

Focus: limiti

➤ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + x^2 + 2) = +\infty$

➤ $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{0}{0} \rightarrow$ forma indeterminata

$$\frac{(-1)^2 - 1}{-1 + 1} \rightarrow \frac{0}{0}$$

Scomponiamo il limite: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x-1) = -2 \neq \frac{0}{0}$

➤ $\lim_{x \rightarrow 7} e^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 7} \frac{1}{x}} = e^{1/7}$

➤ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 - 1}{2x^2 + 2} = \frac{+\infty}{+\infty} \rightarrow$ forma indeterminata

$$\frac{x^3 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right)}{x^2 \left(2 + \frac{2}{x^2}\right)}$$

Scomponiamo il limite: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right)}{x^2 \left(2 + \frac{2}{x^2}\right)} = \frac{+1+0-0}{0+0} = \frac{+1}{0} = +\infty$

Esercizio esemplificativo sul limite notevole: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

➤ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x, a \in \mathbb{R}$

DIMOSTRAZIONE
↓

Il limite notevole originale veniva da $1^\infty = e$. Anche questa variazione viene da 1^∞ , ma avendo una a non posso usare la forma del limite notevole: devo ricondurlo a tale forma:

$$y = \frac{x}{a} \rightarrow x = ya$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{a}}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^x, y = \frac{x}{a} \Rightarrow x \rightarrow +\infty : y = +\frac{\infty}{a} = +\infty$$

y

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{ya} \Leftrightarrow a > 0, a \in \mathbb{R}^+$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y\right]^a = e^a \quad \text{la stessa cosa vale per } a < 0, a \in \mathbb{R}^-$$

↓
 $e^a, a = \frac{1}{3} \rightarrow e^{1/3}$

Esercizio esemplificativo sul limite notevole: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

➤ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^x$

Altra variazione dello stesso limite notevole. Chiamo $3x = y$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^x = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y \right]^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}}$$

Lo si può capire anche scrivendo: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1/3}{x}\right)^x$

Se $x \rightarrow +\infty$, anche $3x \rightarrow +\infty$

In questo modo, 1/3 sarebbe la a , che va come esponente di e

Focus: limiti

$$\blacktriangleright \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2+\cos x}{3-x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2+\cos x}{3-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \underbrace{\frac{2}{x}}_{\downarrow 0} + \underbrace{\frac{\cos x}{x}}_{\downarrow 0} \right)}{x \left(\underbrace{\frac{3}{x}}_{\downarrow 0} - 1 \right)} = -1$$

$$\blacktriangleright \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x (\cos x - 2 \sin x) = 1$$

Prodotto di funzioni continue: il limite si valuta calcolando il valore della funzione in quel punto

$$\blacktriangleright \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \sin e^x}{2x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + \sin e^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(1 + \underbrace{\frac{\sin e^x}{x^2}}_{\downarrow 0} \right)}{2x} = -\infty$$

Focus: limiti

$$\blacktriangleright \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3\sqrt{x}}{2x-5\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3\sqrt{x}}{2x-5\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \underbrace{\frac{3}{\sqrt{x}}}_{\downarrow 0} \right)}{x \left(2 - \underbrace{\frac{5}{\sqrt{x}}}_{\downarrow 0} \right)} = \frac{1}{2}$$

$$\blacktriangleright \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} & \psi = x - \frac{\pi}{2} \\ & \uparrow \\ & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2} \stackrel{x - \frac{\pi}{2} = y}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right) - 1}{y^2} \\ & = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \cos y - 1}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos y - 1}{y^2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\blacktriangleright \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 2 \log(1+x)}{x + \sin x} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 2 \log(1+x)}{x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \left(\frac{\sin x}{x} - 2 \frac{\log(1+x)}{x} \right)}{x \left(1 + \frac{\sin x}{x} \right)} = -\frac{1}{2}$$

↖ 1 ↖ e
↘ 1

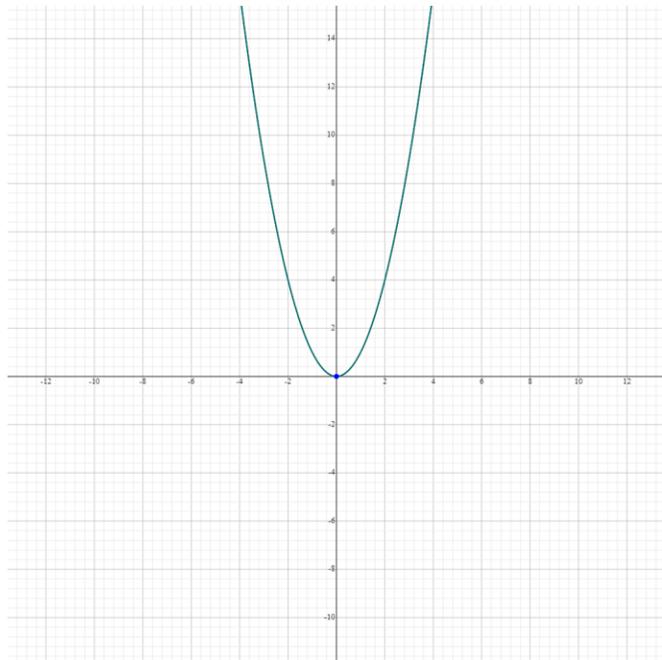
Ricorda: limiti notevoli \rightarrow $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$

Esercizio. Valutare dominio, continuità e limiti.

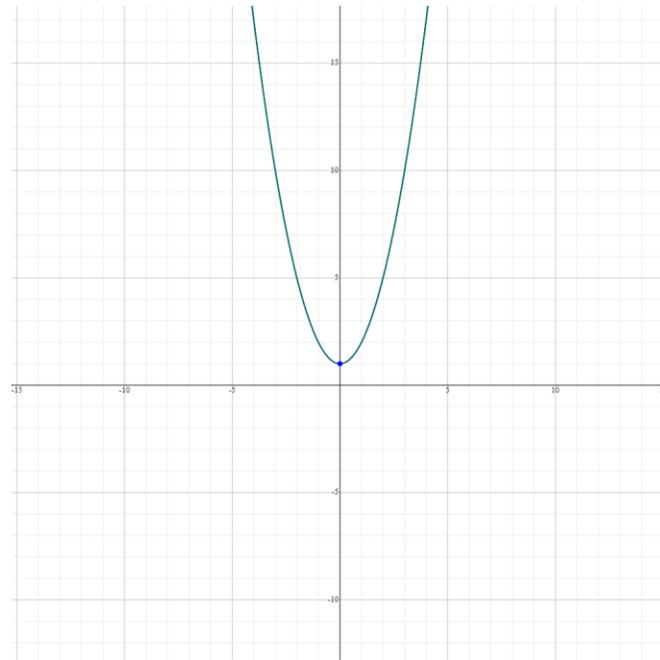
$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \quad \hookrightarrow \quad x^2 + 1 > 0 \quad x^2 > -1 \rightarrow \text{sempre}$$

➤ $D_f = \mathbb{R}$

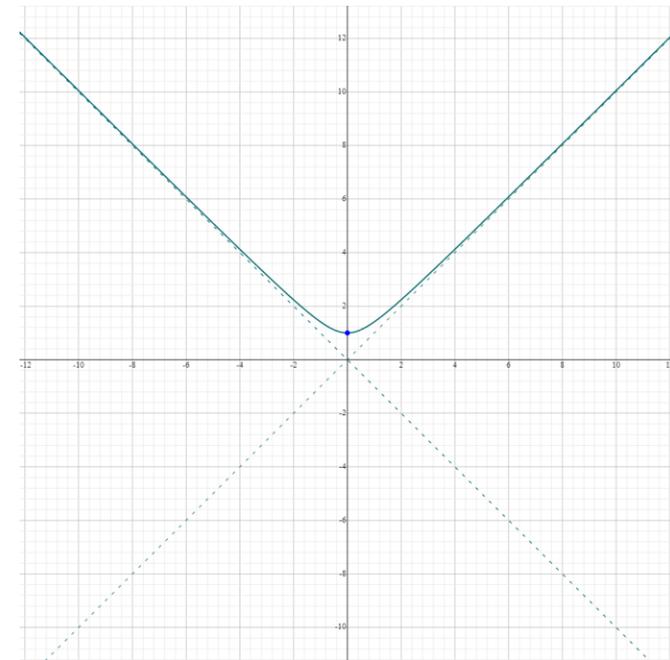
➤ la parabola è continua, la radice è continua, quindi la composizione di due funzioni continue dà una funzione continua



$$f(x) = x^2$$



$$f(x) = x^2 + 1$$

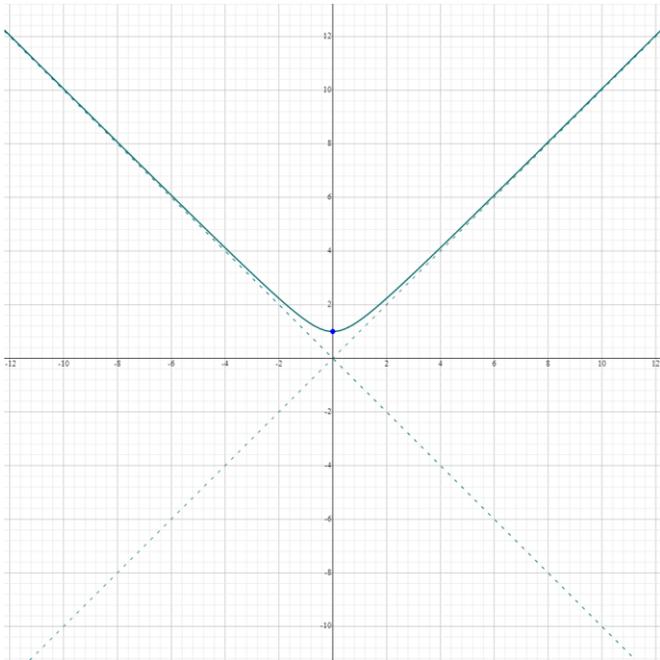


$$f(x) = (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2 + 1}$$

Esercizio. Valutare dominio, continuità e limiti.

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

- $D_f = \mathbb{R}$
- la parabola è continua, la radice è continua, quindi la composizione di due funzioni continue dà una funzione continua



Ricordando:

- Se $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = k \rightarrow$ asintoto orizzontale
- Se $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm\infty \rightarrow$ asintoto verticale
- Se $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty \rightarrow$ asintoto obliquo, con

$$\text{➤ } m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

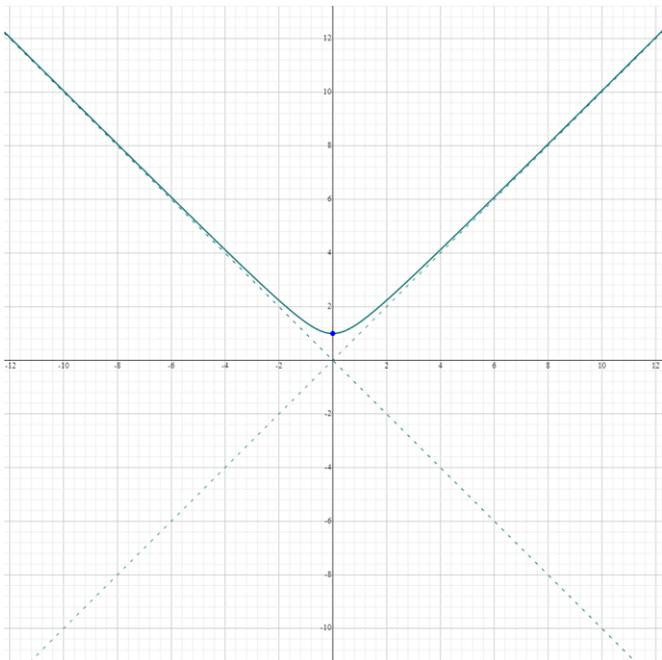
$$\text{➤ } q = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx]$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty \rightarrow \text{as. obliquo!}$$

Esercizio. Valutare dominio, continuità e limiti.

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

- $D_f = \mathbb{R}$
- la parabola è continua, la radice è continua, quindi la composizione di due funzioni continue dà una funzione continua



$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty \rightarrow \text{as. obliquo!}$$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1$$

$$q = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - 1x = \infty - \infty \rightarrow f.i.$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - 1x \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1} + 1x}{\sqrt{x^2 + 1} + 1x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + 1x} = \frac{1}{+\infty + \infty} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

$$m = 1, q = 0 \rightarrow y = 1x + 0 = x$$

$$\text{cosa accade per } -\infty? \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = -1 \rightarrow y = -x$$

So che le x che prendo sono negative

$$f(x) = x(x^2 - 1)^2$$

ASINTOTI?

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x(x^2 - 1)^2 = \pm\infty \quad \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x(x^2 - 1)^2} \right\} ? \text{ OBLIQUO}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x(x^2 - 1)^2}{x} = \pm\infty \quad \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x(x^2 - 1)^2}{x}} \right\} ? \text{ NO ORIZZ. , VERT.}$$

NO OBLIQUO

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

$$x-1 \neq 0$$

$$x \neq 1 \rightarrow D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x+1}{x-1} = 1 \rightarrow \text{qs. horizontale}$$

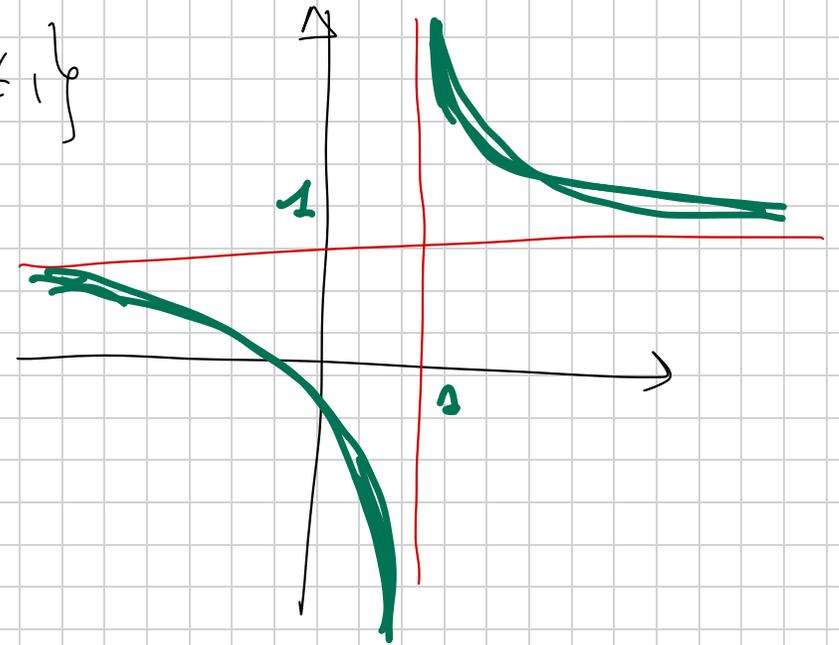
$$y = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x-1} = \frac{0}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \frac{0}{0^+} = +\infty$$

qs. vert.

$$x = 1$$



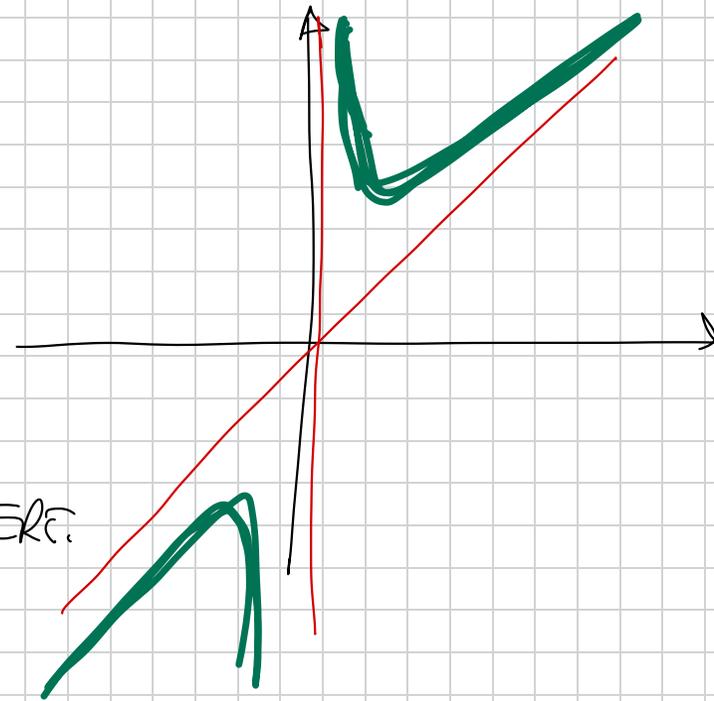
$$f(x) = \frac{x^2+3}{x} \quad x \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2+3}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x} = \pm\infty \quad \text{AS. ORT?$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2+3}{x} = \infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2+3}{x} = -\infty \rightarrow \text{AS. VERT.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2+3}{x} \cdot \frac{1}{x} = 1 = m \quad y = x + \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] = 0 \rightarrow q \quad y = mx + q = x$$



$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 1} \rightarrow x + 1 \neq 0 \rightarrow \underline{x \neq -1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^2 - 4}{x + 1} = \pm \infty \rightarrow \text{not horiz.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - 4}{x + 1} = \frac{-3}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 4}{x + 1} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$

} VERT.

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{x^2 - 4}{x + 1} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x^2 - 4}{x^2 + x} = 1 = m$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) - mx = \frac{x^2 - 4}{x + 1} - 1 \cdot x = -1 = q$$

} OBLIQUE $\rightarrow y = x - 1$

