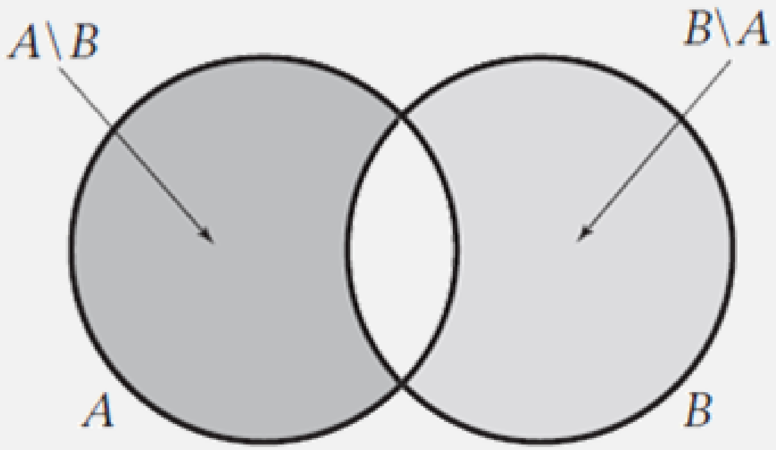


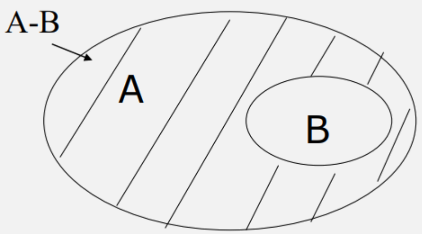
Operazioni su insiemi

A partire dagli insiemi A e B , si definisce:

- L'**insieme differenza**, insieme formato dagli elementi che appartengono ad A ma non a B

$$A - B = A\backslash \mathrm{B} = \{x : x \in A \ \boldsymbol{e} \ x \notin B\}$$





In particolare, se $B \subset A$, allora si usa la notazione:

$$B^C = A\backslash \mathrm{B} = \{x : x \in A \ \boldsymbol{e} \ x \notin B\}$$

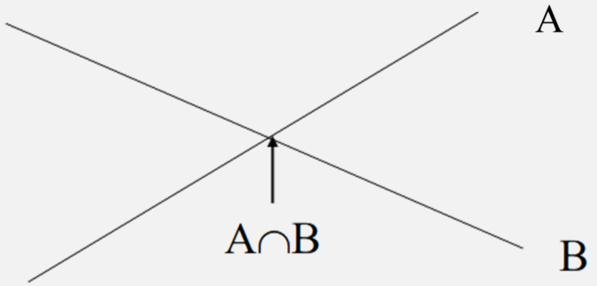
Dove B^C è l'**insieme complementare** di B (in A)

Operazioni su insiemi

Esempio. Se $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{a, d, f\}$ $\Rightarrow A \cap B = \{a, d\}$, $A \cup B = \{a, b, c, d, f\}$

Esempio. Se $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{1,3,5\}$ $\Rightarrow A \cap B = \{1,3\}$, $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$

Esempio. Se A e B sono due rette non parallele di uno stesso piano, allora $A \cap B$ è l'insieme formato dal loro punto di intersezione.
Se A e B fossero state due rette parallele, allora $A \cap B = \emptyset$



Esempio. Se $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{1,3\}$ $\Rightarrow A - B = \{2,4\}$

Proprietà delle operazioni su insiemi

Proprietà associative e commutative.

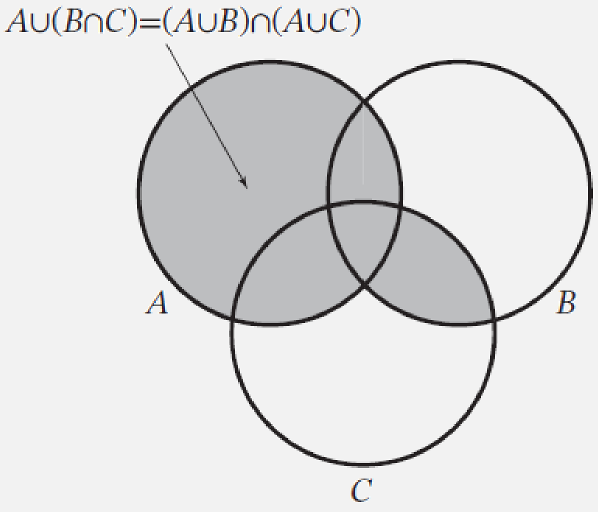
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \qquad A \cup B = B \cup A$$

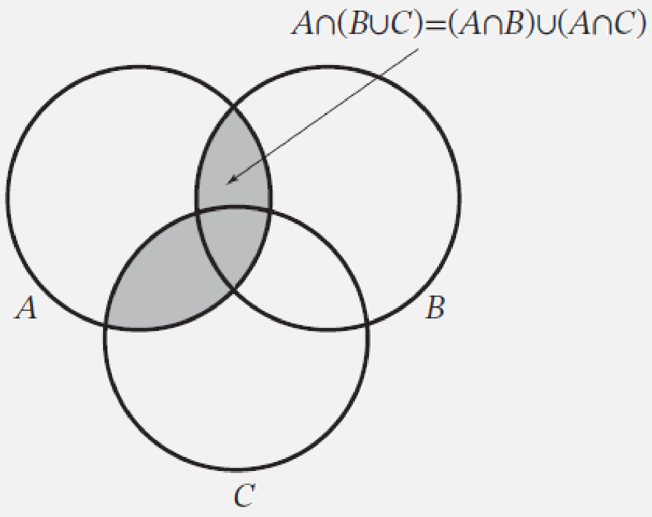
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, \qquad A \cap B = B \cap A$$

Proprietà distributive.

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$





Gli insiemi numerici

Indichiamo con:

$\mathbb{N} = \{0,1,2,3, \dots\}$ l'insieme dei **numeri naturali**

$\mathbb{N}^* = \{1,2,3, \dots\}$ l'insieme dei **numeri naturali diversi da 0**

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1,0,1,2, \dots\}$ l'insieme dei **numeri interi**

$\mathbb{Q} = \{\frac{n}{m} : n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0\}$ l'insieme dei **numeri razionali** (Un numero razionale, scritto in forma decimale, dopo la virgola può presentare un numero finito di cifre diverse da zero oppure un numero infinito di cifre diverse da zero che però si ripetono periodicamente)

$\mathbb{R}$ l'insieme dei **numeri reali** → costituito da tutti i numeri che, scritti in forma decimale, presentano dopo la virgola una successione qualsiasi di cifre diverse da zero, eventualmente anche infinita e non periodica

L'insieme $\mathbb{N}$

$\mathbb{N} = \{0,1,2,3, \dots\}$

In $\mathbb{N}$ è possibile stabilire una relazione d'ordine:

- Se esiste un numero naturale x che, sommato a $a \in \mathbb{N}$, fornisce il numero naturale b, allora a sarà minore di b $a \leq b$ (se $a \leq b$ e $a \neq b$, allora $a < b$)

- Analogamente, se a è maggiore di b $a \geq b$ (se $a \geq b$ e $a \neq b$, allora $a > b$)

Questa relazione d'ordine totale soddisfa le seguenti proprietà:

- $\forall n \in \mathbb{N}, n \leq n$ (proprietà **riflessiva**)
- $\forall n, m \in \mathbb{N}$, se $n \leq m$ e $m \leq n$, allora $n = m$ (proprietà **antisimmetrica**)
- $\forall n, m, p \in \mathbb{N}$, se $n \leq m$ e $m \leq p$, allora $n \leq p$ (proprietà **transitiva**)

L'insieme $\mathbb{N}$

$\mathbb{N} = \{0,1,2,3, \dots\}$

- Sommando e moltiplicando numeri naturali, si ottengono numeri naturali
- Il numero 0 rappresenta l'elemento neutro per la somma in $\mathbb{N}$:
$$\forall n \in \mathbb{N}, n + 0 = n, 0 + n = n$$
- Il numero 1 rappresenta l'elemento neutro per la moltiplicazione in $\mathbb{N}$:
$$\forall n \in \mathbb{N}, n \cdot 1 = n, 1 \cdot n = n$$

L'insieme $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1,0,1,2,3, \dots\}$

Formalmente, dati $a, b \in \mathbb{N}$, l'equazione $a + x = b$ può non essere risolvibile in $\mathbb{N}$
Occorre quindi ampliare l'insieme $\mathbb{N}$, definendo $\mathbb{Z}$

- In $\mathbb{Z}$ sussiste la stessa relazione d'ordine
- In $\mathbb{Z}$ si mantiene lo 0 come elemento neutro per la somma
- La soluzione di $a + x = 0$ con $a \in \mathbb{N}$, verrà denotata con $-a$ → l'elemento che sommato ad a fornisce 0, si chiama **opposto** di a

L'insieme $\mathbb{Z}$

Le principali proprietà delle operazioni aritmetiche in $\mathbb{Z}$:

- $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}, (a + b) + c = a + (b + c)$ (proprietà **associativa** della somma)
- $\forall a, b \in \mathbb{Z}, a + b = b + a$ (proprietà **commutativa** della somma)
- $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}, a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (proprietà **distributiva**)
- $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (proprietà **associativa** del prodotto)
- $\forall a, b \in \mathbb{Z}, a \cdot b = b \cdot a$ (proprietà **commutativa** del prodotto)

L'insieme $\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q} = \{\frac{n}{m} : n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0\}$

Proviamo ad invertire l'operazione di moltiplicazione in $\mathbb{Z}$.
Consideriamo per $a, b \in \mathbb{Z}$ l'equazione $ax = b$, con $a \neq 0$
Questa equazione ha soluzione in $\mathbb{Z}$ se e solo se b è multiplo di a

Occorre quindi ampliare l'insieme $\mathbb{Z}$, definendo $\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}$ è l'insieme delle coppie (n, m) con $n, m \in \mathbb{Z}$ e $m \neq 0$.

- Per ogni $x \in \mathbb{Q}, x \neq 0$ esiste un elemento, denotato come $1/x \in \mathbb{Q}$ tale che $x \cdot \left(\frac{1}{x}\right) = 1$.
  Tale elemento prende il nome di **reciproco o inverso** di x

L'insieme $\mathbb{R}$

Le proprietà più importanti dell'insieme $\mathbb{R}$:

1. Le operazioni aritmetiche, con le loro proprietà e definite sui numeri razionali, si estendono ai numeri reali
2. La relazione d'ordine $x \leq y$ dei numeri razionali si estende ai reali co analoghe proprietà. Definendo $\mathbb{R}_+$ e $\mathbb{R}_-$ come i sottoinsiemi dei numeri reali positivi e negativi, avremo che:
$$\mathbb{R} = \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}_-$$
Quindi formalmente potremo scrivere:
$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}, \qquad x < y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{R}_+$$

   Altre proprietà della relazione d'ordine:
   - $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x < y \Rightarrow x + z < y + z$
   - $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x < y, z > 0 \Rightarrow x \cdot z < y \cdot z$
   - $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x < y, z < 0 \Rightarrow x \cdot z > y \cdot z$
   - $\forall x, y \in \mathbb{R}, 0 < x < y \Rightarrow 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$
3. L'insieme dei numeri reali è completo: a ogni punto della retta reale può essere associato uno e un solo numero reale

L'insieme $\mathbb{R}$

Proprietà delle operazioni sui numeri reali:

1. Proprietà associativa $(a+b)+c = a+(b+c)$
2. Proprietà commutativa $a+b = b+a$
3. Proprietà distributiva $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$
4. Esistenza degli elementi neutri: 0 e 1
5. Esistenza degli opposti: $a \ \rightarrow \ -a$
6. Esistenza degli inversi: $a \ \rightarrow \ a^{-1} = 1/a$
7. Dicotomia: per ogni coppia di numeri reali a e b si ha $a \leq b$ oppure $b \leq a$
8. Proprietà asimmetrica: se valgono contemporaneamente le relazioni $a \leq b$ e $a \leq b$, allora $a = b$
9. Assioma di completezza: Siano A e B due insiemi non vuoti di numeri reali con la proprietà che $a \leq b$, comunque si scelgano un elemento a di A ed un elemento b di B. Allora esiste almeno un numero reale c tale che $a \leq c \leq b$, qualunque siano a in A e b in B.

Gli insiemi numerici

Tra gli insiemi numerici valgono le seguenti inclusioni (strette):

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$$

Tali inclusioni sono strette:

- Esistono infatti numeri interi che non sono naturali (i numeri negativi),
- Esistono numeri razionali che non sono interi (le frazioni proprie),
- Esistono numeri reali che non sono razionali (i numeri irrazionali)

In $\mathbb{N}$ non esiste opposto e inverso di alcun numero → in $\mathbb{N}$ si possono eseguire le operazioni di addizione e moltiplicazione ma non è in genere possibile eseguire le operazioni inverse di sottrazione e divisione

Escluso 1, in $\mathbb{Z}$ non esiste inverso di alcun numero → in $\mathbb{Z}$ è in genere possibile eseguire le operazioni di sottrazione ma non di divisione

Massimo, minimo

Sia A un insieme di numeri reali non vuoto.

Si definisce massimo di A, se esiste, quel numero M che appartiene ad A ed è maggiore o uguale di ogni altro elemento dell'insieme A

$$A \subset \mathbb{R} \qquad M \; massimo \; di \; A \Leftrightarrow \begin{cases} M \in A \\ \forall a \in A, \;\; M \geq a \end{cases}$$

Esiste un elemento $\bar{x} \in A : x \leq \bar{x}, \forall x \in A$

N.B. Non tutti gli insiemi di numeri reali sono dotati di massimo
o di minimo!

Massimo, minimo

Sia A un insieme di numeri reali non vuoto.

Si definisce minimo di A, se esiste, quel numero m che appartiene ad A ed è minore o uguale di ogni altro elemento dell'insieme A

$$A \subset \mathbb{R} \qquad m \ minimo \ di \ A \Leftrightarrow \begin{cases} m \in A \\ \forall a \in A, \quad m \leq a \end{cases}$$

Esiste un elemento $\underline{x} \in A : \underline{x} \leq x, \forall x \in A$

Esempio: l'insieme $A = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\}$ ha , $\max(A) = \frac{1}{2}$, ma non ammette minimo

Massimo, minimo

Esempio 1.

Sia A l'insieme dei numeri reali positivi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$$

allora sicuramente possiamo affermare che

$$\nexists \min A \; e \; \nexists \max A$$

infatti lo zero sicuramente non può essere il minimo poiché $0 \notin A$

Esempio 2. Consideriamo l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali. Allora

$$\exists \min \mathbb{N} = 1 \quad \text{ma} \quad \nexists \max \mathbb{N}$$

Maggiorante, minorante

Sia A un insieme di numeri reali non vuoto.

Si parla di maggiorante M di A, se esiste almeno un numero reale maggiore o uguale a tutti gli elementi di A

$$a \leq M, \forall a \in A$$

Sia A un insieme di numeri reali non vuoto.

Si parla di minorante m di A, se esiste almeno un numero reale minore o uguale a tutti gli elementi di A

$$a \geq m, \forall a \in A$$

L'insieme A si dice **limitato superiormente** se ammette maggioranti, ossia se:

$$\exists\, r \in \mathbb{R} : r \geq x, \forall x \in A$$

L'insieme A si dice **limitato inferiormente** se ammette maggioranti, ossia se:

$$\exists\, r \in \mathbb{R} : r \leq x, \forall x \in A$$

L'insieme A si dice **limitato** se ammette maggioranti e minoranti:

$$A \text{ limitato} \Leftrightarrow \exists l, L \in R : l \leq a \leq L, \forall a \in A$$

OSSERVAZIONE 1

ovviamente, il massimo ed il minimo di un insieme, se esistono, sono anche rispettivamente un maggiorante ed un minorante.

$$A \subset R \quad M \text{ massimo di } A \Leftrightarrow \begin{cases} M \in A \\ \forall a \in A, \quad M \geq a \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$A \subset R \quad M \text{ maggiorante di } A \Leftrightarrow \begin{cases} \\ \forall a \in A, \quad M \geq a \end{cases}$$

Ma NON è vero il viceversa

OSSERVAZIONE 2

Un insieme di numeri reali non sempre ammette maggioranti o minoranti

$$A = \{x \in R : x > 0\}$$

non solo $\nexists \min A$ e $\nexists \max A$

inoltre $\exists \text{minoranti} A$ ma $\nexists \text{maggioranti} A$

(lo 0, così come tutti numeri negativi sono dei minoranti di A)

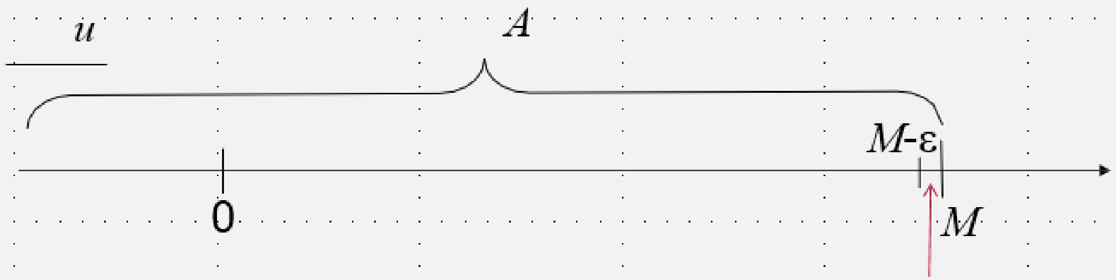
Estremo superiore, estremo inferiore

Sia A un insieme di numeri reali non vuoto e limitato superiormente (ammette maggioranti). Allora si dice che $M \in \mathbb{R}$ è l'estremo superiore di A se è il più piccolo dei maggioranti di A. In simboli:

$$M = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} M \geq x, \forall x \in A \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : M - \varepsilon < x \end{cases}$$

L'estremo superiore verifica le due seguenti proprietà:

$\boxed{i)\ M \geq x, \quad \forall x \in A}$ $\boxed{ii)\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : M - \varepsilon < x}$



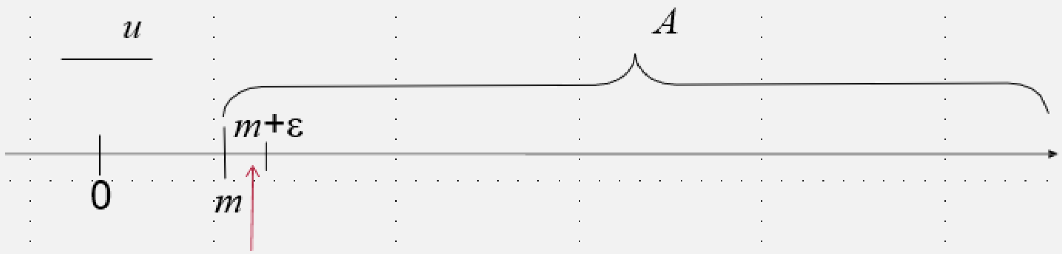
Estremo superiore, estremo inferiore

Sia A un insieme di numeri reali non vuoto e limitato inferiormente (ammette minoranti). Allora si dice che $m \in \mathbb{R}$ è l'estremo inferiore di A se è il più grande dei minoranti di A. In simboli:

$$m = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq x, \forall x \in A \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : m + \varepsilon > x \end{cases}$$

L'estremo inferiore verifica le due seguenti proprietà:

$\boxed{i)\ m \leq x, \quad \forall x \in A}$ $\boxed{ii)\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : m + \varepsilon > x}$



Intervalli

Un sottoinsieme I non vuoto della retta reale tale che $\forall x, y \in I$ tutti i punti compresi fra x e y appartengono ancora a I si chiama **intervallo**

$A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 6\}$ → è un intervallo

$B = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$ → non è un intervallo

Tra gli intervalli limitati, se $a, b \in \mathbb{R} : a < b$, abbiamo:

- Intervallo chiuso $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
- Intervallo aperto a destra $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
- Intervallo aperto a sinistra $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$
- Intervallo aperto $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

Tutti questi intervalli hanno come estremo inferiore a e come estremo superiore b

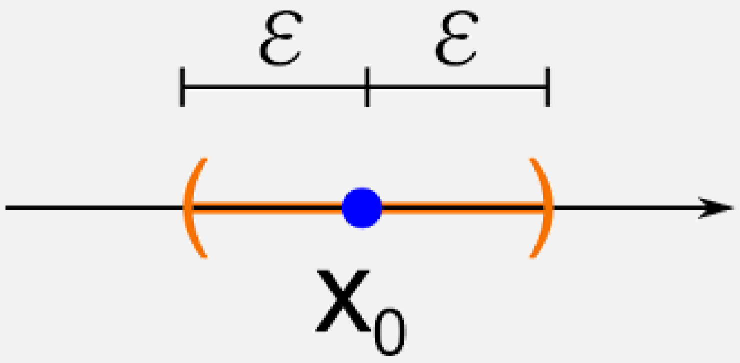
Intervalli

Tra gli intervalli illimitati, abbiamo:

- Intervallo chiuso illimitato superiormente $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$
- Intervallo aperto illimitato superiormente $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$
- Intervallo chiuso illimitato inferiormente $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$
- Intervallo aperto illimitato inferiormente $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$

Intorno

Dato un punto $x \in \mathbb{R}$, si chiama **intorno** di x ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ che contiene un intervallo aperto $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, con $\varepsilon > 0$



Esempio.

Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{n-1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*\}$, questo insieme è limitato superiormente o inferiormente?