- **ELEMENTI DI LOGICA MATEMATICA**

SCOPO: INTRODURRE NOZIONI DI LOGICA & TERMINOLOGIA PER UNA CORRETTA INTERPRETAZIONE DELLE DIMOSTRAZIONI.

Proposizione:
è una frase di **senso compiuto**, della quale si può inequivocabilmente dire se è vera o falsa. Indichiamo le proposizioni con $\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \dots$

Esempi:

1. P_1: quest'aula contiene studenti universitari
   (proposizione VERA)
2. P_2: Brescia è una città di mare
   (proposizione FALSA)

N.B.: Una proposizione può essere VERA o FALSA, ma NON, contemporaneamente, vera e falsa

Predicato:

è frase contenente una o più variabili libere, ad es.:

$\mathcal{P}(x)$ predicato dipendente da x
$\mathcal{Q}(x,y)$ predicato dipendente da x, y

Esempi:

1. $\mathcal{P}(x)$ ="L'intero x è un numero primo"
2. $\mathcal{Q}(x,y)$ ="Il numero x è maggiore di y"

I predicati NON hanno un valore di verità intrinseco: dipende dai valori attribuiti alle variabili libere. Per gli esempi 1 e 2 si ha

$\mathcal{P}(2)$ *V* $\quad$ $\mathcal{P}(4)$ *F*

$\mathcal{Q}(3,\frac{7}{2})$ *F* $\quad$ $\mathcal{Q}(2,\frac{1}{5})$ *V*

Quantificatori: elementi fondamentali del linguaggio matematico.

- ∀ quantificatore universale: "per ogni"
- ∃ quantificatore esistenziale: "esiste"
- ∃ ! quantificatore esiste unico: "esiste uno e uno solo".

Un modo per trasformare predicati in proposizioni è l'uso di uno dei quantificatori:

Dal predicato P(x) = «nel luogo x piove»

Otteniamo le due proposizioni:

1. Piove in ogni luogo: $\forall x : \mathcal{P}(x)$
2. Esiste un luogo in cui piove: $\exists x : \mathcal{P}(x)$

- Quando un predicato dipende da più variabili i quantificatori possono essere mescolati.

MAI invertire l' ordine dei quantificatori in una proposizione! Può alterare il senso!

Esempio

Q(x, y) ="nel luogo x piove nel giorno y" Allora:

1. *In ogni luogo c'è almeno un giorno in cui piove:*

$$\forall x \, \exists y : Q(x, y) \quad \textbf{(prop. VERA)}$$

2. *Esiste un giorno in cui piove in ogni luogo:*

$$\exists y \, \forall x : Q(x, y) \quad \textbf{(prop. FALSA)}$$

Connettivi logici

Sono operatori che trasformano una o più proposizioni in altre proposizioni, il cui valore di verità dipende dai valori di verità delle proposizioni di partenza.

non (NEGAZIONE)

Trasforma P nella proposizione $\boldsymbol{non}(\mathcal{P})$ che ha valore di verità **contrario** a $\mathcal{P}$

- L'operatore di negazione, applicato due volte, si elide:

$$\boldsymbol{non}(\boldsymbol{non}(\mathcal{P})) = \mathcal{P}$$

e (CONGIUNZIONE) $\wedge$

Date $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$, $\mathcal{P}$ ***e*** $\mathcal{Q}$ è la proposizione nella quale valgono sia la prima, sia la seconda

- $\mathcal{P}$ ***e*** $\mathcal{Q}$ è vera unicamente se sia $\mathcal{P}$ sia $\mathcal{Q}$ sono vere

o (DISGIUNZIONE) $\vee$

Date $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$, $\mathcal{P}$ ***o*** $\mathcal{Q}$ è la proposizione nella quale vale almeno una delle due

- $\mathcal{P}$ ***o*** $\mathcal{Q}$ è vera se almeno una fra $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ è vera
- Scrivendo $\mathcal{P}$ ***o*** $\mathcal{Q}$, non escludo che siano vere entrambe

(IMPLICAZIONE) $\Rightarrow$

Date $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$, il connettivo $\Rightarrow$ crea la proposizione $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$, che si legge

- $\mathcal{P}$ implica $\mathcal{Q}$
- Se $\mathcal{P}$, allora $\mathcal{Q}$

Terminologie alternative per $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$:

- $\mathcal{P}$ è <u>condizione sufficiente</u> per $\mathcal{Q}$
- $\mathcal{Q}$ è <u>condizione necessaria</u> per $\mathcal{P}$

N.B.:

$[\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}]$ equivale a $[\boldsymbol{non}\,\mathcal{Q} \Rightarrow \boldsymbol{non}\mathcal{P}]$

Esempio:

- $\mathcal{P}$: «Fido è un cane»
- $\mathcal{Q}$: «Fido è un mammifero»

- $\mathcal{P}$ è <u>condizione sufficiente</u> per $\mathcal{Q}$: essere un cane basta per essere un mammifero
- $\mathcal{Q}$ è <u>condizione necessaria</u> per $\mathcal{P}$: essere mammifero è un requisito indispensabile per essere cane, ovvero **se** Fido non è un mammifero, **allora** non può essere un cane

(DOPPIA IMPLICAZIONE) $\Leftrightarrow$

Date $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$, il connettivo $\Leftrightarrow$ crea la proposizione

$\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$, che equivale a $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ $\boldsymbol{e}$ $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$

Si legge:

- $\mathcal{P}$ equivale a $\mathcal{Q}$
- $\mathcal{P}$ è condizione necessaria e sufficiente per $\mathcal{Q}$
- $\mathcal{P}$ se e solo se $\mathcal{Q}$

N.B.:

$$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q} \Leftrightarrow \boldsymbol{non}(\mathcal{Q}) \Rightarrow \boldsymbol{non}(\mathcal{P})$$

Negare proposizioni (predicati) contenenti connettivi

$$\boldsymbol{non}(\mathcal{P}\ \boldsymbol{e}\ \mathcal{Q}) = \boldsymbol{non}(\mathcal{P})\ \boldsymbol{o}\ \boldsymbol{non}(\mathcal{Q})$$

$$\boldsymbol{non}(\mathcal{P}\ \boldsymbol{o}\ \mathcal{Q}) = \boldsymbol{non}(\mathcal{P})\ \boldsymbol{e}\ \boldsymbol{non}(\mathcal{Q})$$

Negare $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$

Significa negare che $\mathcal{Q}$ sia indispensabile per la validità di $\mathcal{P}$, ovvero significa affermare che $\mathcal{P}$ può valere (essere vera) quando non vale $\mathcal{Q}$, cioè:

$$[\boldsymbol{non}\,(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})] \Leftrightarrow [\mathcal{P}\,\boldsymbol{e}\ (non\mathcal{Q})]$$

Negare proposizioni contenenti quantificatori

$$\boldsymbol{non}(\forall)\ \underline{\text{equivale a}}\ \exists\ \boldsymbol{non}$$

cioè:

$\boldsymbol{non}(\forall x, \mathcal{P}(x))$ $\Leftrightarrow$

«non è vero che $\mathcal{P}(x)$ è vera per ogni x» $\Leftrightarrow$

«c'è almeno un x per il quale $\mathcal{P}(x)$ è falsa» $\Leftrightarrow$

$\exists x : \boldsymbol{non}(\mathcal{P}(x))$

Per negare che una proprietà sia verificata universalmente bisogna esibire un esempio in cui essa non sia verificata: un **controesempio**.

Negare proposizioni contenenti quantificatori

$\boldsymbol{non}(\exists)$ <u>equivale a</u> $\forall \boldsymbol{non}$

cioè:

$\boldsymbol{non}(\exists x, \mathcal{P}(x)) \quad \Leftrightarrow$

«non è vero esiste un x per cui $\mathcal{P}(x)$ è vera» $\quad \Leftrightarrow$

«per ogni $x, \mathcal{P}(x)$ è falsa» $\quad \Leftrightarrow$

$\forall x : \boldsymbol{non}(\mathcal{P}(x))$

Teoremi

Un teorema è costituito da un enunciato e da una dimostrazione.

➢ L'**enunciato** ha

1. una IPOTESI ($\mathcal{P}$, il punto di partenza)
2. una TESI ($\mathcal{Q}$ l'obiettivo da dimostrare)

Si sintetizza con: $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$

➢ **Dimostrazione**: procedimento logico per dedurre la tesi dall'ipotesi.