- **EQUAZIONI E DISEQUAZIONI DI I E II GRADO**

Equazione:

Risolvere un'equazione vuol dire cercare il valore incognito, o i valori incogniti, per il quale le due espressioni algebriche forniscono lo stesso risultato.

Un insieme di valori che, sostituiti alle incognite, rende vera un'equazione è chiamato insieme delle **soluzioni** o **radici**.

Risolvere un'equazione significa quindi esplicitare l'insieme di tutte le soluzioni dell'equazione.

Esempio.

Risolvere l'equazione

$$5x + 3 = 2x + 4$$

significa trovare il valore di x per cui

il primo membro $5x + 3$ e il secondo membro $2x + 4$

hanno lo stesso valore

Equazioni di I grado

PRINCIPI DI EQUIVALENZA
L'insieme delle soluzioni di un'equazione non cambia se:

- Si aggiunge a entrambi i membri dell'equazione la stessa quantità (numero o incognita);

come conseguenza: si può portare un addendo da un membro all'altro, pur di cambiargli il segno e si possono eliminare due addendi uguali che compaiono in entrambi i membri.

- Si moltiplicano entrambi i membri dell'equazione per lo stesso numero diverso da 0;

come conseguenza: si possono cambiare di segno entrambi i membri di un'equazione (non uno solo, entrambi!).

Equazioni algebriche di I grado

- Un'equazione algebrica di *primo grado* o *lineare* è un'equazione in cui il grado massimo dell'incognita è *uno* e, dopo una serie opportuna di semplificazioni, si può scrivere nella cosiddetta *forma normale*:

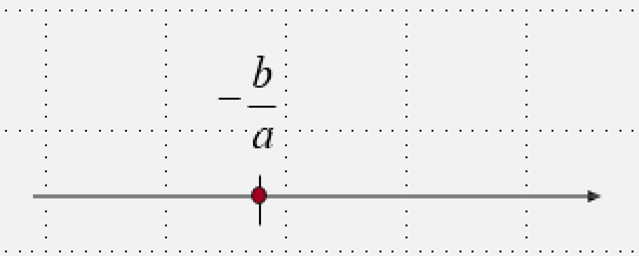
$$ax + b = 0$$

per due numeri reali $a \neq 0$ e b.

Portando al secondo membro b e dividendo per $a \neq 0$ si ottiene la soluzione:

$$x = -\frac{b}{a}$$

UNICA SOLUZIONE!



Equazioni algebriche di I grado

Data un'equazione algebrica di primo grado

$$ax + b = 0 \; con\; a\; e\; b\; numeri\; reali$$

Se $a = 0$, si possono distinguere due casi:

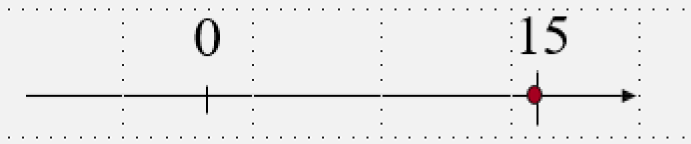
- $0 \cdot x + b = 0 \quad con\; b \neq 0$ → **equazione impossibile**
- $0 \cdot x + b = 0 \quad con\; b = 0$ → **equazione indeterminata**

Esercizio 1. Risolvere la seguente equazione: $x + 6 = 21$

Sommando ad entrambi i membri il numero -6, l'insieme delle soluzioni non cambia:

$$x + \cancel{6} - \cancel{6} = 21 - 6$$

La soluzione è $x = 15$



Esercizio 2. Risolvere la seguente equazione: $4x - 3 = -9$

Sommando ad entrambi i membri il numero 3, l'insieme delle soluzioni non cambia:

$$4x - \cancel{3} + \cancel{3} = -9 + 3$$

Dividendo entrambi i membri per il numero 4, l'insieme delle soluzioni non cambia:

$$\frac{\cancel{4}x}{\cancel{4}} = -\frac{6}{4}$$

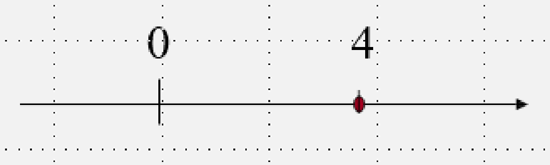
La soluzione è $x = -\frac{6}{4}$

Esercizio 3. Risolvere la seguente equazione: $2x - 7 = x - 3$

Sommando ad entrambi i membri $-x$ e 7, l'insieme delle soluzioni non cambia:

$$2x - x \cancel{-7} \cancel{+7} = \cancel{x} \cancel{-x} - 3 + 7$$

La soluzione è $x = +4$



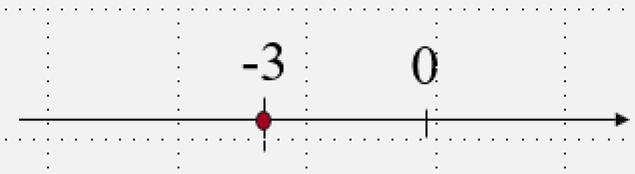
Esercizio 4. Risolvere la seguente equazione: $(x+1)^2 - x + 2 = x^2$

Sviluppando il quadrato del binomio al I membro, si ha che: $x^2 + 2x + 1 - x + 2 = x^2$

Sommando $-x^2$ e -3 ad entrambi i membri, l'equazione diventa:

$$2x + 1 - x + 2 - 3 = -3$$

La soluzione è $x = -3$



Equazioni algebriche di II grado

In matematica, **un'equazione algebrica di secondo grado o quadratica** è un'equazione algebrica ad una sola incognita x che compare con grado massimo pari a 2, e la cui espressione è riconducibile alla forma normale:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$
$$a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}$$

Esempio

L'equazione $3x^2 + 2x - 5 = 0$ è un'equazione algebrica di II grado scritta in forma normale con

$a = 3, b = 2, c = -5$

Equazioni algebriche di II grado

Nel campo reale le equazioni algebriche di secondo grado possono ammettere due soluzioni, eventualmente coincidenti, oppure nessuna soluzione

Le soluzioni, se esistono, rendono verificata l'equazione quando vengono sostituite in essa.

Esempio

$$x = 1 \; e \; x = 2$$

Sono soluzioni per l'equazione:

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

Equazioni algebriche di II grado

Si chiama **discriminante** di un'equazione di II grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

E si indica con il simbolo Δ, il numero:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Esempio

Per l'equazione

$$3x^2 + 2x - 5 = 0$$

Il discriminante è:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4(3)(-5) = 4 + 60 = 64$$

Equazioni algebriche di II grado

Contrariamente ad una equazione di primo grado che ammette sempre un'unica soluzione, un'equazione di secondo grado può non ammettere soluzioni reali o ammetterne due (eventualmente coincidenti).

La presenza o meno di soluzioni reali dipende dal segno del discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- Se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

l'equazione ammette 2 soluzioni reali distinte x_1 e x_2

E vale l'uguaglianza $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

- Se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

l'equazione ammette 2 soluzioni reali coincidenti x_0

E vale l'uguaglianza $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$

- Se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

l'equazione non ammette soluzioni reali

Equazioni algebriche di II grado

- Se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

l'equazione ammette 2 soluzioni reali distinte

- Se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

l'equazione ammette 2 soluzioni reali coincidenti

Se $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ le due soluzioni di un'equazione di secondo grado si ricavano dalla formula:

$$x_{1,2} = -\frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Esercizio. Risolvere la seguente equazione: $x^2 + x - 2 = 0$

Calcoliamo il valore del discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 8 = 9 > 0$$

Quindi, l'equazione ammette due soluzioni reali distinte. Ora dobbiamo determinarle:

$$x_{1,2} = -\frac{1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} =$$

$$x_1 = -\frac{4}{2} = -2$$

$$x_2 = \frac{2}{2} = 1$$

Esercizio. Risolvere la seguente equazione: $2x^2 - 5x + 3 = 0$

Calcoliamo il valore del discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 1 > 0$$

Quindi, l'equazione ammette due soluzioni reali distinte. Ora dobbiamo determinarle:

$$x_{1,2} = -\frac{5 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} =$$

$$x_1 = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = 1$$

Esercizio. Risolvere la seguente equazione: $-2x^2 + x + 1 = 0$

Prima di calcolare il discriminante, cambiamo il segno a tutti i termini dell'equazione, ottendendo così l'equazione equivalente:

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

Calcoliamo il valore del discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 8 = 9 > 0$$

Quindi, l'equazione ammette due soluzioni reali distinte. Ora dobbiamo determinarle:

$$x_{1,2} = -\frac{1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{2} \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Esercizio. Risolvere la seguente equazione: $2(x+1)-(4-2x)=x^2+3$

Riduciamo l'equazione in forma normale:

$$2x+2-4+2x=x^2+3 \;\rightarrow -x^2+4x-5=0 \;\rightarrow x^2-4x+5=0$$

Calcoliamo il valore del discriminante:

$$\Delta = b^2-4ac=16-20=-4<0$$

Quindi, l'equazione non ammette soluzioni reali.

Esercizio. Risolvere la seguente equazione: $x^2 + 4 = 0$

Si tratta di un'equazione incompleta, che può essere risolta:

$$x^2 + 4 = 0 \; \rightarrow x^2 = -4$$

Sicuramente possiamo affermare che non esiste alcun numero reale x che al quadrato è uguale ad un numero negativo.

Quindi, l'equazione NON ammette due soluzioni reali

Esercizio. Risolvere la seguente equazione: $x(x^2 - 3x) + 2 = x^3$

Riduciamo l'equazione in forma normale:

$$x^3 - 3x^2 + 2 = x^3 \rightarrow -3x^2 + 2 = 0 \ \rightarrow 3x^2 - 2 = 0$$

Si tratta di un'equazione incomplete, che può essere risolta:

$$3x^2 - 2 = 0 \ \rightarrow x^2 = \frac{2}{3} \qquad x_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \qquad x_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Quindi, l'equazione ammette due soluzioni reali distinte.

Esercizio. Risolvere la seguente equazione: $(x+1)^3 + \frac{(x-1)(2-x)}{2} = (x^2-1)x$

Riduciamo l'equazione in forma normale:

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + \frac{2x - x^2 - 2 + x}{2} = x^3 - x \ \rightarrow 5x^2 + 11x = 0$$

Si tratta di un'equazione incomplete, che può essere risolta:

$$5x^2 + 11x = 0 \ \rightarrow x(5x + 11) = 0 \ \rightarrow x = 0, x = -\frac{11}{5}$$

Quindi, l'equazione ammette due soluzioni reali distinte.

Equazioni irrazionali

Equazioni irrazionali con una radice quadrata

- Con un polinomio al secondo membro: $\sqrt{A} = \mathrm{B} \rightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$
- Con un numero positivo n al secondo membro: $\sqrt{A} = n \rightarrow A = n^2$
- Con un numero negativo $-n$ al secondo membro: $\sqrt{A} = -n \rightarrow$ nessuna soluzione
- Con lo zero al secondo membro: $\sqrt{A} = 0 \rightarrow A = 0$

Equazioni irrazionali

Equazioni irrazionali con due radici quadrate

- $\sqrt{A} = \sqrt{\mathrm{B}} \rightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \\ A = B \end{cases}$

- $\sqrt{A} + \sqrt{B} = C \rightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \\ \left(\sqrt{A} + \sqrt{B}\right)^2 = C^2 \rightarrow 2\sqrt{AB} = C^2 - A - B^* \end{cases}$

* *Si applica lo schema risolutivo per equazioni irrazionali con una sola radice quadrata*

Equazioni irrazionali

Equazioni irrazionali con radici cubiche

- $\sqrt[3]{A} = B \ \rightarrow A = B^3$

- $\sqrt[3]{A} = \sqrt[3]{B} \ \rightarrow A = B$ *

**per isolare una equazione irrazionale con radici cubiche, basta isolare la/e radice/i ed elevare al cubo entrambi i membri*

Equazioni in valore assoluto

Definizione

Il valore assoluto di x è uguale a:

- x se x è maggiore o uguale a zero
- $-x$ se x è minore di zero

$$|x| \rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ -x \end{cases}$$

Equazioni in valore assoluto

Equazioni con un solo valore assoluto

- Con un polinomio al secondo membro: $|A| = B \ \rightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ A = B \end{cases} \vee \begin{cases} A < 0 \\ A = -B \end{cases}$

- Con un numero positivo n al secondo membro: $|A| = n \ \rightarrow A = n \vee A = -n$

- Con un numero negativo $-n$ al secondo membro: $|A| = -n \ \rightarrow$ nessuna soluzione

- Con lo zero al secondo membro: $|A| = 0 \ \rightarrow A = 0$

Equazioni in valore assoluto

Equazioni con due o più valori assoluti

$$|A| + |B| = C \quad \rightarrow \text{si studia il segno di } A \text{ e } B$$

- Si risolvono le disequazioni $A > 0$ e $B > 0$ e, dette ad esempio $x > a$ e $x > b$ le loro soluzioni, si rappresentano sul grafico

- Dall'osservazione del grafico, l'equazione si scinde nei seguenti sistemi:

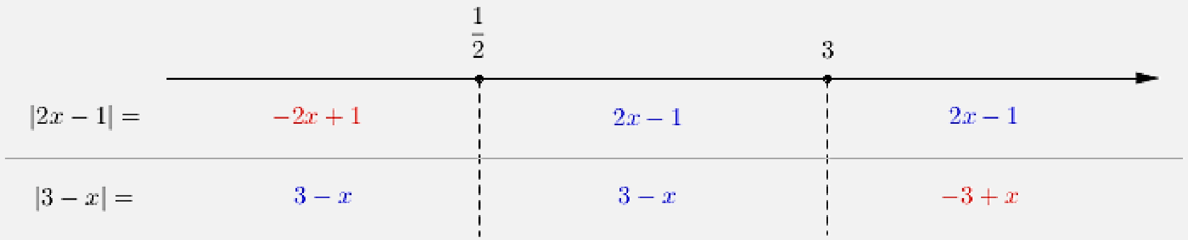
$$\mathrm{I}\ \begin{cases} x < a \\ -A - B = C \end{cases} \quad \vee \quad \mathrm{II}\ \begin{cases} a \le x \le b \\ A - B = C \end{cases} \quad \vee \quad \mathrm{III}\ \begin{cases} x > b \\ A + B = C \end{cases}$$

Equazioni con due o più valori assoluti: esempio

$$|2x-1|+|3-x|=4x+4$$

$$|2x-1| = \begin{cases} 2x-1 & \text{se } 2x-1 \geq 0 \\ -(2x-1) & \text{se } 2x-1 < 0 \end{cases} \Rightarrow |2x-1| = \begin{cases} 2x-1 & \text{se } x \geq \frac{1}{2} \\ -2x+1 & \text{se } x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$|3-x| = \begin{cases} 3-x & \text{se } 3-x \geq 0 \\ -(3-x) & \text{se } 3-x < 0 \end{cases} \Rightarrow |3-x| = \begin{cases} 3-x & \text{se } x \leq 3 \\ -3+x & \text{se } x > 3 \end{cases}$$



Seguendo questo schema, possiamo dire che la nostra equazione è equivalente ai seguenti tre sistemi misti:

$$\begin{cases} -2x+1+3-x=4x+4 \\ x < \frac{1}{2} \end{cases} \cup \begin{cases} 2x-1+3-x=4x+4 \\ \frac{1}{2} \leq x \leq 3 \end{cases} \cup \begin{cases} 2x-1-3+x=4x+4 \\ x > 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x < \frac{1}{2} \end{cases} \cup \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} < x < 3 \end{cases} \cup \begin{cases} x = -8 \\ x > 3 \end{cases}$$

Confrontando le soluzioni di ciascuna equazione con le condizioni presenti nei rispettivi sistemi, si vede che il secondo e il terzo sistema sono impossibili, mentre il primo fornisce la soluzione $x = 0$, che è di conseguenza <u>l'unica soluzione dell'equazione</u>

Disequazioni

In matematica, una disequazione è una relazione di disuguaglianza tra due espressioni che contengono delle incognite.

Risolvere una disequazione significa trovare quell'insieme di valori che, attribuiti alle incognite, rendono la disuguaglianza effettivamente verificata. Solitamente, le soluzioni di una disequazione sono costituite da uno o più insiemi numerici (detti ***intervalli***).

Disequazioni

PRINCIPI DI EQUIVALENZA

L'insieme delle soluzioni di una disequazione non cambia se:

- si aggiunge ai due membri di una disequazione una quantità (numero o incognita).

come conseguenza: si può eliminare da entrambi i membri uno stesso termine oppure spostarlo da un membro all'altro cambiando il segno

- si moltiplicano o dividono i due membri di una disequazione per una stessa quantità, a patto di cambiare il verso della disequazione nel caso in cui tale quantità sia negativa.

come conseguenza: si può cambiare il segno a tutti i termini di entrambi i membri, purché si cambi anche il verso della disequazione

Le disequazioni algebriche di grado n con $n \in \mathbb{N}$, nell'incognita x

$$p(x) > 0 \ e \ -p(x) < 0$$

sono **equivalenti** →

Cambiando il segno a tutti i coefficienti del polinomio $p(x)$ e invertendo il verso della disequazione, ci si riconduce ad una disequazione equivalente alla data

Esempio. Data la disequazione di IV grado con incognita x:

$$-5x^4 + 3x^3 - x^2 + 1 \leq 0$$

Otteniamo la disequazione equivalente:

$$5x^4 - 3x^3 + x^2 - 1 \geq 0$$

Disequazioni algebriche di I grado

Una disequazione è di primo grado o lineare se, dopo una serie di opportune semplificazioni, si può scrivere nella forma:

$$ax + b \geq 0 \qquad oppure > 0, \leq 0, < 0$$

Per due numeri reali $a \neq 0$ e b.

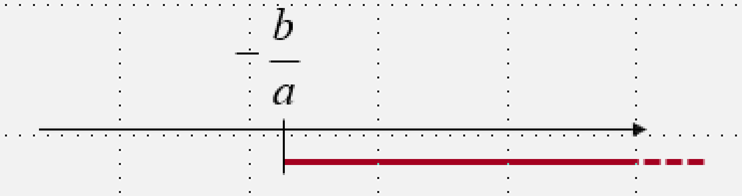
Ricordando che le due disequazioni di I grado

$$ax + b > 0 \text{ e } -ax - b < 0 \text{ con } a \neq 0$$

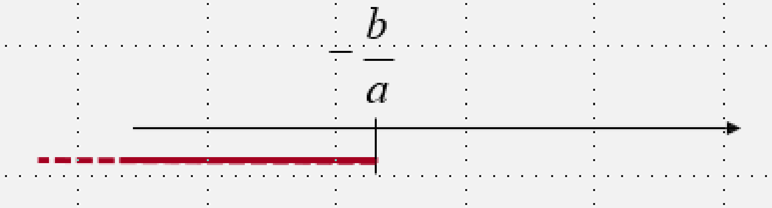
sono equivalenti, nella risoluzione delle disequazioni di I grado ci si può sempre ricondurre al caso in cui il coefficiente $a > 0$

$\boldsymbol{a > 0}$ (Per due numeri reali $a \neq 0$ e b)

- $ax + b > 0 \;\rightarrow ax > -b \;\rightarrow x > -\frac{b}{a}$



- $ax + b < 0 \;\rightarrow ax < -b \;\rightarrow x < -\frac{b}{a}$



Una disequazione di primo grado ammette sempre infinite soluzioni date da:

$$x > -\frac{b}{a}$$

$$x < -\frac{b}{a}$$

Esercizio. Risolvere la seguente disequazione: $-3x < -5$

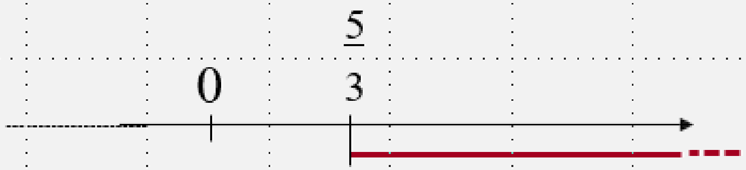
Si può cambiare il segno a entrambi i membri, in modo da rendere positivo il coefficiente **-3**, cambiando il verso della disequazione:

$$3x > 5$$

Possiamo ora moltiplicare entrambi i membri per $\frac{1}{3} > 0$, ottenendo:

Insieme soluzioni

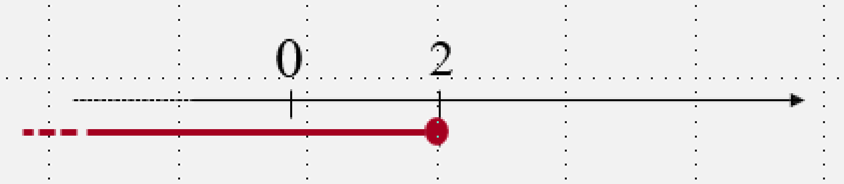
$$\boxed{x > \frac{5}{3}}$$



Esercizio. Risolvere la seguente disequazione: $5x - 10 \leq 0$

Soluzione:

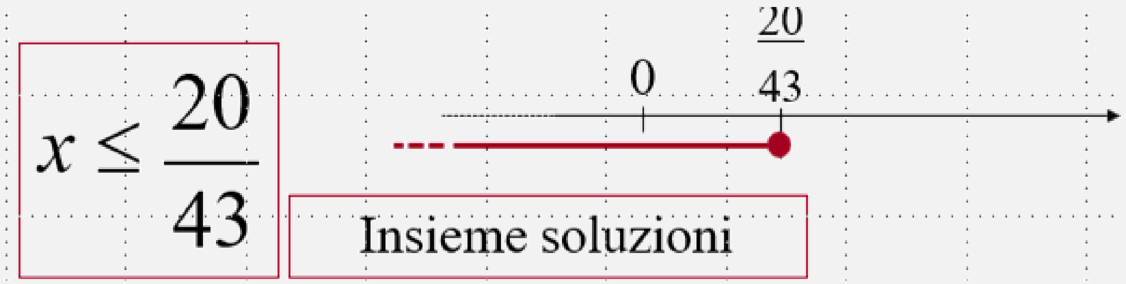
$$5x \leq 10 \rightarrow x \leq \frac{10}{5} \rightarrow x \leq 2$$



Esercizio. Risolvere la seguente disequazione: $\frac{x-2}{3} + \frac{x}{4} \leq 1 - 3x$

Soluzione: calcolando al denominatore il m.c.m., la disequazione si riscrive in forma equivalente:

$$\frac{4x - 8 + 3x}{12} \leq \frac{12 - 36x}{12} \rightarrow 4x - 8 + 3x \leq 12 - 36x \rightarrow 43x \leq 20$$



Disequazioni algebriche di II grado

In matematica, una **disequazione di secondo grado o quadratica** è una disequazione algebrica ad una sola incognita x che compare con grado massimo pari a 2, e la cui espressione è riconducibile alla forma :

$$ax^2 + bx + c > 0$$

$$(ax^2 + bx + c < 0)$$

$$a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}$$

Disequazioni algebriche di II grado

Applicando i principi di equivalenza, dobbiamo ricordarci che , per $a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}$, le disequazioni di secondo grado:

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ e } -ax^2 - bx - c < 0$$

Sono equivalenti

Quindi, nella risoluzione delle disequazioni di II grado ci si può sempre ricondurre al caso in cui il coefficiente a è positivo

Disequazioni algebriche di II grado – soluzioni

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ oppure } (ax^2 + bx + c < 0)$$

$$a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}$$

- Passo1: verificare il segno del coefficiente a. Nel caso in cui $a < 0$, cambiare il segno a tutti i termini della disequazione e cambiare il verso della disequazione.

- Passo2: determinare le radici reali x_1 e x_2 (se esistono) dell'equazione di II grado associata $ax^2 + bx + c = 0$ utilizzando la formula:

$$x_{1,2} = -\frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ con } \Delta = b^2 - 4ac$$

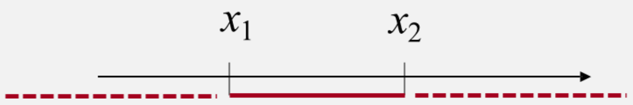
Disequazioni algebriche di II grado – soluzioni

I CASO: $\Delta > 0, a > 0$

Due soluzioni reali distinte

- $ax^2 + bx + c > 0 \Leftrightarrow x < x_1, \ x > x_2$

- $ax^2 + bx + c < 0 \Leftrightarrow x_1 < x < x_2$



I CASO: $\Delta > 0, a > 0$

Due soluzioni reali distinte

- $ax^2 + bx + c \geq 0 \Leftrightarrow x \leq x_1, \ x \geq x_2$

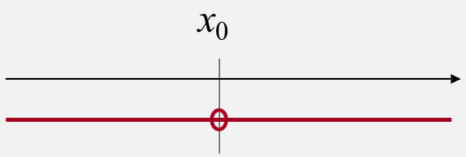
- $ax^2 + bx + c \leq 0 \Leftrightarrow x_1 \leq x \leq x_2$

Disequazioni algebriche di II grado – soluzioni

II CASO: $\Delta = 0,\ a > 0$

Due soluzioni reali coincidenti

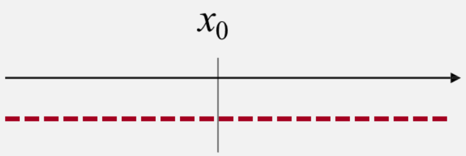
- $ax^2 + bx + c > 0 \Rightarrow \forall x \in R, x \neq x_0$



Ricordiamo che, se il trinomio ammette 2 radici coincidenti pari a x_0 allora si può scrivere:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$$

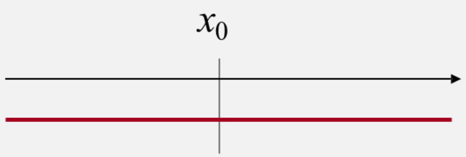
- $ax^2 + bx + c < 0 \Rightarrow \nexists x \in R$



II CASO: $\Delta = 0,\ a > 0$

Due soluzioni reali coincidenti

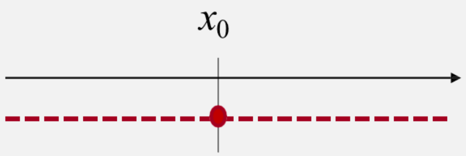
- $ax^2 + bx + c \geq 0 \Rightarrow \forall x \in R$



Ricordiamo che, se il trinomio ammette 2 radici coincidenti pari a x_0 allora si può scrivere:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$$

- $ax^2 + bx + c \leq 0 \Rightarrow x = x_0$



Disequazioni algebriche di II grado – soluzioni

III CASO: $\Delta < 0, a > 0$

Non esistono soluzioni reali

- $ax^2 + bx + c > 0 \Rightarrow \forall x \in R$

- $ax^2 + bx + c < 0 \Rightarrow \nexists x \in R$

III CASO: $\Delta < 0, a > 0$

Non esistono soluzioni reali

- $ax^2 + bx + c \geq 0 \Rightarrow \forall x \in R$

- $ax^2 + bx + c \leq 0 \Rightarrow \nexists x \in R$

Esercizio. Risolvere la seguente disequazione: $-x^2+12x-11\geq 0$

Soluzione: Cambiamo il segno a tutti i termini e cambiamo anche il verso della disequazione:

$$x^2-12x+11\leq 0$$

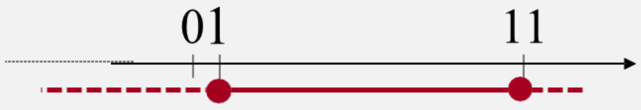
Si calcola il discriminante $\Delta = b^2-4ac=144-44=100$

L'equazione associata ha due soluzioni distinte:

$$x_{1,2}=\frac{12\pm\sqrt{100}}{2}=\frac{12\pm 10}{2}=\left\langle\begin{array}{l}1\\11\end{array}\right.$$

In base al verso della disequazione e al segno del discriminante, le soluzioni della disequazione sono:

$$1\leq x\leq 11$$



Esercizio. Risolvere la seguente disequazione: $x^2 - 7x + 10 > 0$

Soluzione: Si calcola il discriminante $\Delta = b^2 - 4ac = 49 - 40 = 9$

L'equazione associata ha due soluzioni distinte:

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ 5 \end{cases}$$

In base al verso della disequazione e al segno del discriminante, le soluzioni della disequazione sono:

$$x < 2 \; e \; x > 5$$

Esercizio. Risolvere la seguente disequazione: $2x^2 + 13x + 20 > 0$

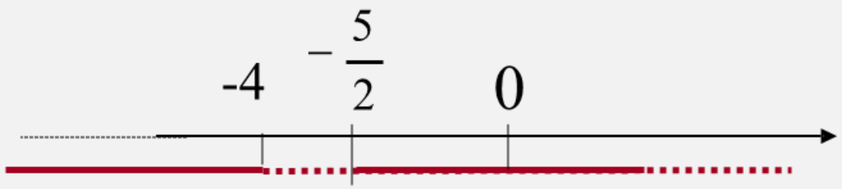
Soluzione: Si calcola il discriminante $\Delta = b^2 - 4ac = 169 - 160 = 9$

L'equazione associata ha due soluzioni distinte:

$$x_{1,2} = \frac{-13 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-13 \pm 3}{4} = \begin{array}{l} -4 \\ \\ -\frac{5}{2} \end{array}$$

In base al segno del coefficiente $a > 0$ e al segno del discriminante, le soluzioni della disequazione sono:

$$x < -4 \ e \ x < -\frac{5}{2}$$



Esercizio. Risolvere la seguente disequazione: $x^2 - 10x + 25 > 0$

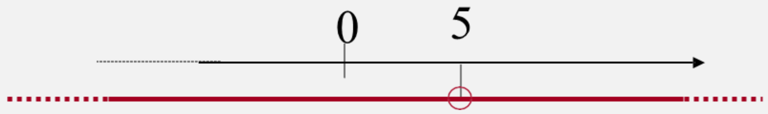
Soluzione: Si calcola il discriminante $\Delta = b^2 - 4ac = 100 - 100 = 0$

L'equazione associata ha due soluzioni reali coincidenti:

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

In base al verso della disequazione e al segno del discriminante, le soluzioni della disequazione sono:

$$\forall x \in \mathbb{R}, con\ x \neq 5$$



Infatti, la disequazione di partenza può anche essere scritta:

$$(x-5)^2 > 0$$

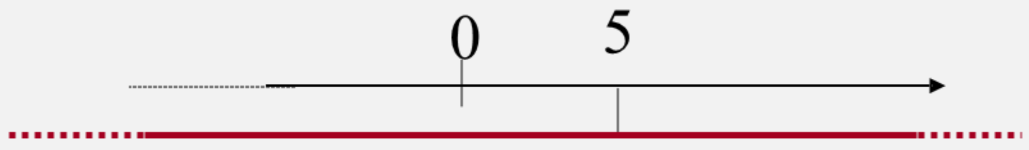
Se la disequazione fosse stata: $x^2 - 10x + 25 \geq 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 100 - 100 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Soluzione: $\forall x \in \mathbb{R}$

Infatti, è vero che: $(x-5)^2 \geq 0$ sempre!



Esercizio. Risolvere la seguente disequazione: $x^2 - 14x + 49 \leq 0$

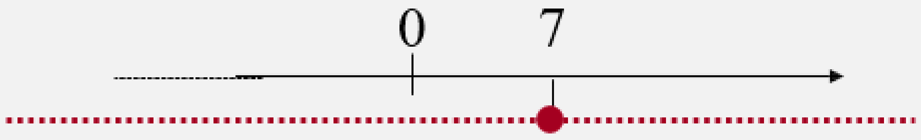
Soluzione: Si calcola il discriminante $\Delta = b^2 - 4ac = 196 - 196 = 0$

L'equazione associata ha due soluzioni reali coincidenti:

$$x_{1,2} = \frac{14 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

In base al verso della disequazione e al segno del discriminante, le soluzioni della disequazione sono:

$$x = 7$$



Infatti, la disequazione di partenza può anche essere scritta:

$$(x-7)^2 \leq 0$$

Esercizio. Risolvere la seguente disequazione: $-12x^2 - 5x \geq 2$

Soluzione: si può cambiare il segno a entrambi i membri, cambiando il verso della disequazione:

$$12x^2 + 5x + 2 \leq 0$$

Si calcola il discriminante $\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 96 = -71 < 0$

Se il discriminante è negativo, il trinomio $12x^2 + 5x + 2$ è sempre positivo.

In base al verso della disequazione e al segno del discriminante, la disequazione non ammette soluzioni:

$$\nexists x \in \mathbb{R}$$

Esercizio. Risolvere la seguente disequazione: $2x^2 - 3x > -2$

Soluzione: si può portare il -2 al primo membro:

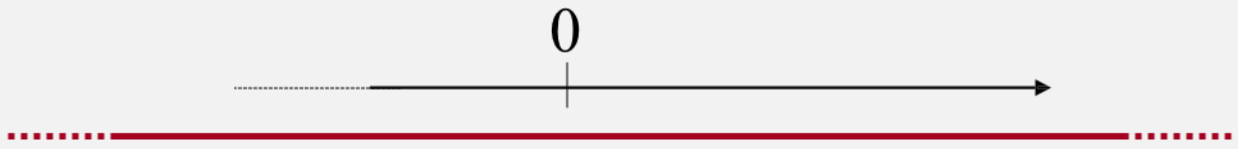
$$2x^2 - 3x + 2 > 0$$

Si calcola il discriminante $\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 16 = -7 < 0$

Se il discriminante è negativo, il trinomio $2x^2 - 3x + 2$ è sempre positivo.

In base al verso della disequazione e al segno del discriminante, la disequazione ammette infinite soluzioni:

$$\forall x \in \mathbb{R}$$



Esercizio. Risolvere la seguente disequazione: $\frac{x^2+3}{2} > \frac{2\sqrt{6}x - x^2}{2}$

Soluzione: la disequazione può essere riscritta come segue:

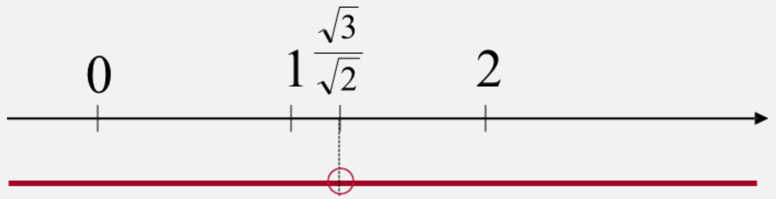
$$x^2 + 3 > 2\sqrt{6}x - x^2 \rightarrow x^2 + 3 - 2\sqrt{6}x + x^2 > 0 \ \rightarrow 2x^2 - 2\sqrt{6}x + 3 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{2\sqrt{6} \pm \sqrt{24-24}}{4} = \frac{2\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{6}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Le soluzioni dell'equazione sono reali e coincidenti; l'unica radice è:

$$x_1 = x_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Quindi la disequazione ha soluzioni: $\forall x \in \mathbb{R}, con\ x \neq \sqrt{\frac{3}{2}}$



Infatti, la disequazione di partenza può anche essere scritta:

$$2\left(x - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 > 0$$

Disequazioni in valore assoluto

Definizione

Il valore assoluto di x è uguale a:

- x se x è maggiore o uguale a zero
- $-x$ se x è minore di zero

$$|x| \rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ -x \end{cases}$$

Disequazioni in valore assoluto

Disequazioni con un solo valore assoluto e un polinomio al secondo membro

- $|A| > B \rightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ A > B \end{cases} \lor \begin{cases} A < 0 \\ -A > B \end{cases}$
- $|A| \geq B \rightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ A \geq B \end{cases} \lor \begin{cases} A < 0 \\ -A \geq B \end{cases}$
- $|A| < B \rightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ A < B \end{cases} \lor \begin{cases} A < 0 \\ -A < B \end{cases}$
- $|A| \leq B \rightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ A \leq B \end{cases} \lor \begin{cases} A < 0 \\ -A \leq B \end{cases}$

Disequazioni in valore assoluto

Disequazioni in valore assoluto con numero positivo n al secondo membro

- $|A| > n \ \rightarrow A < -n \vee A > n$
- $|A| \geq n \ \rightarrow A \leq -n \vee A \geq n$
- $|A| < n \ \rightarrow \begin{cases} A < n \\ A > -n \end{cases}$
- $|A| \leq n \ \rightarrow \begin{cases} A \leq n \\ A \geq -n \end{cases}$

Disequazioni in valore assoluto con numero negativo $-n$ al secondo membro

- $|A| > -n \ \rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$
- $|A| \geq -n \ \rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$
- $|A| < -n \ \rightarrow$ nessuna soluzione
- $|A| \leq -n \ \rightarrow$ nessuna soluzione

Disequazioni in valore assoluto con lo zero al secondo membro

- $|A| > 0 \ \rightarrow A \neq 0$
- $|A| \geq 0 \ \rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$
- $|A| < 0 \ \rightarrow$ nessuna soluzione
- $|A| \leq 0 \ \rightarrow A = 0$

Disequazioni in valore assoluto

Disequazioni con due o più valori assoluti

$$|A| + |B| \lesseqgtr C \quad \rightarrow \text{si studia il segno di } A \text{ e } B$$

- Si risolvono le disequazioni $A > 0$ e $B > 0$ e, dette ad esempio $x > a$ e $x > b$ le loro soluzioni, si rappresentano sul grafico

- Dall'osservazione del grafico, l'equazione si scinde nei seguenti sistemi:

$$\text{I} \begin{cases} x < a \\ -A - B \gtreqless C \end{cases} \quad \vee \quad \text{II} \begin{cases} a \leq x \leq b \\ A - B \gtreqless C \end{cases} \quad \vee \quad \text{III} \begin{cases} x > b \\ A + B \gtreqless C \end{cases}$$

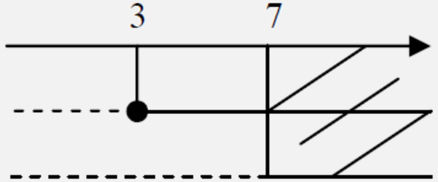
Esercizio. Risolvere la seguente disequazione: $|x-3|<4$

Dalla definizione di valore assoluto tale disequazione è equivalente all'unione dei due sistemi:

$$\begin{cases} x-3\geq 0 \\ x-3>4 \end{cases} \vee \begin{cases} x-3<0 \\ x-3<-4 \end{cases}$$

Risolvo il sistema (a)

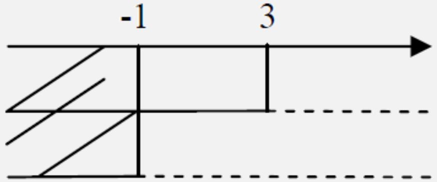
$$(a)\begin{cases} x\geq 3 \\ x>7 \end{cases}$$



$x>7$

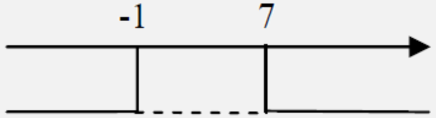
Risolvo il sistema (b)

$$(b)\begin{cases} x<3 \\ x<-1 \end{cases}$$



$x<-1$

Unisco le soluzioni:



Questa disequazione poteva essere risolta equivalentemente elevando al quadrato entrambi i membri:

$$|x-3|>4 \Leftrightarrow (x-3)^2>16 \Leftrightarrow x^2+9-6x-16>0 \Leftrightarrow x^2-6x-7>0 \Leftrightarrow x<-1 \text{ e } x>7$$

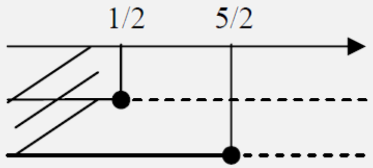
Esercizio. Risolvere la seguente disequazione: $|5-2x| \geq 4$

Dalla definizione di valore assoluto tale disequazione è equivalente all'unione dei due sistemi:

$$\begin{cases} 5-2x \geq 0 \\ 5-2x \geq 4 \end{cases} \vee \begin{cases} 5-2x < 0 \\ 5-2x \leq -4 \end{cases}$$

Risolvo il sistema (a)

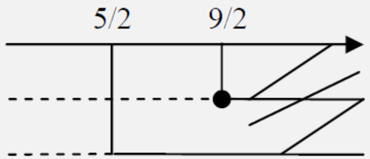
$$(a)\begin{cases} x \leq \dfrac{1}{2} \\ x \leq \dfrac{5}{2} \end{cases}$$



$$x \leq \frac{1}{2}$$

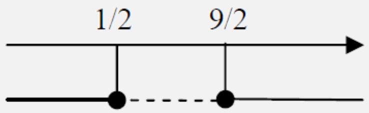
Risolvo il sistema (b)

$$(b)\begin{cases} x \geq \dfrac{9}{2} \\ x > \dfrac{5}{2} \end{cases}$$



$$x \geq \frac{9}{2}$$

Unisco le soluzioni:



$$|5-2x| \geq 4 \Leftrightarrow 25-20+4x^2 \geq 16 \Leftrightarrow 4x^2-20+9 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2} \text{ e } x \geq \frac{9}{2}$$

Disequazioni irrazionali

Disequazioni irrazionali con una radice quadrata ed un polinomio al secondo membro

- $\sqrt{A} > B \ \rightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} B \geq 0 \\ A > B^2 \end{cases}$

- $\sqrt{A} \geq B \ \rightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} B \geq 0 \\ A \geq B^2 \end{cases}$

- $\sqrt{A} < B \ \rightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B > 0 \\ A < B^2 \end{cases}$

- $\sqrt{A} \leq B \ \rightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \\ A \leq B^2 \end{cases}$

Disequazioni irrazionali

Disequazioni irrazionali con numero positivo n al secondo membro

- $\sqrt{A} > n \rightarrow A > n^2$
- $\sqrt{A} \geq n \rightarrow A \geq n^2$
- $\sqrt{A} < n \rightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ A < n^2 \end{cases}$
- $\sqrt{A} \leq n \rightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ A \leq n^2 \end{cases}$

Disequazioni irrazionali con numero negativo $-n$ al secondo membro

- $\sqrt{A} > -n \rightarrow A \geq 0$
- $\sqrt{A} \geq -n \rightarrow A \geq 0$
- $\sqrt{A} < -n \rightarrow$ nessuna soluzione
- $\sqrt{A} \leq -n \rightarrow$ nessuna soluzione

Disequazioni irrazionali con lo zero al secondo membro

- $\sqrt{A} > 0 \rightarrow A > 0$
- $\sqrt{A} \geq 0 \rightarrow A \geq 0$
- $\sqrt{A} < 0 \rightarrow$ nessuna soluzione
- $\sqrt{A} \leq 0 \rightarrow A = 0$

Disequazioni irrazionali

Disequazioni con due radici quadrate (o in generale indice pari)

- $\sqrt{A} > \sqrt{B} \rightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \\ A > B \end{cases}$

- $\sqrt{A} \geq \sqrt{B} \rightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \\ A \geq B \end{cases}$

- $\sqrt{A} < \sqrt{B} \rightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \\ A < B \end{cases}$

- $\sqrt{A} \leq \sqrt{B} \rightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \\ A \leq B \end{cases}$

Cioè per risolvere una disequazione con due radici quadrate, basta isolare le radici ai due membri e risolvere il sistema formato dai radicandi posti maggiori o uguali a zero e dalla disequazione ottenuta elevando al quadrato entrambi i membri

Disequazioni irrazionali

Disequazioni con radici cubiche

- Con una sola radice cubica: $\sqrt[3]{A} \gtrless B \ \rightarrow A \gtrless B^3$

- Con due radici cubiche: $\sqrt[3]{A} \lesseqgtr \sqrt[3]{B} \ \rightarrow A \lesseqgtr B$

Cioè, per risolvere una disequazione con radici cubiche, basta isolare la/e radice/i ed elevare entrambi i membri al cubo

Esercizio. Risolvere la seguente disequazione: $\sqrt[3]{x^3+3x^2}-x>1$

Isoliamo il termine irrazionale:

$$\sqrt[3]{x^3+3x^2}>x+1$$

Essendo una radice con indice dispari eleviamo entrambi i membri al cubo

$$\left(\sqrt[3]{x^3-3x^2}\right)^3>(x+1)^3 \quad \Rightarrow \quad x^3+3x^2>x^3+3x^2+3x+1 \quad \Rightarrow \quad 3x+1<0$$

$$R: x<-\frac{1}{3}$$

Esercizio. Risolvere la seguente disequazione: $x+1 > \sqrt{x^2+x-2}$

Riscriviamo tenendo il membro con la radice a sinistra:

$$\sqrt{x^2+x-2} < x+1$$

$$\sqrt{A} < B \; \rightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B > 0 \\ A < B^2 \end{cases}$$

$$\sqrt{x^2+x-2} < x+1 \quad \Rightarrow \begin{matrix} (a) \\ (b) \\ (c) \end{matrix} \begin{cases} x^2+x-2 \geq 0 \\ x+1 > 0 \\ x^2+x-2 < (x+1)^2 \end{cases}$$

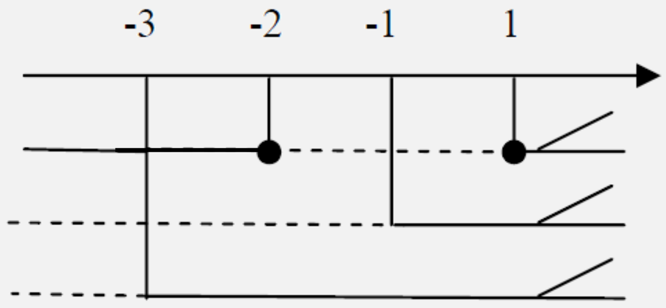
$(a)\; x^2+x-2 \geq 0$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = -2; 1 \quad \Rightarrow \quad x \leq -2 \quad e \quad x \geq 1$$

$(b)\; x+1 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > -1$

$(c)\; \cancel{x^2} + x - 2 < \cancel{x^2} + 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad x+3 > 0 \Rightarrow x > -3$

$$\begin{cases} x \leq -2; x \geq 1 \\ x > -1 \\ x > -3 \end{cases}$$



R: $x > 1$

FORMULE SEMPRE PRESENTI

- $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
- $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$
- $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 3y^3$
- $(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - 3y^3$

Esercizi. Risolvere le seguenti disequazioni di II grado:

- $x^2 + 3 > 0$
- $x^2 + 5 \leq 0$
- $x^2 + \sqrt{2} \geq 0$
- $x^2 - 3 \leq 0$
- $x^2 + 2x \leq 0$

Richiamo: i logaritmi

il logaritmo di un numero è l'esponente $\boldsymbol{x}$ da dare alla base $\boldsymbol{a}$ per ottenere l'argomento $\boldsymbol{b}$ cioè: $\boldsymbol{a^x = b}$

$log_a(b) = x$ si legge: logaritmo in base $\boldsymbol{a}$ di $\boldsymbol{b}$ è uguale a $\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{a}$ si chiama **base** $\boldsymbol{b}$ si chiama **argomento** $\boldsymbol{x}$ è il **logaritmo** in base a di b	la base $\boldsymbol{a}$ deve essere: $\boldsymbol{a} > 0$ e $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{1}$ l'argomento $\boldsymbol{b}$ deve essere: $\boldsymbol{b} > 0$ il logaritmo $\boldsymbol{x}$ è un numero reale $\mathbb{R}$

Proprietà:

$log_a(a) = 1$	$log_a(1) = 0$	$a^x > 0$

Alcuni teoremi:

$log_a(b \cdot c) = log_a(b) + log_a(c)$	teorema del prodotto	$log_2(3 \cdot x) = log_2(3) + log_2(x)$
$log_a\left(\frac{b}{c}\right) = log_a(b) - log_a(c)$	teorema del rapporto	$log_2\left(\frac{x}{3}\right) = log_2(x) - log_2(3)$
$log_a(b)^c = c\ log_a(b)$	teorema della potenza	$log_2(x)^3 = 3\ log_2(x)$