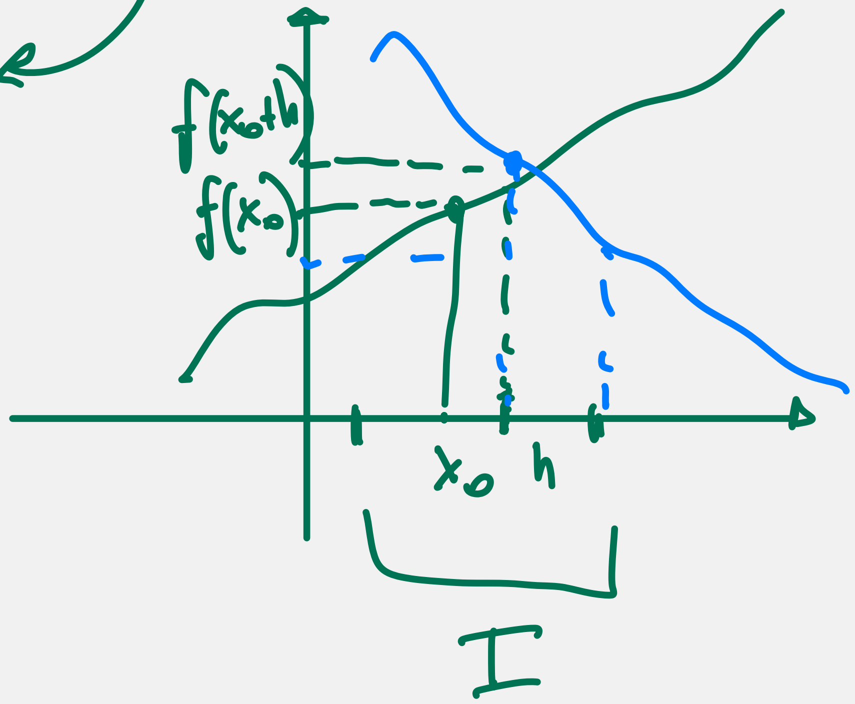
- **DERIVATA DI UNA FUNZIONE**

Definizioni: punto interno e rapporto incrementale

Sia I un intervallo non vuoto. Diciamo che $x_0 \in I$ è **interno** ad I se $\exists r > 0 : (x_0 - r, x_0 + r) \subset I$. Inoltre, $I \subseteq D_f$ (la funzione è definita per ogni punto di I).

Siano $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$, interno ad I. Dato $h \in \mathbb{R}, h \neq 0$, chiamiamo **rapporto incrementale** di f relativo a x_0 e all'incremento h il quoziente:

$$\boxed{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$$



Rapporto incrementale negativo → La funzione *f(x)* decresce passando da *x* a *x+h*

Rapporto incrementale positivo → La funzione *f(x)* cresce passando da *x* a *x+h*

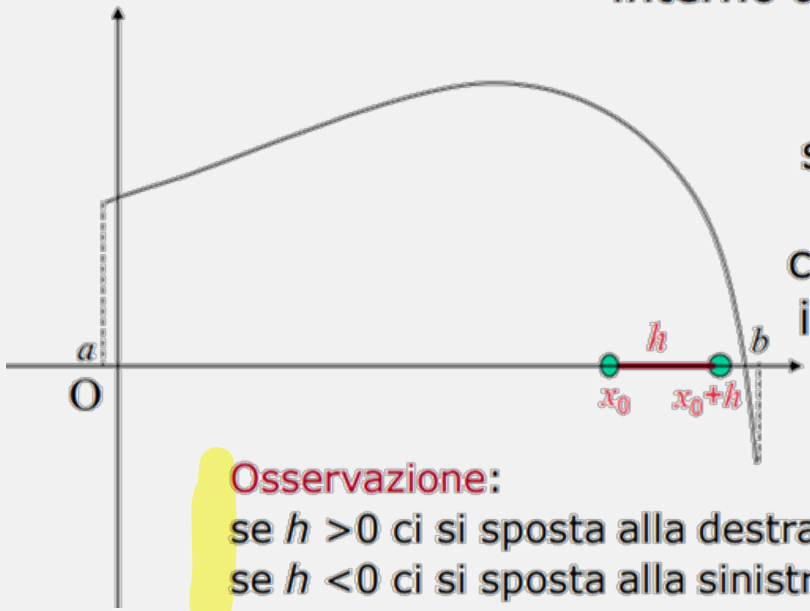
Incremento della variabile x

Sia assegnata una funzione $f(x)$ in un intervallo $[a,b]$ e sia x_0 un fissato punto interno all'intervallo $[a,b]$.

Si passi dal punto x_0 ad un altro punto interno all'intervallo $[a,b]$

$\Downarrow$

si fornisce cioè un certo incremento, che chiamiamo h, al valore x_0 in modo tale da trovarsi ancora nell'intervallo $[a,b]$



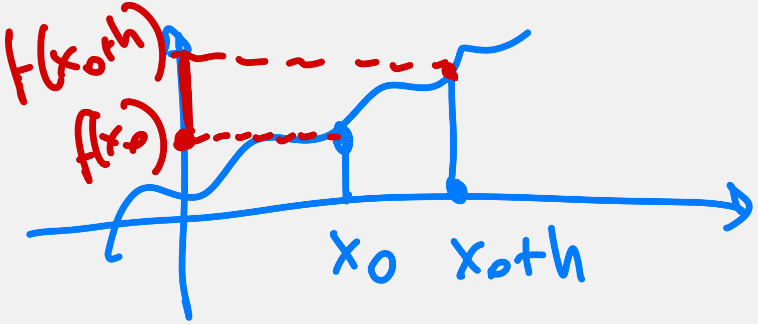
Osservazione:
se $h>0$ ci si sposta alla destra di x_0
se $h<0$ ci si sposta alla sinistra di x_0

Il passaggio da x_0 ad x_0+h lungo l'asse delle ascisse viene detto

incremento della variabile x

e coincide col valore $h=(x_0+h)-(x_0)$

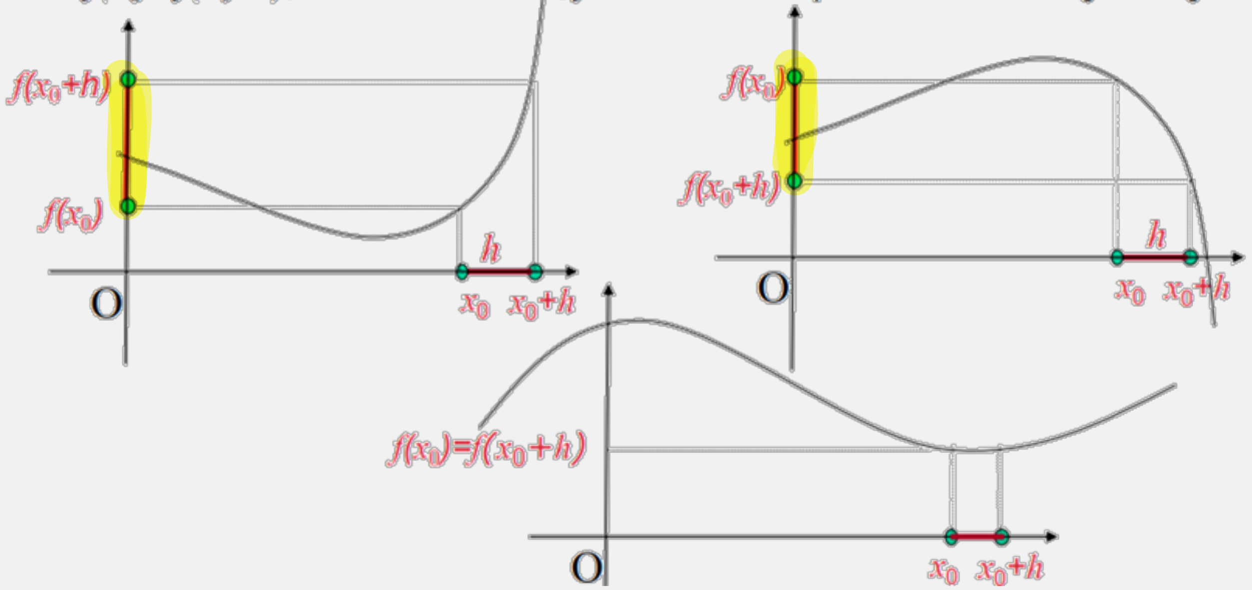
Incremento della funzione $f(x)$



Calcoliamo il valore dell'incremento della funzione f nel passaggio da x_0 ad x_0+h con $x_0<x_0+h$

Le immagini mediante f dei punti x_0 e x_0+h sono rispettivamente $f(x_0)$ ed $f(x_0+h)$

- se $f(x_0)<f(x_0+h)$, *incremento positivo*, f cresce passando da x_0 ad x_0+h
- se $f(x_0)>f(x_0+h)$, *incremento negativo*, f decresce passando da x_0 ad x_0+h
- se $f(x_0)=f(x_0+h)$, *incremento nullo*, f è costante passando da x_0 ad x_0+h



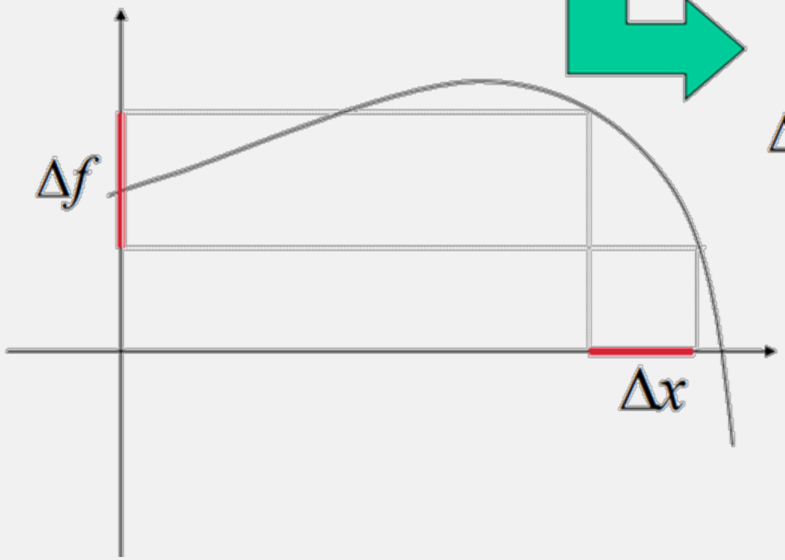
La differenza $f(x_0+h)-f(x_0)$
tra i valori che la funzione assume
nel passare da x_0 ad x_0+h
si chiama
incremento
della funzione f

Rapporto incrementale

$$\Delta x = \cancel{x_0}+h - \cancel{x_0} = h$$

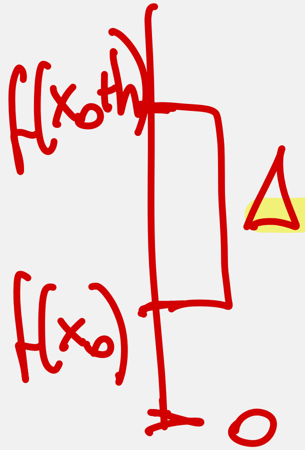
L'incremento della variabile x viene indicato col simbolo Δx

L'incremento della funzione f viene indicato col simbolo Δf



$$\Delta x = x_0 + h - x_0$$

$$\Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0)$$



$$\Delta f = f(x_0+h) - f(x_0)$$

Il rapporto tra l'incremento della variabile x nel passaggio da x_0 ad x_0+h e l'incremento della funzione f viene detto

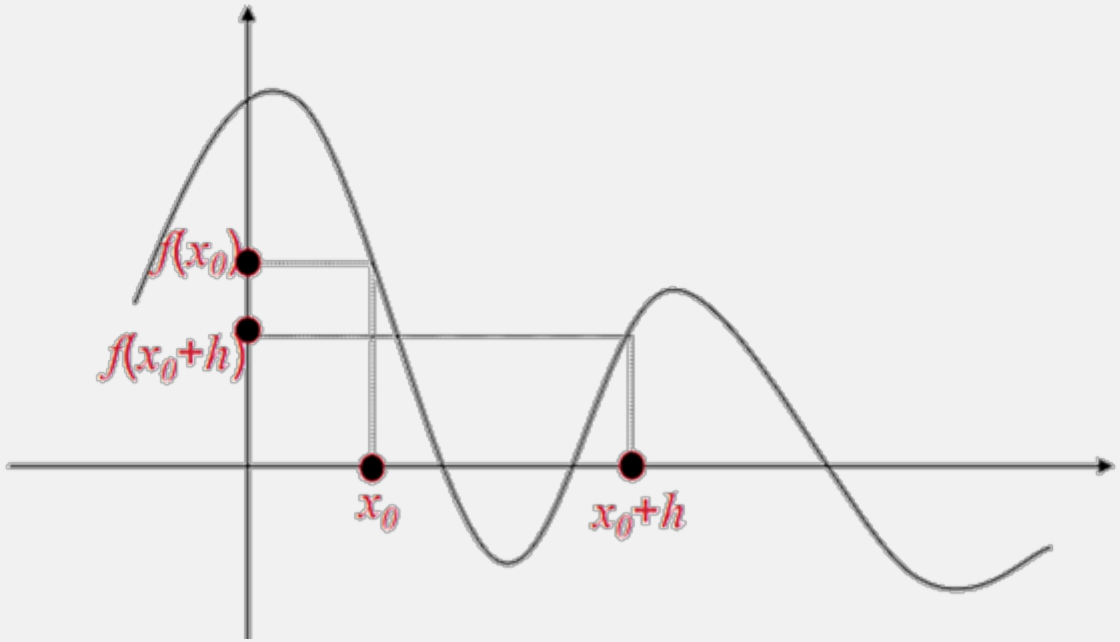
rapporto incrementale

della funzione f relativo al passaggio da x_0 ad x_0+h

$$\boxed{\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

Il rapporto incrementale esprime la "variabilità di f" relativamente ad un certo intervallo

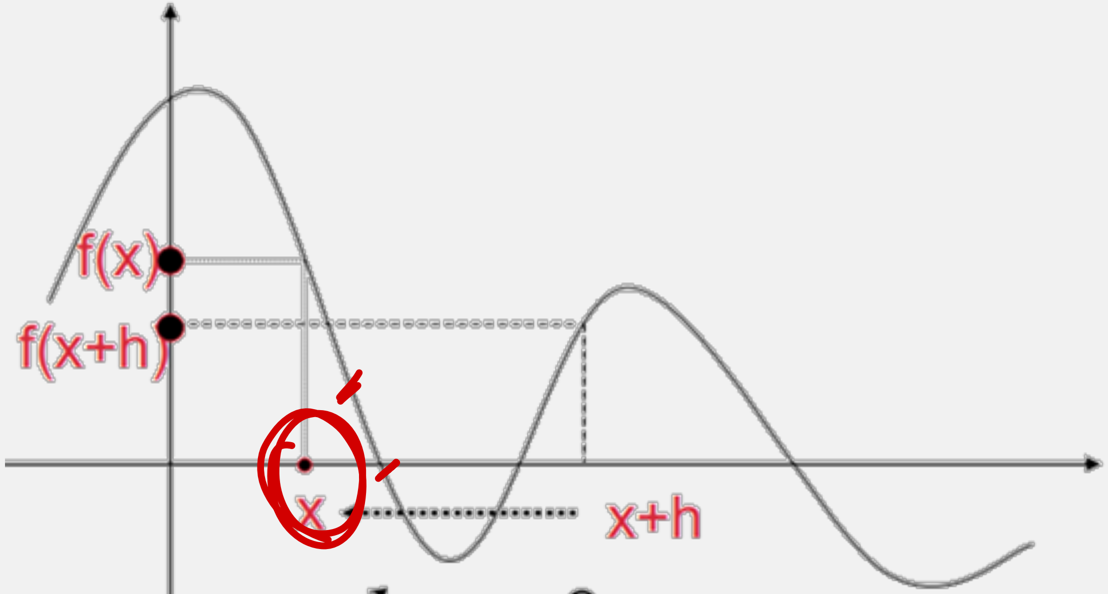
Rapporto incrementale



Dal grafico che segue si vede chiaramente che il rapporto incrementale della funzione considerata nel passaggio da x_0 a $x_0 + h$ è negativo.
Quindi la funzione considerata sicuramente decresce nel passaggio da x_0 a $x_0 + h$ ma <u>non decresce in tutto l'intervallo</u> $[x_0\,, x_0 + h]$ (dove infatti è prima decrescente e poi crescente)

Quindi: il rapporto incrementale fornisce informazioni circa la crescita di una funzione <u>solo relativamente al passaggio da x a $x + h$</u>. Non fornisce informazioni circa la monotonia intorno ad un singolo punto

Rapporto incrementale→ info puntuale



$h \to 0$

$\Delta x \to 0$

Un'informazione puntuale in un punto x_0 circa la monotonia richiede che si consideri un " intervallo $[x_0\,, x_0 + h]$ molto piccolo" che si ottiene quando il punto $x_0 + h$ si avvicina al punto x_0 e cioè quando l'incremento h diventa sempre più piccolo

$x+h\,,\ h \to 0$

$\Delta x \to 0$

$x+h \to x$

Definizioni: derivata

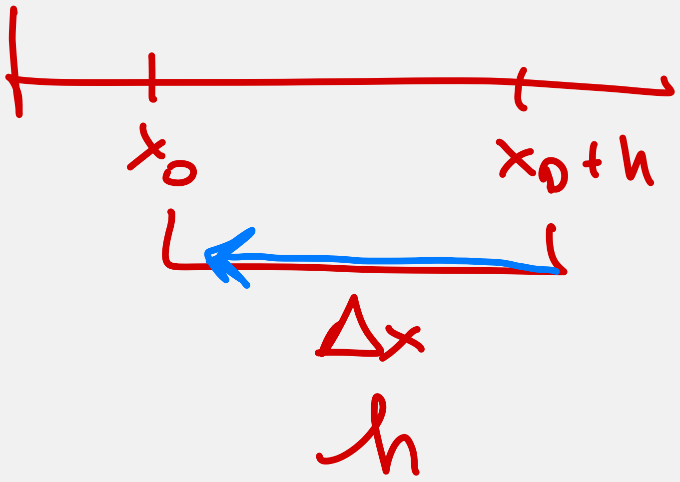
Sia assegnata una funzione $f(x)$ in un intervallo $[a,b]$ e sia x_0 un fissato punto interno all'intervallo $[a,b]$.

Si definisce derivata della funzione $f(x)$ nel punto x_0 il limite, se esiste ed è finito, del rapporto incrementale di f nel passaggio da x ad $x+h$, al tendere a zero dell'incremento h della variabile indipendente x:

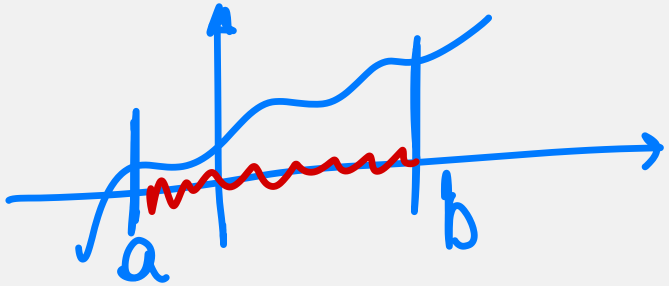
$$D\big(f(x_0)\big) = \frac{df(x_0)}{dx} = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Derivata della funzione f nel punto x

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$



Definizioni: derivata



[a, b]

$$D\big(f(x_0)\big) = \frac{df(x_0)}{dx} = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

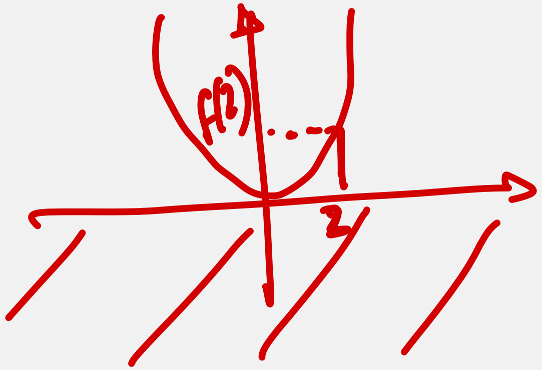
La derivata di una funzione $f(x)$ in un punto x_0 interno all'intervallo di definizione, quando esiste, è un numero.

Se $f(x)$ è definita in un intervallo $[a, b]$, agli estremi a e b dell'intervallo si può parlare solo di derivata rispettivamente destra e sinistra.

Si dice che una funzione $f(x)$ è **derivabile** in un intervallo $[a, b]$ se è derivabile in ogni punto dell'intervallo $[a, b]$ e se ammette derivata destra in a e derivata sinistra in b.

Esempio.

Verificare la derivabilità della funzione $f(x) = x^2$ nel punto $x_0 = 2$.



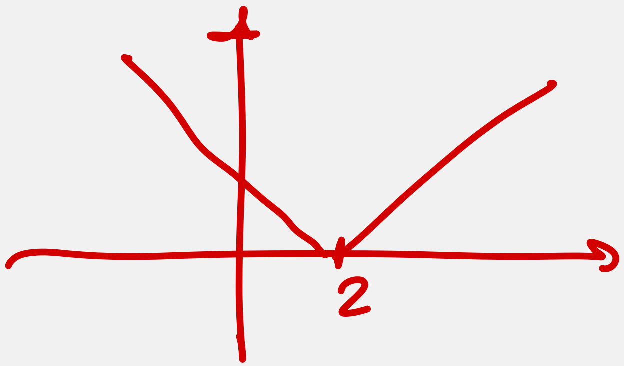
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(\cancel{x_0}+h)-\cancel{x_0}} = \frac{(2+h)^2-(2)^2}{h} = \frac{\cancel{4}+4h+h^2\cancel{-4}}{h} =$$

$$= \frac{h^2+4h}{h} = h+4 \quad \Rightarrow \lim_{h\to 0} h+4 = 4$$

$$\frac{\cancel{h}(h+4)}{\cancel{h}}$$

La funzione $f(x) = x^2$ risulta derivabile in $x_0 = 2$: $f'(2) = 4$

Derivabilità e continuità



Qual è il legame tra derivabilità e continuità di una funzione in un punto x_0?

Teorema.

Se $f(x)$ è derivabile in un punto $x_0 \in (a, b)$, allora $f(x)$ è continua in x_0

Quindi, la derivabilità in un punto implica la continuità nello stesso punto.
Però, NON vale il viceversa: una funzione continua in un punto x_0 può non essere derivabile in x_0

Esempio.

$f(x) = |x - 2|$ è una funzione definita e continua in tutto $\mathbb{R}$, quindi anche nel punto $x_0 = 2$

Verifichiamo la derivabilità:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{f(2+h)-f(2)}{h} =$$

$$= \frac{|\cancel{2}+h-\cancel{2}|-|\cancel{2-2}|}{h} = \frac{|h|}{h}$$ passando al limite per h->0

$$\lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h} = \begin{cases} \lim\limits_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} 1 = 1 \\ \lim\limits_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} (-1) = -1 \end{cases}$$

Dal momento che la funzione ammette in $x_0 = 2$ derivata destra e sinistra finite ma diverse fra loro, non è derivabile in questo punto
(pur essendo continua in questo punto)

Derivabilità e continuità

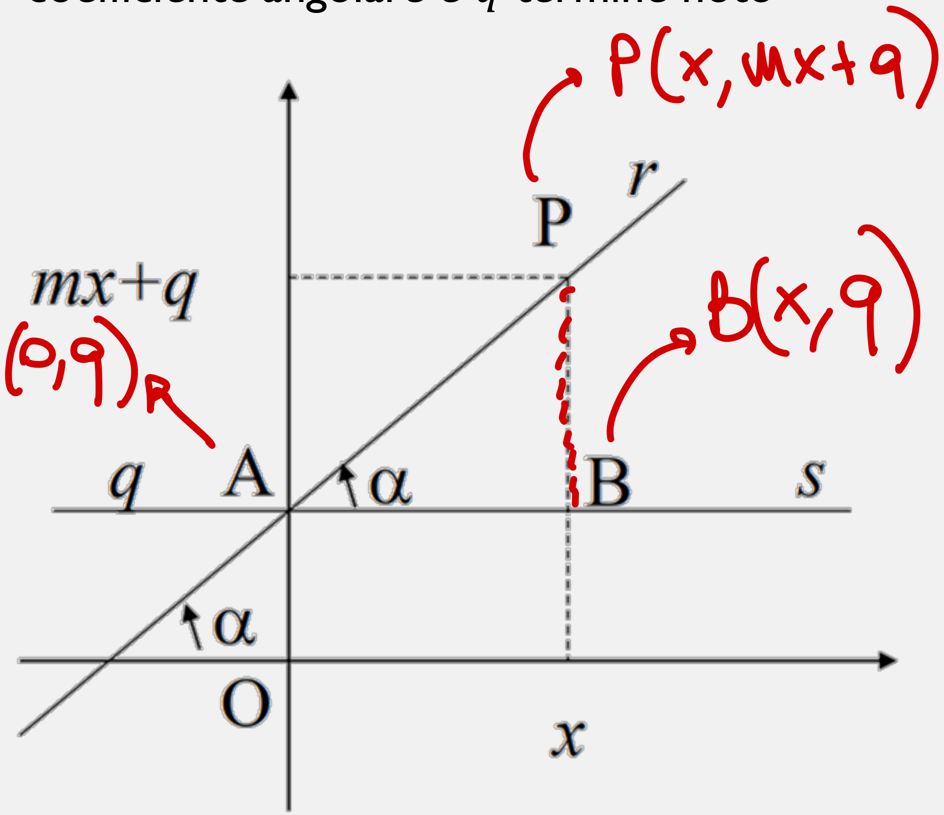
Se $f(x)$ è derivabile in un punto $x_0 \in (a, b)$, allora $f(x)$ è continua in x_0

Dal teorema enunciato segue immediatamente che: <u>nei punti di discontinuità una funzione non può ammettere derivata</u>.

Cioè, se $f(x)$ non è continua in un punto $x_0 \in (a, b)$, allora $f(x)$ non è derivabile in x_0

Significato geometrico della derivata

Ricordiamo:
Nel piano cartesiano, consideriamo una retta r non parallela all'asse delle ordinate di equazione $y = mx + q$, con m coefficiente angolare e q termine noto



La retta r: $y = mx + q$ forma l'angolo α con l'asse x e il punto A ha coordinate $A = (0, q)$.

Il generico punto P sulla retta r ha coordinate $P = (x, mx + q)$.

Sia s la retta passante per il punto A e parallela all'asse delle ascisse.

Infine, indichiamo con B il punto di intersezione tra la retta s e la perpendicolare da P all'asse delle ascisse, di coordinate $B(x, q)$.

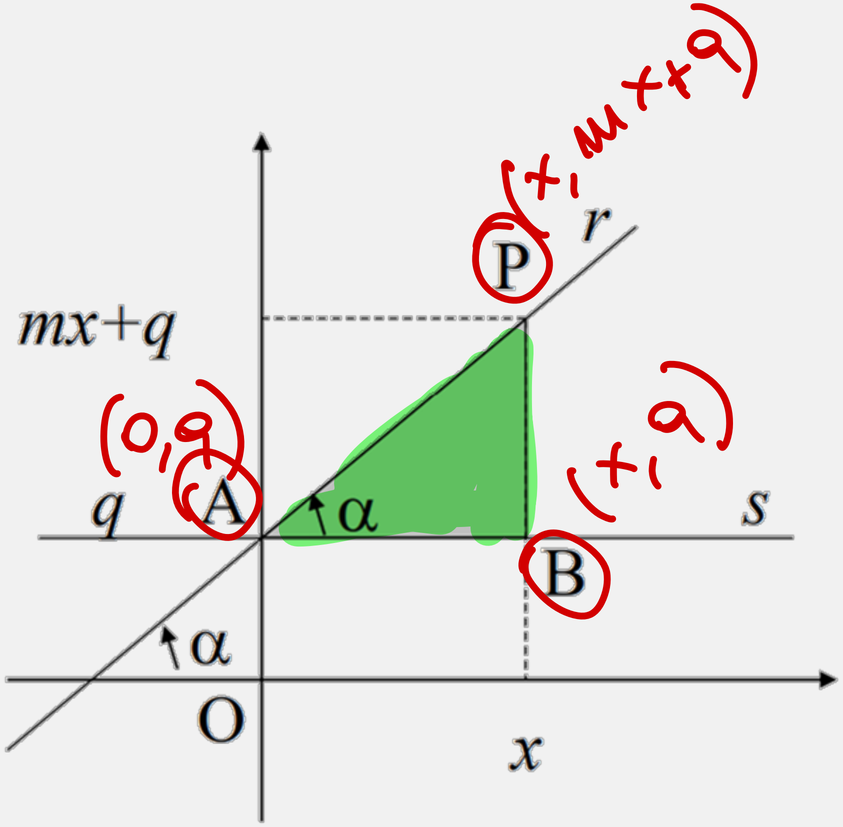
L'angolo $PAB = \alpha$

Significato geometrico della derivata

Pitagora

Ricordiamo:

Significato geometrico del coefficiente angolare di una retta



$$A = (0, q)$$
$$P(x, mx + q)$$
$$B(x, q)$$
$$PAB = \alpha$$

Consideriamo il triangolo rettangolo in B:

$$BP = AP\ sen\ \alpha \qquad \frac{BP}{AB} = \frac{AP\ sen\,\alpha}{AP\ cos\,\alpha} = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = tan\,\alpha$$
$$AB = AP\ cos\ \alpha$$

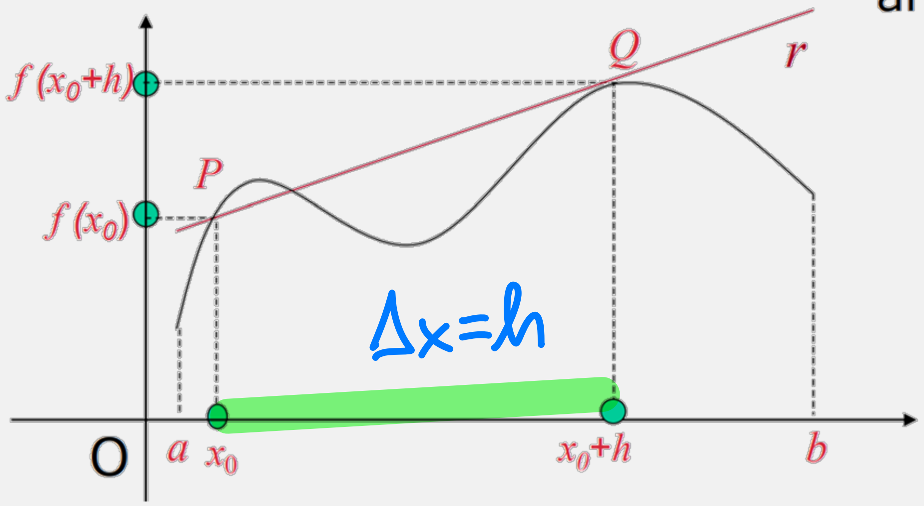
$$\boxed{\Rightarrow \frac{BP}{AB} = tan\,\alpha}$$

$$BP = (mx + q) - q = mx \qquad \frac{BP}{AB} = \frac{mx}{x} = m$$
$$AB = (x)\text{-}0 = x$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{BP}{AB} = m}$$

Significato geometrico della derivata

Sia assegnata una funzione $f(x)$ derivabile in un intervallo $[a, b]$ e sia x_0 un fissato punto interno all'intervallo $[a, b]$. Si passi dal punto x_0 ad un altro punto $x_0 + h$ interno all'intervallo $[a, b]$ in modo tale da potere considerare i corrispondenti valori di f.



indichiamo i due punti appartenenti al grafico di f con:

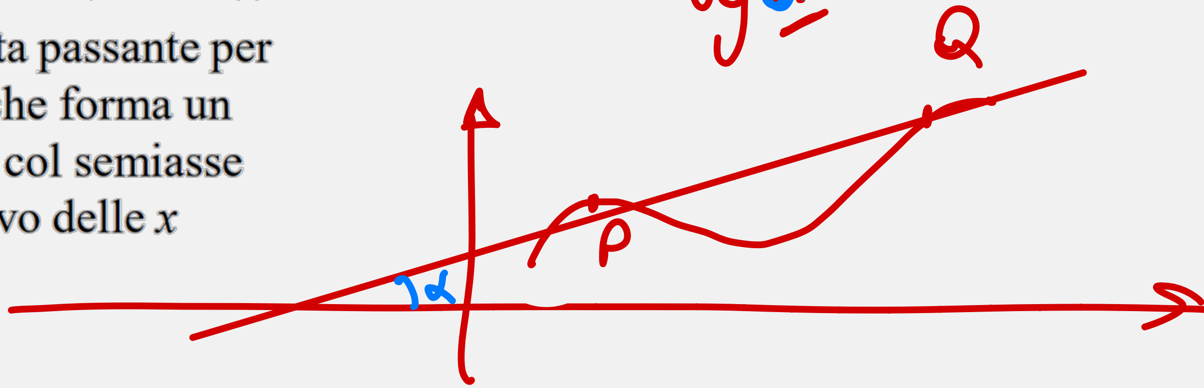
$$P(x_0, f(x_0))$$

$$Q(x_0 + h, f(x_0 + h))$$

Sia r la retta passante per P e Q e che forma un angolo α col semiasse positivo delle x

$r \to y = m x + q$

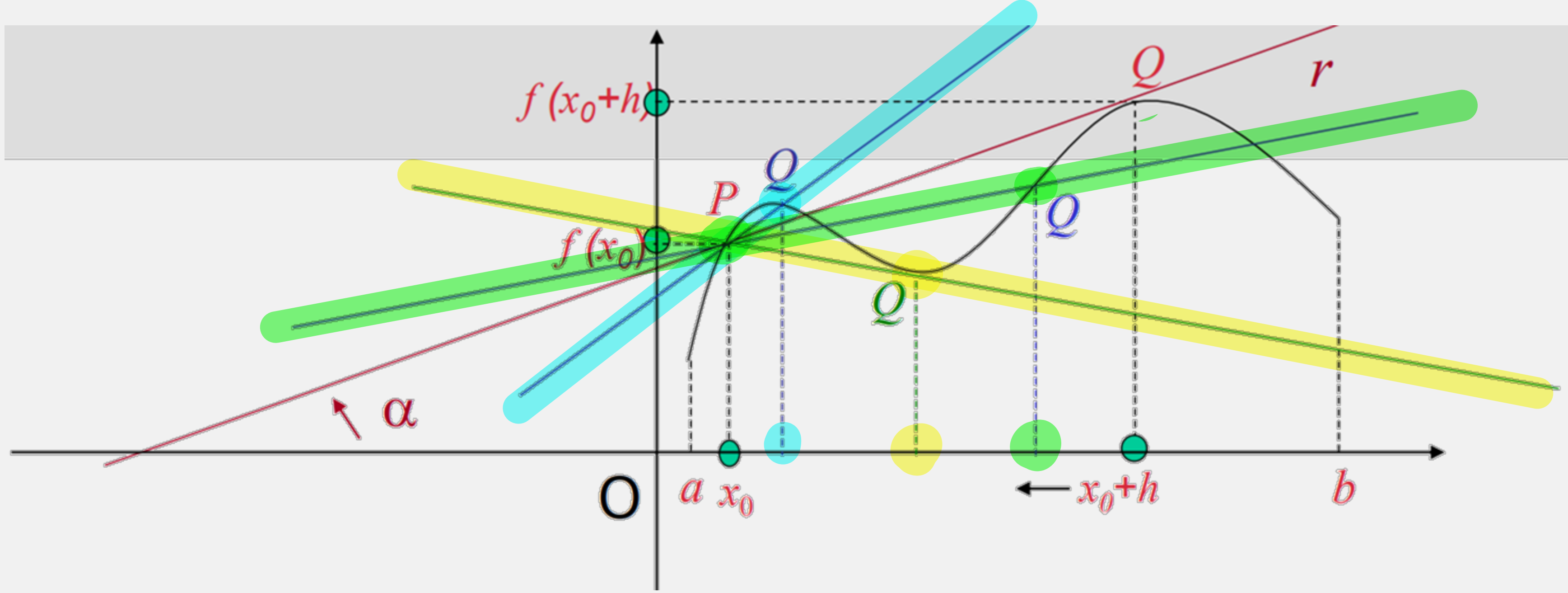
$\operatorname{tg} \alpha$



Significato geometrico della derivata

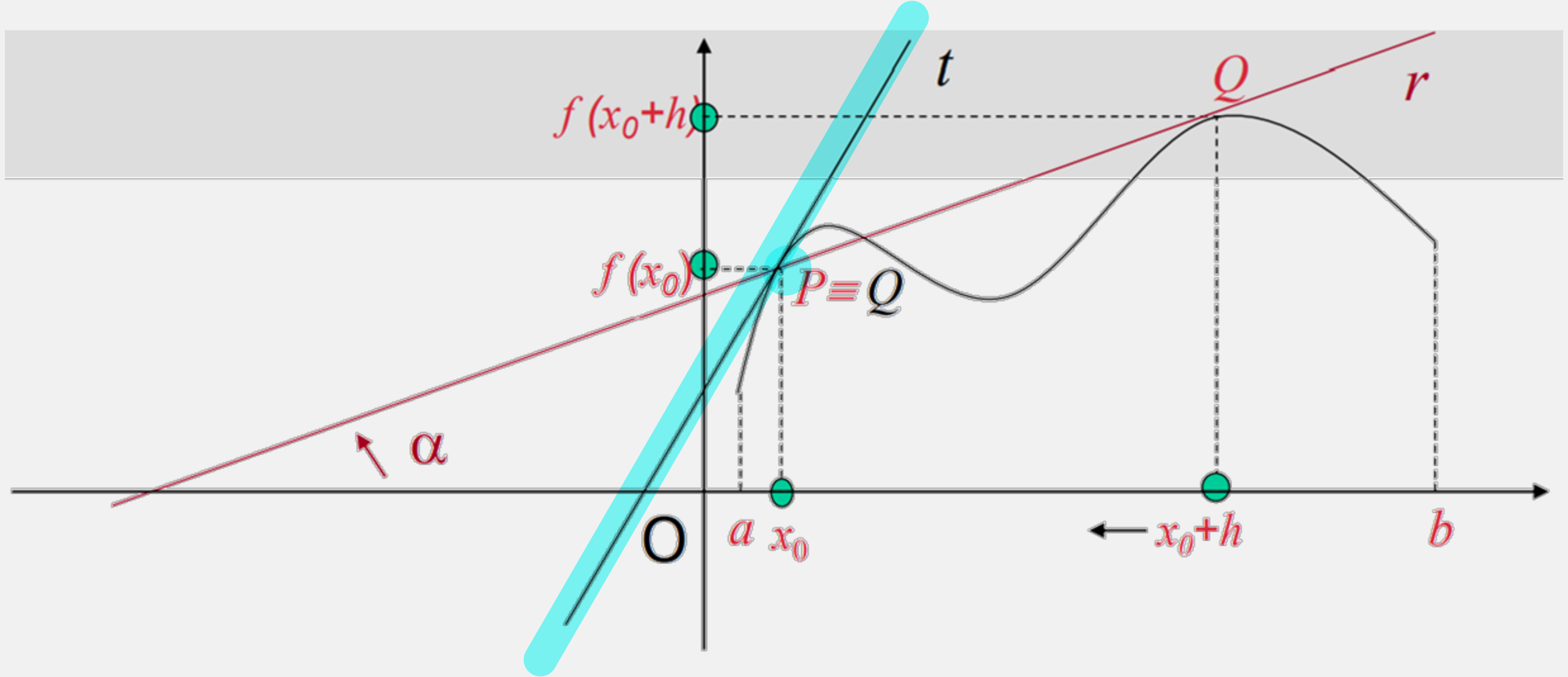
Da un punto di vista geometrico, quando $h \to 0$ il punto $P(x_0, f(x_0))$ rimane fisso, mentre il punto $Q(x_0 + h, f(x_0 + h))$ si muove verso il punto P lungo la curva grafico della funzione f.
Contemporaneamente, spostandosi il punto Q verso il punto P, la retta passante per P e Q varia, in particolare in termini di pendenza → varia il suo coefficiente angolare

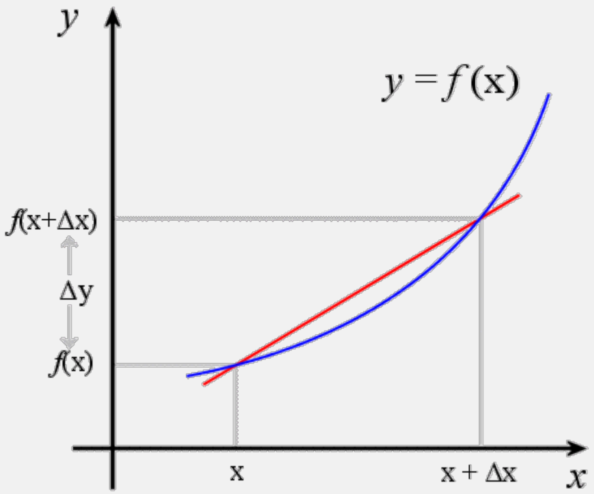
a un punto di vista geometrico, quando $h \to 0$ il punto $P(x_0, f(x_0))$ rim
)) si muove verso il punto P lungo la curva grafico della funzione f.
ontemporaneamente, spostandosi il punto Q verso il punto P, la retta p
i pendenza → varia il suo coefficiente angolare



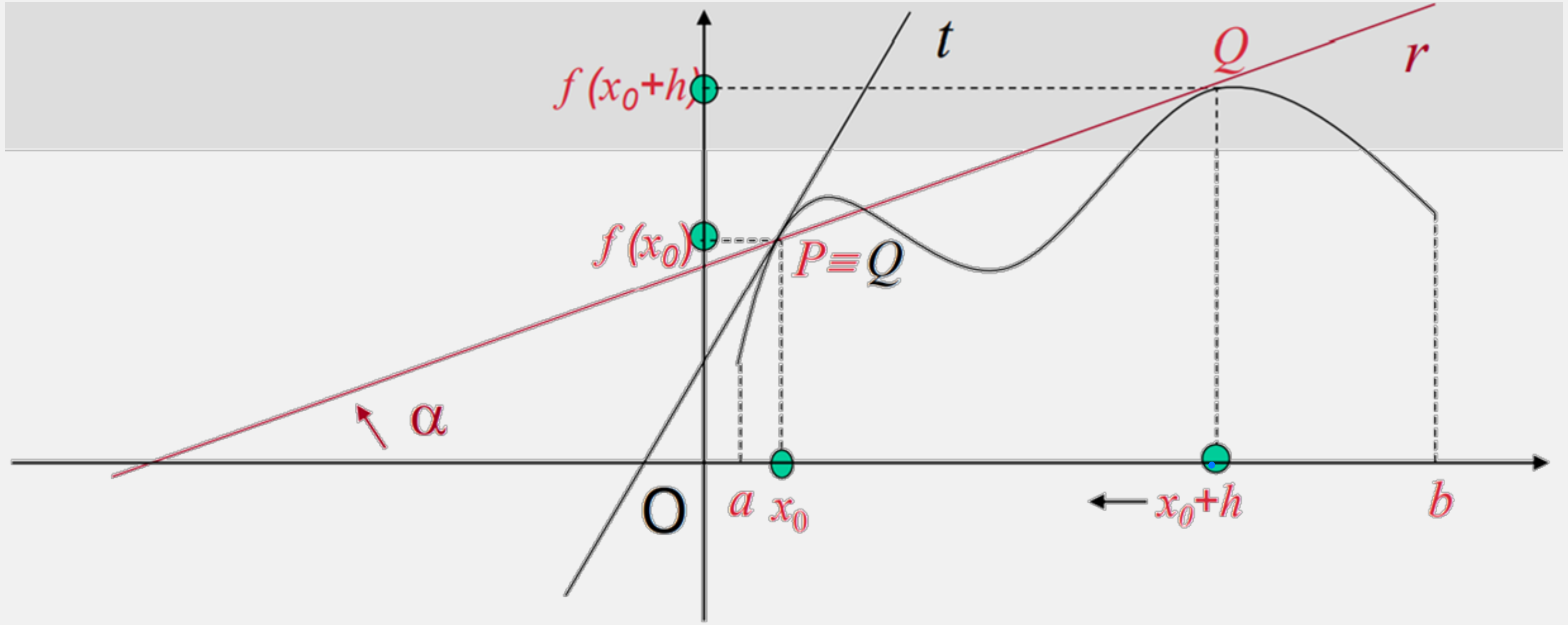
Significato geometrico della derivata

Tali variazioni per $h \to 0$ terminano quando il punto Q raggiunge il punto P, cioè quando la retta passante per P e Q si assesta su una posizione limite che è individuata dalla retta tangente t al grafico della funzione f nel punto di ascissa x_0 (cioè il punto P)





Significato geometrico della derivata



Quindi, indicando con α l'angolo che la retta tangente forma con il semiasse positivo delle x e con m_t il suo coefficiente angolare:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\tan\alpha=\lim_{h\to 0}m_r \;\Leftrightarrow\; f'(x_0)=\tan\alpha=m_t$$

Significato geometrico della derivata

Quindi, in definitiva, se α è l'angolo che la retta tangente al grafico della funzione f nel punto di ascissa x_0 forma con semiasse positivo delle ascisse e se m_t è il suo coefficiente angolare, risulta che:

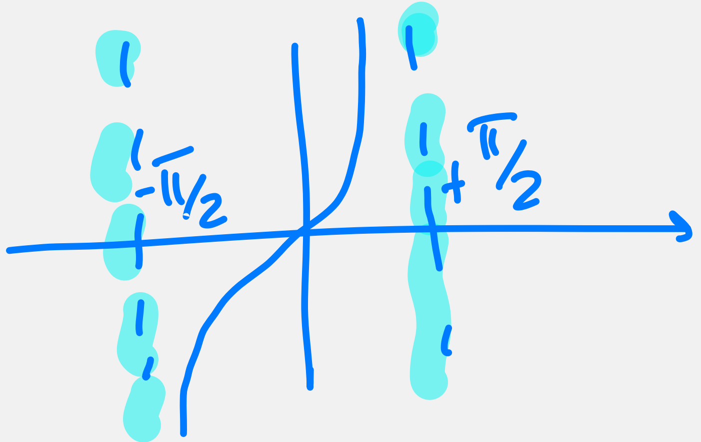
$$\boxed{f'(x_0) = \tan\alpha = m_t}$$

Cioè:

La derivata $f'(x_0)$ della funzione f nel punto x_0 è uguale al coefficiente angolare m_t della retta tangente al grafico della funzione f nel punto $P\left(x_0, f(x_0)\right)$

Conclusioni.

L'esistenza della derivata di una funzione f in un punto x_0 è legata:



- all'esistenza della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa x_0

- al fatto che il coefficiente angolare della retta tangente deve essere finito, essendo $f'(x_0) = m_t$

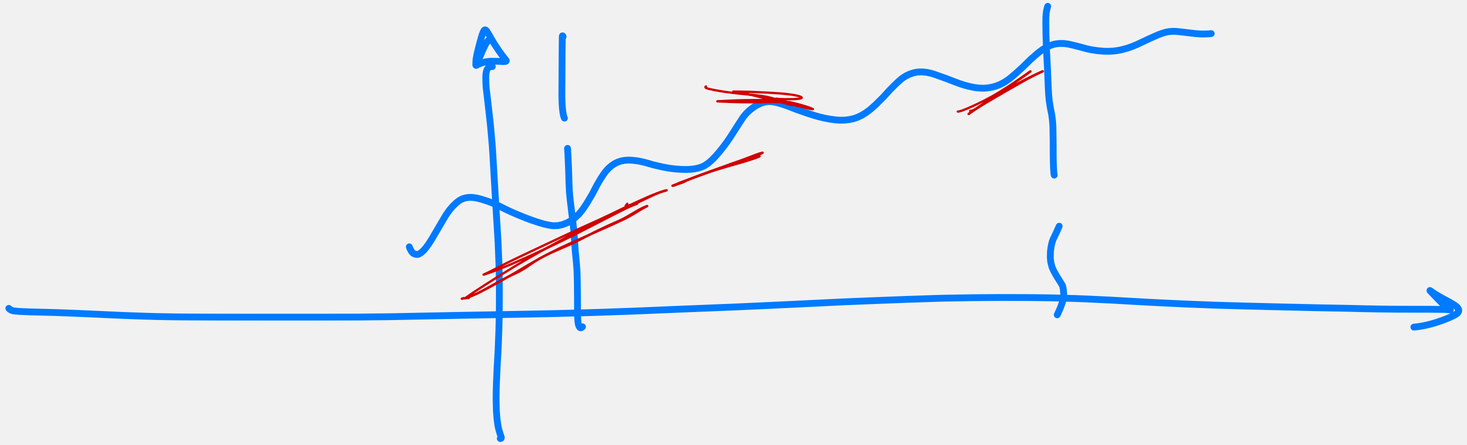
In particolare, essendo $f'(x_0) = \tan\alpha = m_t$, richiedere che il coefficiente angolare della retta tangente t al grafico di f sia finito equivale a richiedere che $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$

$$\alpha \to \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \tan\alpha \to \pm\infty$$

La retta tangente al grafico della funzione f in un punto di ascissa x_0 non può essere parallela all'asse delle ordinate affinché la funzione f sia derivabile nel punto x_0

Se f è una funzione derivabile in un punto x_0 , allora nel punto di coordinate $(x_0 , f(x_0))$ il suo grafico ammette una retta tangente non parallela all'asse delle ordinate

Una funzione derivabile in un intervallo, è una funzione il cui grafico è dotato di retta tangente in ogni suo punto



- **DERIVATE DELLE FUNZIONI ELEMENTARI**

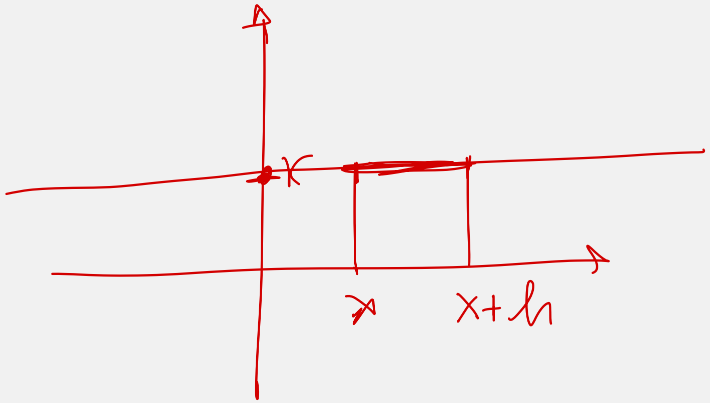
Derivate delle funzioni elementari

Se f è derivabile in ogni punto dell'intervallo (a, b), allora è possibile considerare una nuova funzione che ad ogni punto $x \in (a, b)$ associa il valore della derivata $f'(x)$

$$x \in (a, b) \to f'(x) \in \mathbb{R}$$

Tale funzione viene detta **funzione derivata** e si indica con il simbolo $\boldsymbol{f'(x)}$

Derivate delle funzioni elementari: funzione costante



Sia data la funzione costante $f(x) = k$.

Vediamo quanto vale la derivata della funzione costante $\forall x \in \mathbb{R}$:

$y = mx + K$

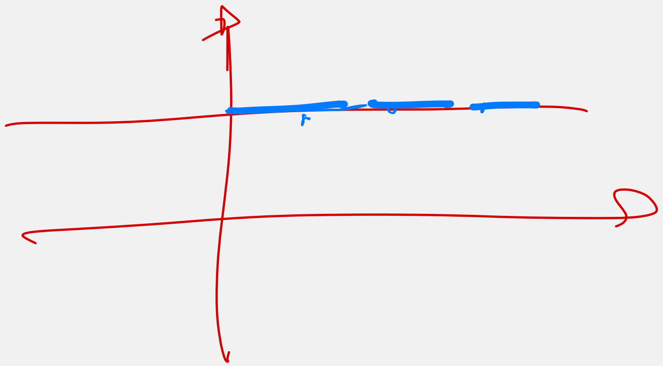
$m = 0$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{k - k}{h} = \frac{0}{h} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

$$\Rightarrow \quad Dk = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Derivate delle funzioni elementari: <u>funzione costante</u>



$$Dk = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Il risultato appena trovato ha un'interpretazione geometrica: il grafico della funzione costante $f(x) = k$ è una retta parallela all'asse delle ascisse

↓

In ogni punto, la retta tangente coincide con il grafico della funzione

↓

Il coefficiente angolare della retta tangente è

↓

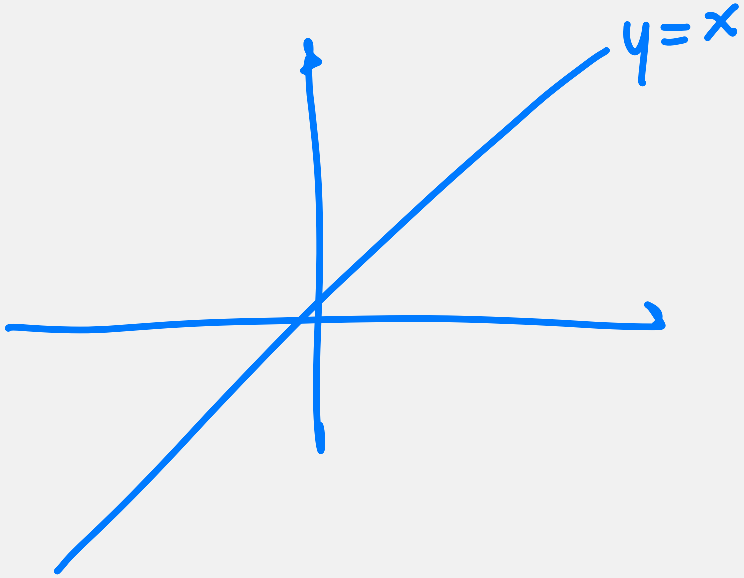
$$m_t = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

(infatti, $\tan 0 = 0$)

$y = k$

$m = 0$

Derivate delle funzioni elementari: funzione lineare



Sia data la funzione bisettrice $f(x) = x$.

Vediamo quanto vale la derivata della funzione costante $\forall x \in \mathbb{R}$:

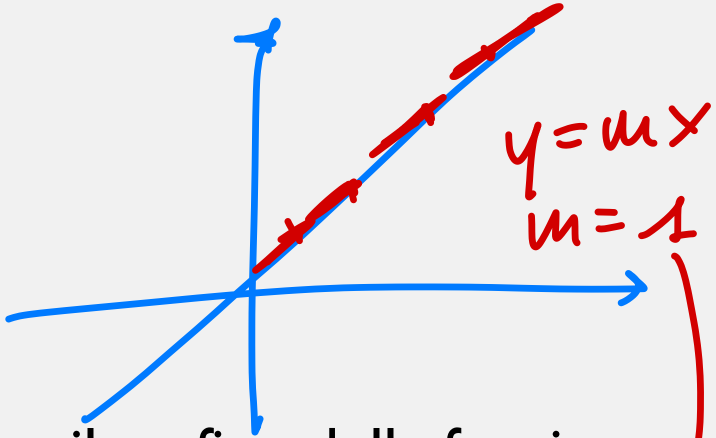
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\cancel{x}+h-\cancel{x}}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

$$\Rightarrow \quad Dx = 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$f'(x) = 1 \quad || \quad \frac{dx}{dx} = 1$

Derivate delle funzioni elementari: funzione lineare



$$Dx = 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

Il risultato appena trovato ha un'interpretazione geometrica: il grafico della funzione $f(x) = x$ è la retta bisettrice del I e III quadrante

$\downarrow$

In ogni punto, la retta tangente coincide con il grafico della funzione

$\downarrow$

Il coefficiente angolare della retta tangente è

$\downarrow$

$$m_t = 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

(infatti, $\tan \frac{\pi}{4} = 1$)

Derivate delle funzioni elementari: funzione potenza

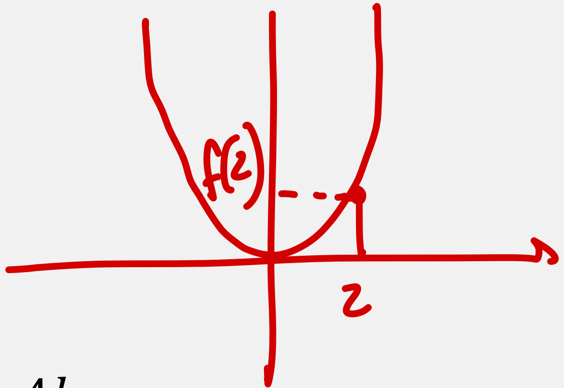
$f(x) = x^{7/5}$

$f'(x) = Dx^{7/5} = \frac{dx^{7/5}}{dx} = \frac{7}{5}x^{7/5-1}$

Sia data la funzione $f(x) = x^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}, x > 0.$

Si può verificare che la derivata di tale funzione $\forall x \in \mathbb{R}^{+}$:

$$Dx^{\alpha} = \alpha x^{\alpha-1}, \forall x > 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$



Esempio.
$f(x) = x^2$ nel punto $x_0 = 2$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} = \frac{(2 + h)^2 - (2)^2}{h} = \frac{\cancel{4} + 4h + h^2 - \cancel{4}}{h} = \frac{h^2 + 4h}{h} = h + 4$$

$$\frac{\cancel{h}(h+4)}{\cancel{h}}$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} h + 4 = 4$$

$x=2$

$$\frac{d\,x^2}{dx} = 2 \cdot x^{2-1} = 2x = 2 \cdot 2 = 4$$

<u>La funzione $f(x) = x^2$ è derivabile in $x_0 = 2$ e $f'(2) = 4$</u>

Derivate delle funzioni elementari: funzione potenza

Sia data la funzione $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.

Ricordiamo: $Dx^{\alpha} = \alpha x^{\alpha-1}$

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$D\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \forall x \in \mathbb{R}^{+}$$

Derivate delle funzioni elementari: funzione potenza

Sia data la funzione $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$.

Ricordiamo: $Dx^{\alpha} = \alpha x^{\alpha - 1}$

$$f(x) = x^{-1} \rightarrow f'(x) = -1x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$D\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}, \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Derivate delle funzioni elementari: regole di derivazione

$$D a^x = a^x \log_e a$$

$$D e^x = e^x \cdot \log_e e \overset{=1}{}$$

$$D \log_a x = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\log_e a}$$

$$D \log_e x = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\log_e e}$$

$$D \sin x = \cos x$$

$$D \cos x = -\sin x$$

Derivate delle funzioni elementari

$f(x)$	$f'(x)$
k	0
x	1
x^n	nx^{n-1}
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$	$a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}$
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x} \cdot \log_a e = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{\ln a}$
$\log_e x$	$\dfrac{1}{x} \cdot \log_e e = \dfrac{1}{x}$
a^x	$a^x \log_e a = a^x \cdot \dfrac{1}{\log_a e}$
e^x	$e^x \log_e e = e^x$

$f(x)$	$f'(x)$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\lvert x\rvert$	$\dfrac{x}{\lvert x\rvert} = \dfrac{\lvert x\rvert}{x}$
$\lvert f(x)\rvert$	$f'(x)$ con $f(x) > 0$ $-f'(x)$ con $f(x) < 0$

Esercizi. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni

1. $f(x)=x^7$ $\quad f'(x)=7x^{7-1}=7x^6$
2. $f(x)=x^{-2}$ $\quad f'(x)=-2x^{-2-1}=-2x^{-3}$
3. $f(x)=x^{\pi}$ $\quad f'(x)=\pi x^{\pi-1}$
4. $f(x)=4$ $\quad f'(x)=0$
5. $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ $\quad f'(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$
6. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad f'(x)=-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$
7. $f(x)=x^{-2}$ $\quad f'(x)=-2x^{-2-1}=-2x^{-3}$
8. $f(x)=3^x$ $\quad f'(x)=3^x\log_e 3$
9. $f(x)=\log_5|x|$ $\quad \frac{1}{|x|}\cdot\log_5 e=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln 5}$
10. $f(x)=e$ $\quad f'(x)=0$

$(x^2)^{1/3} = x^{2/3-1}$

$\frac{2}{3}x^{2/3-1}$

$\frac{1}{(x)^{1/2}} \to x^{-1/2}$

$-\frac{1}{2}x^{-1/2-1}$

Derivata seconda – n-esima

A questo punto, ha senso chiedersi se la funzione derivata $f'(x)$ è a sua volta derivabile in un punto oppure in tutto l'intervallo (a, b). In caso affermativo, chiameremo **derivata seconda** la derivata di f' e la indicheremo:

$$f''(x)$$

$$D^2 f(x)$$

In modo analogo, si definiscono le funzioni derivata terza $f'''(x)$, derivata quarta $f^{IV}(x)$, e di ordine ancora superiore, in generale derivata n-esima:

$$f^n(x)$$

$$D^n f(x)$$

- **REGOLE DI CALCOLO**

Regole di calcolo delle derivate (somma, prodotto, rapporto)

Se $f : (a,b) \to \mathbb{R}, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ sono due funzioni derivabili in (a,b)

$$f \pm g, \quad f \cdot g, \quad \frac{f}{g}, (\text{con } g \neq 0)$$

Sono derivabili in (a,b) e valgono le seguenti formule:

- $(f \pm g)' = f' \pm g'$
- $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \to (k \cdot f)' = k \cdot f'$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \to \left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$

$$\frac{3x+1}{4x^2+3x} \qquad \frac{f}{g}$$

$$\frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$\frac{\frac{d(3x+1)}{dx} \cdot (4x^2+3x) - (3x+1) \cdot \frac{d(4x^2+3x)}{dx}}{(4x^2+3x)^2}$$

Esercizi. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni

$f(x) = 4x^2 + 4$

$\frac{d}{dx}(4x^2) + \frac{d}{dx}(4) =$

$\frac{d(4x^2)}{dx} = \cancel{\frac{d(4)}{dx}}_{0} \cdot x^2 + 4 \cdot \frac{dx^2}{dx} = 4 \cdot \frac{dx^2}{dx} = 4 \cdot 2x^{2-1} = 8x$

$f'(x) = 4 \cdot 2x^{2-1} + 0 = 8x$

$f(x) = \sqrt{x} + x^{2/3}$

$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) + \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{2}{3}}\right)$

$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} + \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{1}{2x^{1/2}} + \frac{2}{3x^{1/3}}$

$f(x) = -x^{-2} + 3x^3$

$\frac{d}{dx}(-x^{-2}) + \frac{d}{dx}(3x^3) =$

$\frac{d(3x^3)}{dx} = \cancel{\frac{d(3)}{dx}} \cdot x^3 + 3 \cdot \frac{d(x^3)}{dx} = 3 \cdot 3 \cdot x^{3-1} = 9x^2$

$f'(x) =- -2x^{-2-1} + 3 \cdot 3x^{3-2} = 2x^{-3} + 9x^2$

Esercizi. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni

$$(f\cdot g)' = f'g + fg' = \frac{dx^2}{dx}\cdot(x+1) + x^2\cdot\frac{d(x+1)}{dx}$$

$$2x(x+1)+x^2\cdot 1$$

$$f(x) = \log x - e^x$$

$$\frac{d}{dx}(\ln x) - \frac{d}{dx}(e^x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - e^x$$

$$f(x) = x\cdot e^x$$

$$e^x \cancel{\frac{dx}{dx}} + x\frac{d}{dx}(e^x)$$

$$f'(x) = 1\cdot e^x + x\cdot e^x = e^x + xe^x$$

$$(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$$

$$f(x) = x^2\cdot(x+1)$$

$$(x+1)\frac{d}{dx}x^2 + x^2\frac{d}{dx}(x+1)$$

$$f'(x) = 2x\cdot(x+1) + x^2\cdot(1) = 2x^2 + 2x + x^2 = 3x^2 + 2x$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x}$$

$$\frac{\frac{d(x-1)}{dx}\cdot x - (x-1)\frac{dx}{dx}}{x^2}$$

$$\frac{\frac{d}{dx}(x-1)\cdot x - \frac{dx}{dx}(x-1)}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1\cdot x - 1\cdot(x-1)}{x^2} = \frac{1}{x^2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2} \rightarrow \left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$$

Teorema: Derivate di funzioni composte

Sia assegnata la funzione composta $f\big(g(x)\big)$ mediante le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$.
Sia la funzione g derivabile in x e sia la funzione f derivabile in $g(x)$.

Anche la funzione composta $f\big(g(x)\big)$ è derivabile e vale la seguente formula:

$$(f \circ g)' = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

$(f \circ g)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Esempi.

$f(x) = (3x+1)^2$

$f = (3x+1)^2$

$g = 3x+1 \to g' = 3$

$f'(g) = 2(3x+1)^{2-1} = 2(3x+1) = 6x+2$

$(6x+2) \cdot 3 = 18x+6$

$f(x) = (1+2x^2)^3$

$g = 2x^2 \to g' = 4x$

$f = (1+2x^2)^3 \to f' = 3(1+2x^2)^{3-1} = 3(1+2x^2)^2 \to (f \circ g)' = 3(1+2x^2)^2 \cdot 4x = 12x(1+2x^2)^2$

$f(x) = \sqrt{(4x+3)}$

$f(x) = \sqrt{(4x+3)} = (4x+3)^{1/2} \to \frac{1}{2}(4x+3)^{1/2-1} = \frac{1}{2}(4x+3)^{-1/2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(4x+3)^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{4x+3}}$

$g = 4x \to g' = 4$

$(f \circ g)' = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{4x+3}} \cdot \cancel{4}^{2} = \frac{2}{\sqrt{4x+3}}$

$f(x) = \log x^2$

$f = \log_e x^2 \to f' = 1/x^2$

$g = x^2 \to g' = 2x$

$(f \circ g)' = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = 2/x$

Regole di derivazione

$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{f'(x)}$
$[f(x)]^{\alpha}$	$\alpha \cdot f(x)^{\alpha-1} \cdot f'(x)$
$\sqrt{f(x)}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x)$
$\dfrac{1}{f(x)}$	$-\dfrac{1}{f^2(x)} \cdot f'(x)$
$\alpha^{f(x)}$	$\alpha^{f(x)} \log \alpha \cdot f'(x)$
$e^{f(x)}$	$e^{f(x)} \cdot f'(x)$
$\log_a f(x)$	$\dfrac{1}{f(x)} \cdot \dfrac{1}{\log a} \cdot f'(x)$
$\log f(x)$	$\dfrac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$

- $f(x) = 4\sqrt{x} - 2\sin x$; $\sqrt{x} \to x^{1/2}$

$f'g + fg'$

$$\cancel{\frac{d4}{dx} \cdot x^{1/2}} + \frac{dx^{1/2}}{dx} \cdot 4 = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}} \cdot \cancel{4}^{2} = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$f'g + fg'$

$$\cancel{\frac{d2}{dx} \cdot \sin x} + 2 \cdot \frac{d\sin x}{dx} = 2 \cdot \cos x$$

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - 2\cos x$$

- $f(x) = \underbrace{\sin x}_{f}\underbrace{(\sin x - \cos x)}_{g}$

$f'g + fg'$

$$\frac{d\sin x}{dx} - \frac{d\cos x}{dx}$$

$$\cos x - -\sin x = \cos x + \sin x$$

$$\frac{d\sin x}{dx} \cdot (\sin x - \cos x) + \sin x \cdot \frac{d(\sin x - \cos x)}{dx}$$

$$\cos x(\sin x - \cos x) + \sin x\,(\cos x + \sin x)$$

$$\sin x \cdot \cos x - \cos^2 x + \sin x \cdot \cos x + \sin^2 x$$

$$\sin^2 x - \cos^2 x + 2\sin x \cos x$$

$$\bullet\ f(x) = \frac{x^2-6x+5}{x-3} \qquad \left(f/g\right)' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$$

$$\frac{\frac{d(x^2-6x+5)}{dx}\cdot(x-3)-(x^2-6x+5)\frac{d(x-3)}{dy}}{(x-3)^2}$$

$$\frac{(-6+2x)(x-3)-(x^2-6x+5)1}{(x-3)^2} = \frac{-6x+18+2x^2-\cancel{6x}-x^2+\cancel{6x}-5}{x^2-6x+9}$$

$$\frac{x^2-6x+13}{x^2-6x+9}$$

- $f(x) = \dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}$ $\qquad$ $\left(f/g\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

$$\frac{\frac{d(x+\sin x)}{dx}\cdot(x-\sin x) - (x+\sin x)\cdot\frac{d(x-\sin x)}{dx}}{(x-\sin x)^2}$$

$$\frac{(1+\cos x)(x-\sin x) - (x+\sin x)\cdot(1-\cos x)}{(x-\sin x)^2}$$

$$\frac{x-\sin x+x\cos x-\sin x\cos x - x+x\cos x-\sin x+\sin x\cos x}{(x-\sin x)^2}$$

$$\frac{2x\cos x - 2\sin x}{(x-\sin x)^2}$$

$$\bullet\ f(x) = \underbrace{(4x+1)^3}_{\mathrm{I}} - \underbrace{(x^3-1)^2}_{\mathrm{II}}$$

$$\mathrm{I} - \mathrm{II} \rightarrow (f \circ g)' = f'(g) \cdot g'$$

I $\quad 3(4x+1)^{3-1} \cdot 4 = 12(4x+1)^2$

II $\quad 2(x^3-1) \cdot 3x^2 = 6x^2(x^3-1)$

$$12(4x+1)^2 - 6x^2(x^3-1)$$

- $f(x) = e^{\frac{x-2}{x}}$

$$(f \circ g)' = f'(g) \cdot g'$$

$$\frac{d\left(e^{\frac{x-2}{x}}\right)}{dx} = e^{\frac{x-2}{x}}$$

$$\boxed{e^{\frac{x-2}{x}} \cdot \frac{2}{x^2}}$$

$$\frac{d\left(\frac{x-2}{x}\right)}{dx} = \frac{\frac{d(x-2)}{dx} \cdot x - (x-2) \cdot \frac{dx}{dx}}{x^2} = \frac{1 \cdot x - (x-2)\,1}{x^2}$$

$$\left(f/g\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$\frac{\cancel{x} - \cancel{x} + 2}{x^2} = 2/x^2$$

Teorema di De l'Hôpital

Siano f e g due funzioni derivabili in (a, b) tali che: $g(x), g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$, eccetto al più il punto $x_0 \in (a, b)$.

Se risulta che:

1. $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ ricade nelle forme indeterminate $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$

2. $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ con l finito o infinito

Allora:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

Teorema di De l'Hôpital

Osservazione 1.
Il teorema di De l'Hôpital continua a valere anche se l'intervallo (a, b) in cui f e g sono derivabili non è limitato e se $x_0 = \pm\infty$

Osservazione 2.
Il teorema di De l'Hôpital può essere applicato anche più volte consecutivamente se dopo averlo applicato la prima volta ci si ritrova di nuovo in una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$

Teorema di De l'Hôpital

De l'Hôpital

$$\frac{d}{dx}(x^2+x-2) = 2x+1$$

Esempi.

F.I.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 1}\frac{2x+1}{1} = 3$$

ln (log$_e$)

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 1}\frac{1/x}{1} = 1$$

F.I.

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\log(1+x^5)}{\log(2+x^3)} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{5x^4}{1+x\text{^}5}}{\frac{3x^2}{2+x^3}} = \lim_{x\to +\infty}\frac{5x^4}{1+x^5}\,\frac{2+x^3}{3x^2} = \frac{10x^4+5x^7}{3x^2+3x^7} = \frac{5}{3}$$

$(f\circ g)' \to f = \log(1+x^5) \to$

$g = 1+x^5$

Teorema di De l'Hôpital

Esempi.

$$\lim_{x\to 1^+} [\log x \cdot \log(x-1)] = 0 \cdot \infty$$

Non si può applicare il teorema!

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\log(x-1)}{1/\log x} = \frac{\infty}{\infty}$$

$\to 0$

Si può applicare il teorema!

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\log(x-1)}{1/\log x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{x-1}}{-\frac{1}{\log^2 x}\cdot\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{x-1}}{-\frac{1}{x\log^2 x}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{-x\log^2 x}{x-1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{-x\log^2 x}{x-1} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 1^+} \frac{-\left(\log^2 x + x\cdot 2\log x\cdot\frac{1}{x}\right)}{1} = 0$$

- **FUNZIONI NON DERIVABILI**
- **Punti angolosi**
- **Flessi a tangente verticale**
- **Cuspidi**

Funzione non derivabile in un punto: punto angoloso

$$f(x) = |x|$$

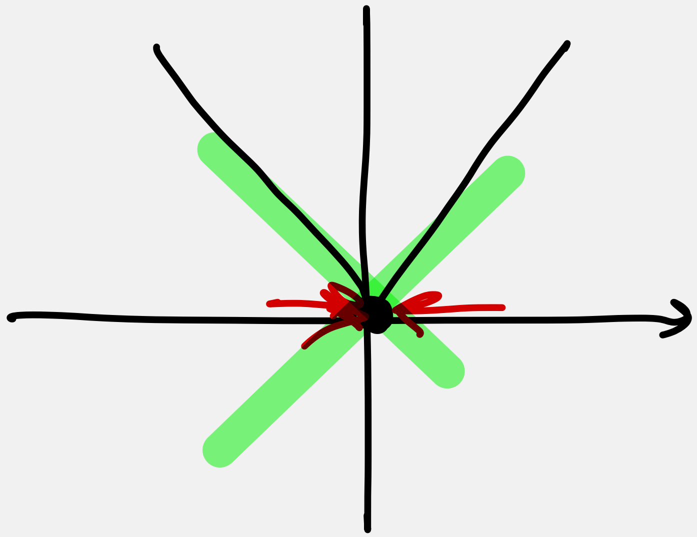
Tale funzione definita e continua in tutto $\mathbb{R}$, quindi in particolare è definita e continua nel punto $x_0 = 0$

Verifichiamo se $f(x)$ è anche derivabile nel punto $x_0 = 0$.

Costruiamo il rapporto incrementale nel caso $x_0 = 0$:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{|h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} = \begin{cases} \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0^+} 1 = 1 \\ \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h\to 0^-} (-1) = -1 \end{cases}$$



$x_0 = 0$

Funzione non derivabile in un punto: punto angoloso

La funzione $f(x) = |x|$ ammette nel punto $x_0 = 0$ derivata destra e derivata sinistra finite ma diverse fra loro:

$$f'_+(x_0) = 1 \text{ e } f'_-(x_0) = -1$$

$$\Downarrow$$

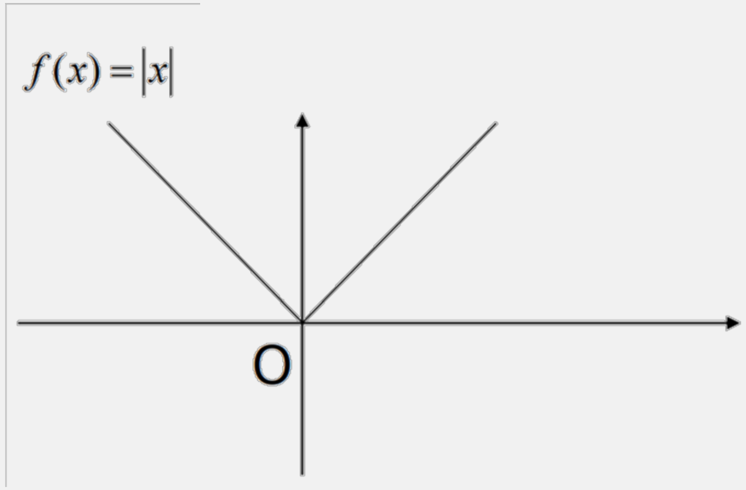
La funzione $f(x) = |x|$ non è derivabile nel punto $x_0 = 0$ (pur essendo continua in tale punto) ed il punto x_0 è detto **punto angoloso**

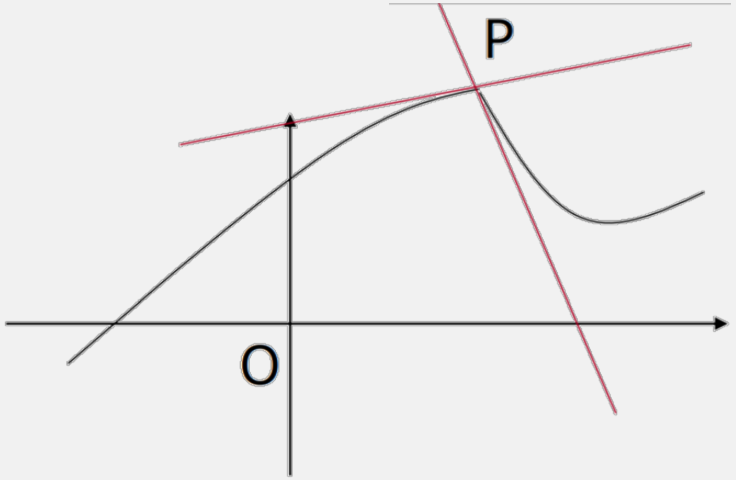
Definizione: punto angoloso

Sia assegnata una funzione $f(x)$ definita in un intervallo $[a, b]$ e sia x_0 un fissato punto interno all'intervallo $[a, b]$.

Se f ammette in x_0 derivata destra e derivata sinistra finite ma diverse tra loro, allora f non è derivabile in x_0 e si dice che il punto x_0 è un **punto angoloso**

Dal punto di vista grafico, possiamo affermare che il grafico di una funzione ammette in un punto angoloso x_0 due rette tangenti (da destra e da sinistra) non parallele all'asse delle ordinate



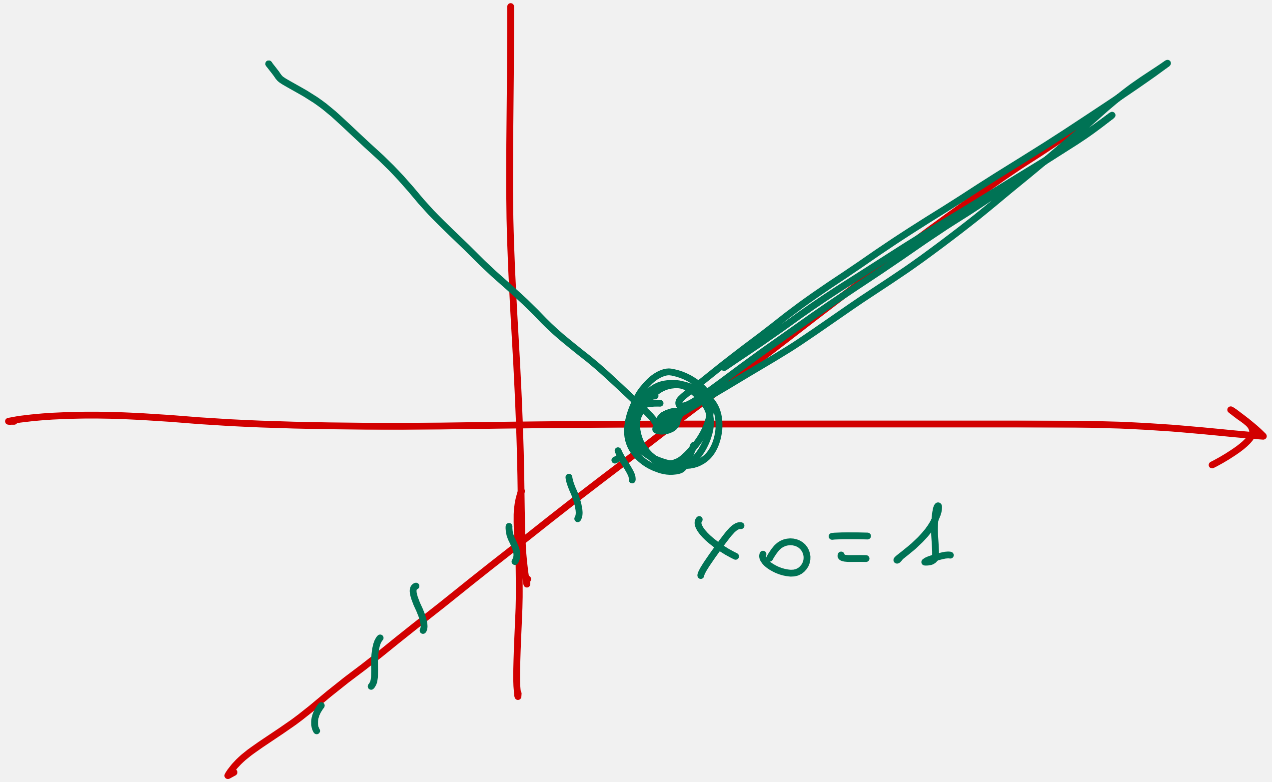


Definizione: punto angoloso

In generale, ogni funzione che presenta il valore assoluto nella propria espressione analitica non è derivabile nei punti x in cui si annulla l'argomento del valore assoluto.

Tali punti sono punti angolosi

$|x-1|$



Funzione non derivabile in un punto: flesso a tangente verticale

$$f(x) = \sqrt[3]{x-1}$$

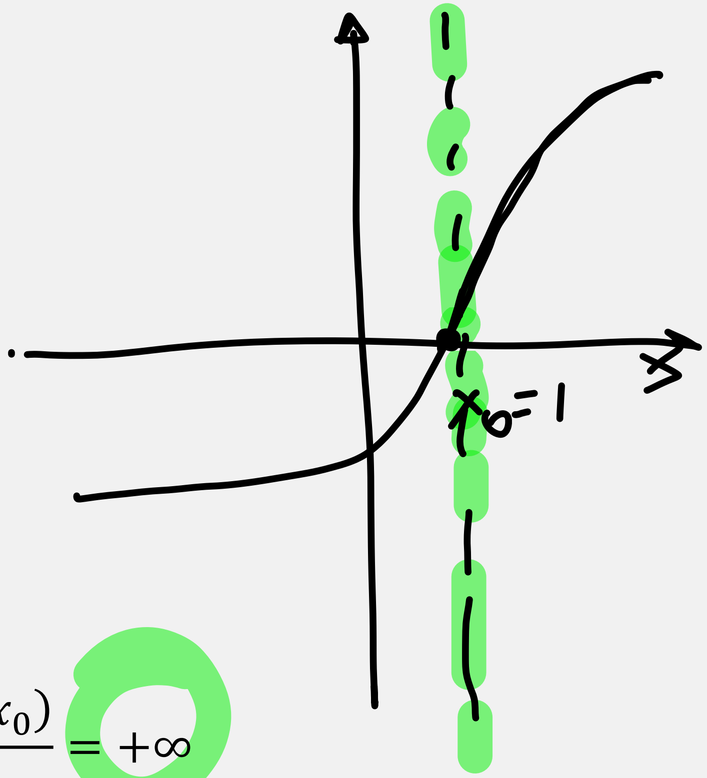
Tale funzione definita e continua in tutto $\mathbb{R}$, quindi in particolare è definita e continua nel punto $x_0 = 1$

Verifichiamo se $f(x)$ è anche derivabile nel punto $x_0 = 1$.

Costruiamo il rapporto incrementale nel caso $x_0 = 1$:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\sqrt[3]{1+h-1}-\sqrt[3]{1-1}}{h} = \frac{\sqrt[3]{h}}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^{\frac{1}{3}}}{h} = \lim_{h\to 0} h^{\left(\frac{1}{3}-1\right)} = \lim_{h\to 0} h^{-\frac{2}{3}} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty$$



Quindi:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = +\infty \qquad \lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = +\infty$$

Funzione non derivabile in un punto: flesso a tangente verticale

La funzione $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ ammette nel punto $x_0 = 1$ derivata destra e derivata sinistra uguali fra loro, ma non finite:

$$f'_+(x_0) = +\infty \text{ e } f'_-(x_0) = +\infty$$

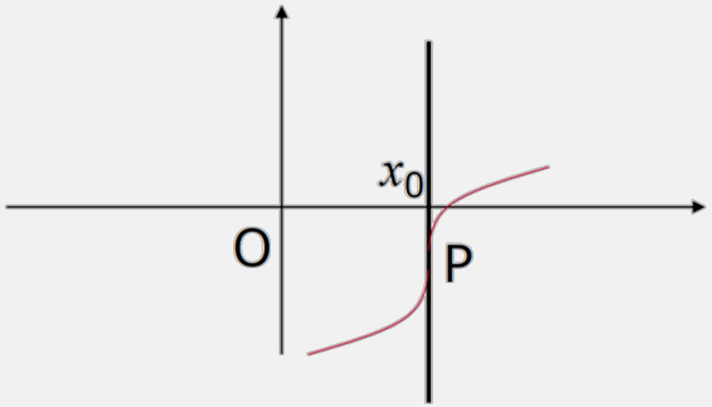
$$\Downarrow$$

La funzione $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ non è derivabile nel punto $x_0 = 1$ (pur essendo continua in tale punto) ed il punto x_0 è detto **flesso a tangente verticale**

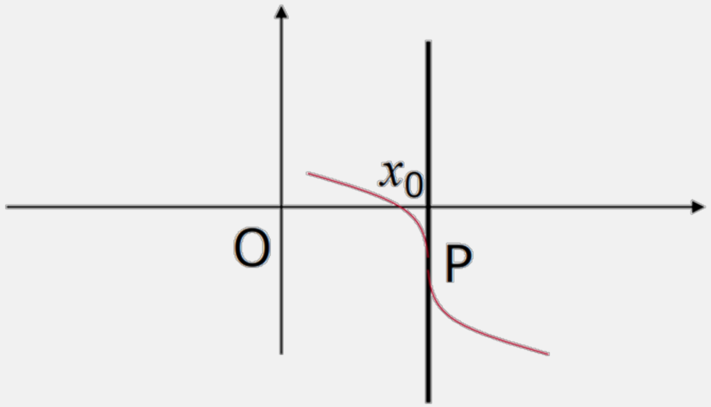
Definizione: flesso a tangente verticale

Sia assegnata una funzione $f(x)$ definita in un intervallo $[a,b]$ e sia x_0 un fissato punto interno all'intervallo $[a,b]$. Se f ammette in x_0 limite destro e limite sinistro del rapporto incrementale uguali tra loro ma infiniti (cioè entrambi uguali a $+\infty$ o a $-\infty$), allora f non è derivabile in x_0 e si dice che il punto x_0 è un **flesso a tangente verticale**

Dal punto di vista grafico, possiamo affermare che il grafico di una funzione ammette in un punto di flesso a tangente verticale x_0 una retta tangente parallela all'asse delle ordinate



$$\lim_{h \to 0^{\pm}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = +\infty$$



$$\lim_{h \to 0^{\pm}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = -\infty$$

Funzione non derivabile in un punto: cuspide

$$f(x) = \sqrt[3]{|x|}$$

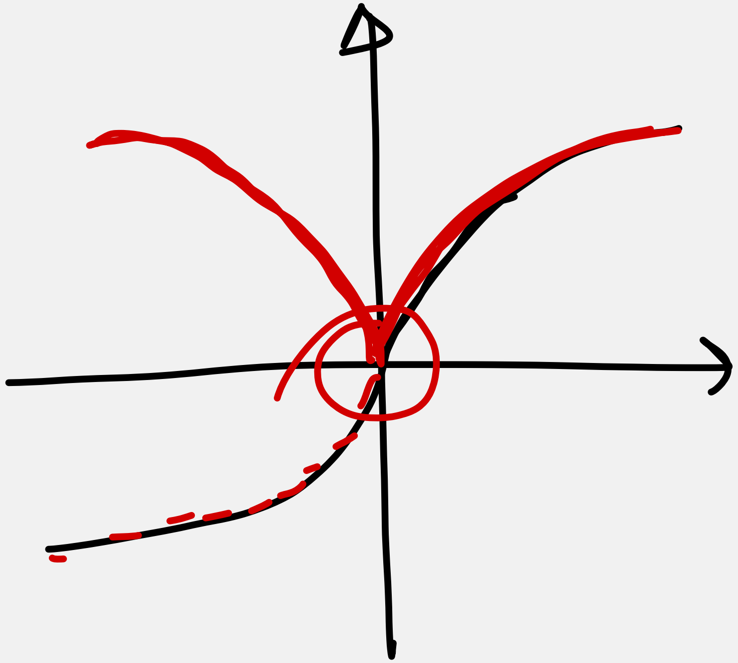
Tale funzione definita e continua in tutto $\mathbb{R}$, quindi in particolare è definita e continua nel punto $x_0 = 0$

Verifichiamo se $f(x)$ è anche derivabile nel punto $x_0 = 0$.

Costruiamo il rapporto incrementale nel caso $x_0 = 0$:

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{\sqrt[3]{|h|} - 0}{h} = \frac{\sqrt[3]{|h|}}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{|h|}}{h} = \begin{cases} \displaystyle\lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h^{\frac{2}{3}}} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{\overset{h}{x}^2}} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt[3]{-h}}{h} = \lim_{h\to 0^-} -\frac{1}{h^{\frac{2}{3}}} = \lim_{h\to 0^-} -\frac{1}{\sqrt[3]{\overset{h}{x}^2}} = -\infty \end{cases}$$



Funzione non derivabile in un punto: cuspide

Quindi:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = +\infty \qquad \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = -\infty$$

Tali limiti da destra e sinistra sono differenti fra loro e non sono finiti.

$$f'_+(x_0) = +\infty \text{ e } f'_-(x_0) = -\infty$$

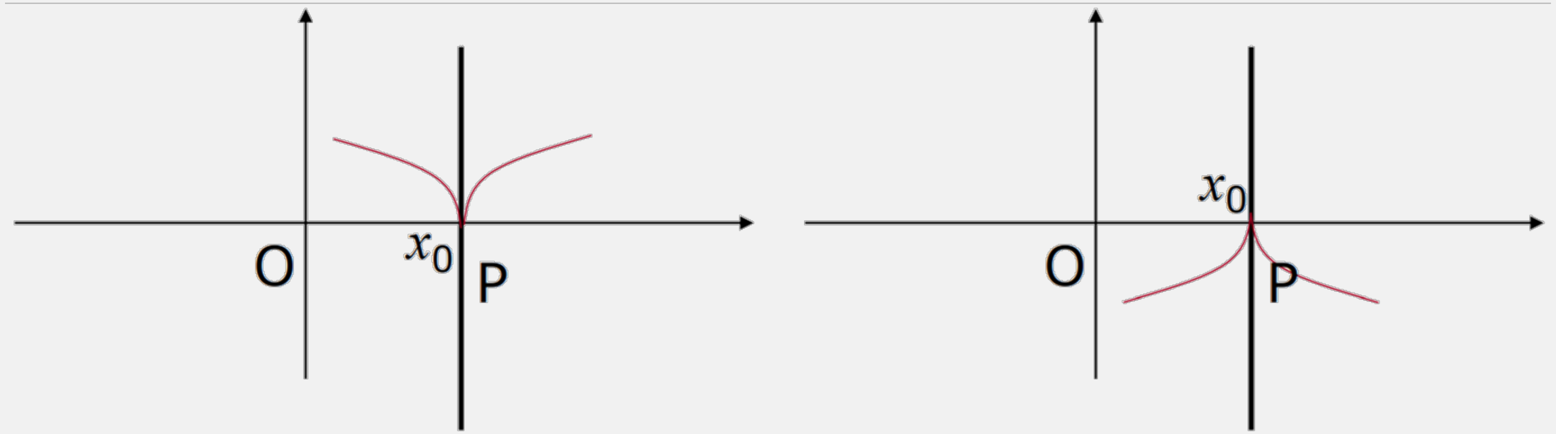
$$\Downarrow$$

La funzione $f(x) = \sqrt[3]{|x|}$ non è derivabile nel punto $x_0 = 0$ (pur essendo continua in tale punto) ed il punto x_0 è detto **cuspide**

Definizione: cuspide

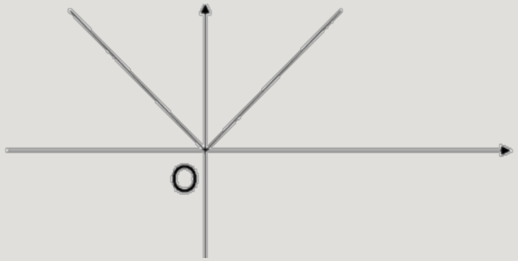
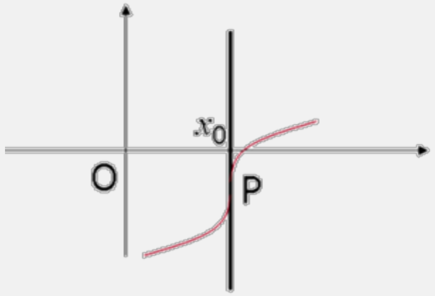
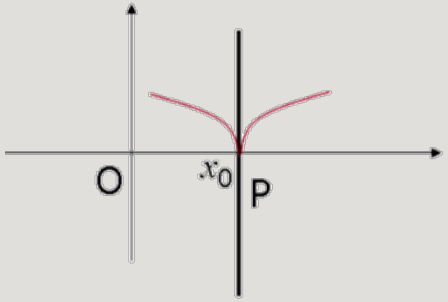
Sia assegnata una funzione $f(x)$ definita in un intervallo $[a, b]$ e sia x_0 un fissato punto interno all'intervallo $[a, b]$. Se f ammette in x_0 limite destro e limite sinistro del rapporto incrementale diversi tra loro ed infiniti (cioè l'uno uguale a $+\infty$ e l'altro a $-\infty$ o viceversa), allora f non è derivabile in x_0 e si dice che il punto x_0 è una **cuspide**

Dal punto di vista grafico, possiamo affermare che il grafico di una funzione ammette in un punto di cuspide x_0 una retta tangente parallela all'asse delle ordinate



$$\lim_{x \to x_0^{\pm}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to x_0^{\pm}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \mp\infty$$

Tipo di punto	Definizione	Grafico
Punto angoloso	Se f ammette in x_0 derivata destra e derivata sinistra finite ma diverse tra loro	
Flesso a tangente verticale	Se f ammette in x_0 limite destro e limite sinistro del rapporto incrementale uguali tra loro ma infiniti (cioè entrambi uguali a $+\infty$ o a $-\infty$)	
Cuspide	Se f ammette in x_0 limite destro e limite sinistro del rapporto incrementale diversi tra loro ed infiniti (cioè l'uno uguale a $+\infty$ e l'altro a $-\infty$ o viceversa)	

- **PROPRIETÀ GLOBALI DELLE FUNZIONI DERIVABILI**
- **Teorema di Weierstrass**
- **Teorema di Fermat**
- **Teorema di Rolle**
- **Teorema di Lagrange**
- **Teorema di Cauchy**

Ricordiamo: Massimo assoluto

Sia data una funzione

$$f : A \to B, \qquad con\ A, B \subseteq \mathbb{R}, \qquad A, B \neq \emptyset$$

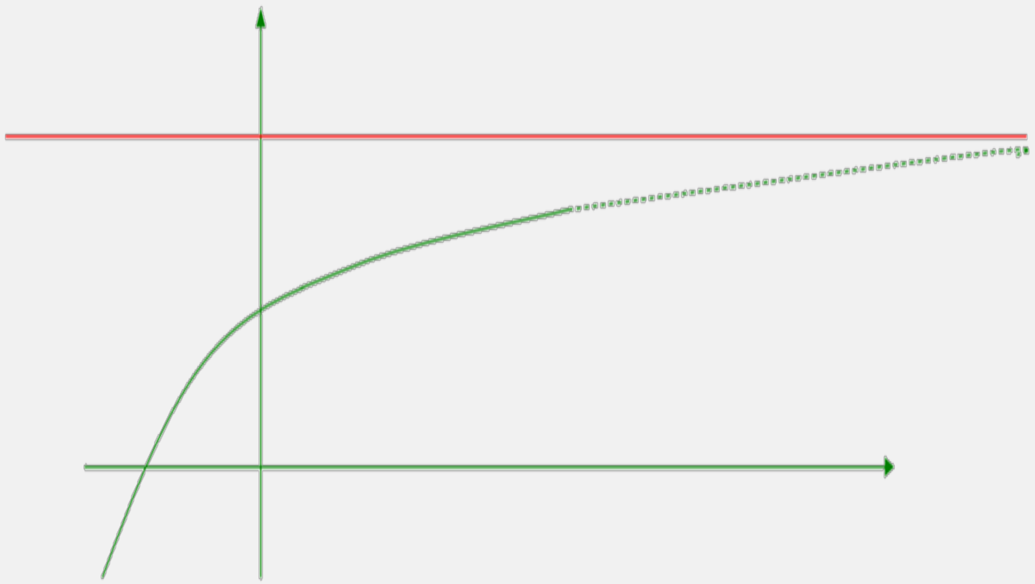
Si dice che il numero reale M è il **massimo assoluto** di f se M è un valore appartenente all'immagine di f e se è il più grande valore:

$$M = \max f \Leftrightarrow \begin{cases} \exists x_0 \in A : f(x_0) = M \\ \forall x \in A, f(x) \leq M \end{cases}$$

Con x_0 **punto di massimo assoluto**

Massimo assoluto

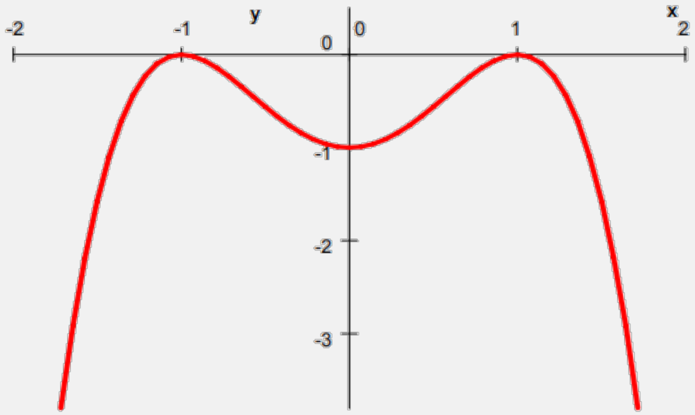
- Il massimo di una funzione, se esiste, è il valore massimo assunto dalla funzione
- Se una funzione ammette massimo assoluto, essa è limitata superiormente
- Se una funzione è limitata superiormente essa ammette estremo superiore, non necessariamente massimo assoluto
- Una funzione può avere più punti di massimo



$$f(x) = -(x-1)^2(x+1)^2$$

$$M = 0$$

$$x_0 = 1; \quad x_1 = -1$$



Minimo assoluto

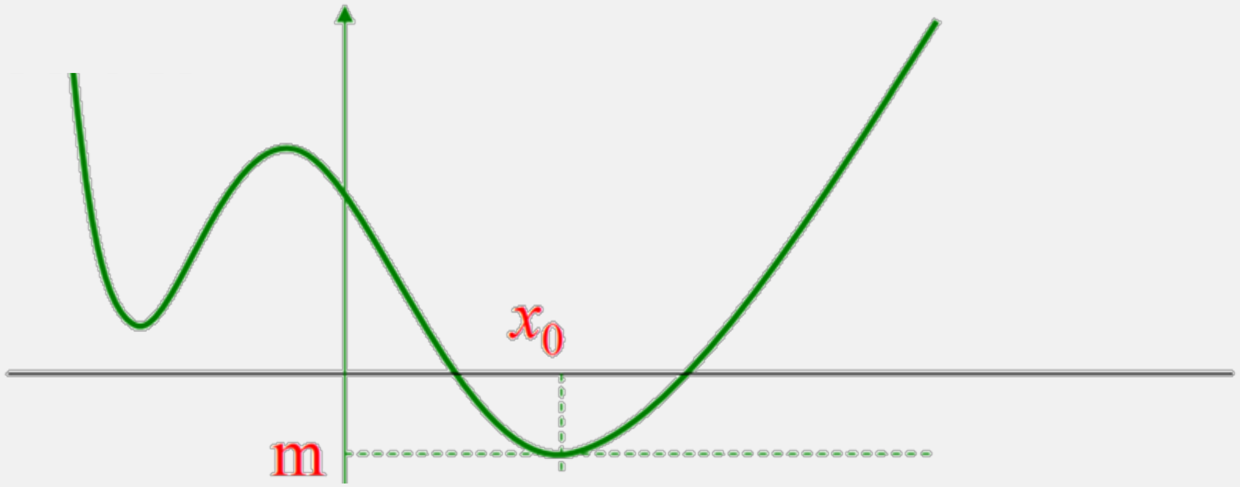
Sia data una funzione

$$f : A \to B, \qquad con\, A, B \subseteq \mathbb{R}, \qquad A, B \neq \emptyset$$

Si dice che il numero reale m è il **minimo assoluto** di f se m è un valore appartenente all'immagine di f e se è il più grande valore:

$$m = \min f \Leftrightarrow \begin{cases} \exists x_0 \in A : f(x_0) = m \\ \forall x \in A, f(x) \geq m \end{cases}$$

Con x_0 **punto di minimo assoluto**



Massimo relativo

Sia data una funzione

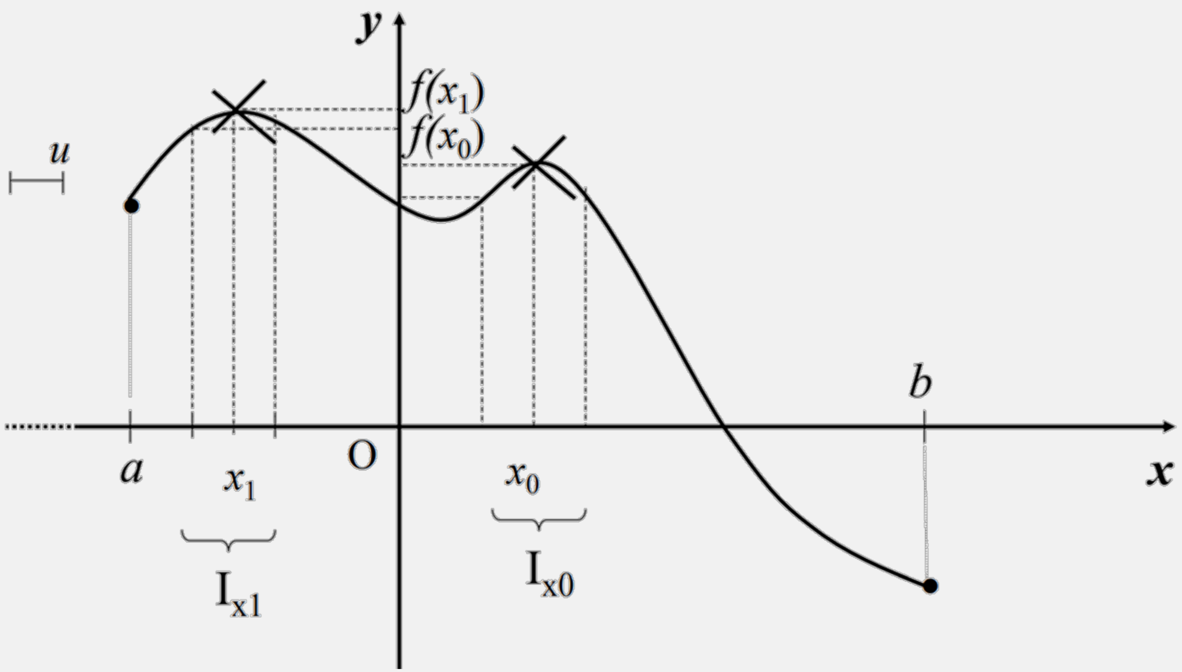
$f : A \to B, \qquad con\ A, B \subseteq \mathbb{R}, \qquad A, B \neq \emptyset$

Dato un punto x_0 di A, si dice che $L = f(x_0)$ è un **massimo relativo** per f se:

$$\exists\ intorno\ I_{x0}\ tale\ che$$

$$\forall x \in I_{x0} \cap A, f(x) \leq L$$

Con x_0 **punto di massimo relativo**



Minimo relativo

Sia data una funzione

$$f : A \rightarrow B, \qquad con\ A, B \subseteq \mathbb{R}, \qquad A, B \neq \emptyset$$

Dato un punto x_0 di A, si dice che $l = f(x_0)$ è un **minimo relativo** per f se:

$$\exists\ intorno\ I_{x0}\ tale\ che$$

$$\forall x \in I_{x0} \cap A, f(x) \geq l$$

Con x_0 **punto di minimo relativo**

Minimo e Massimo: osservazioni

Assegnata una funzione f definita in un intervallo $[a, b]$, ricordiamo che:

- il minimo ed il massimo assoluti di f in $[a, b]$, se esistono, sono unici (naturalmente, i punti di massimo e minimo assoluti possono non essere unici)

- minimi ed il massimi relativi di f in $[a, b]$ possono non essere unici

- un estremo assoluto di f in $[a, b]$ è anche estremo relativo ma non vale il viceversa

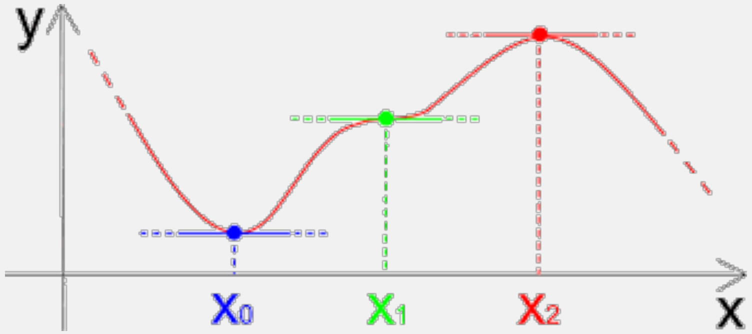
Punto stazionario

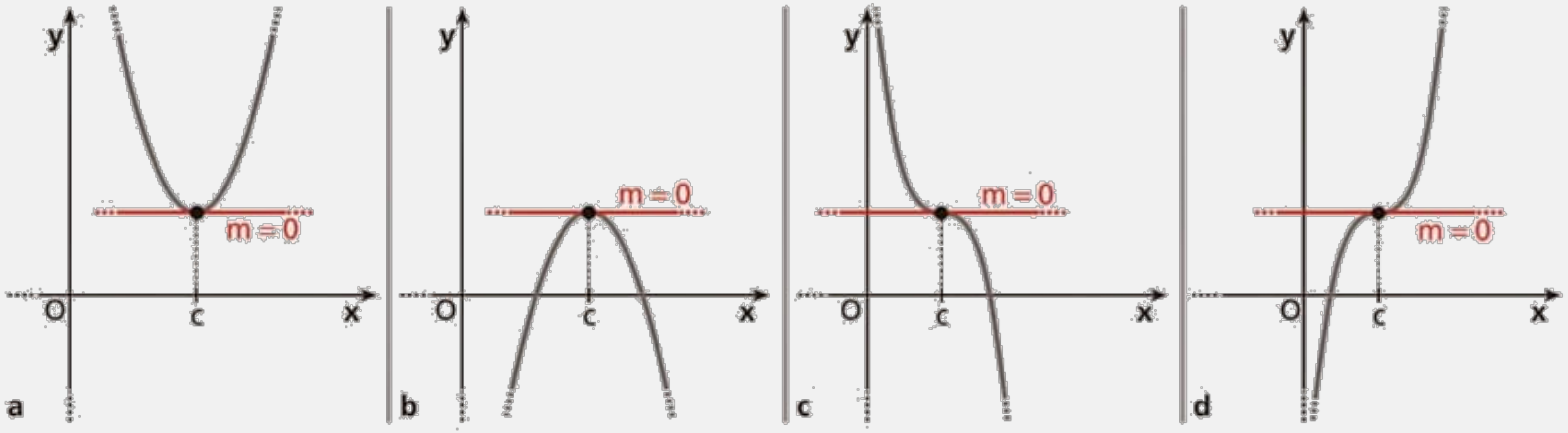
I punti x in cui la derivata di una funzione f si annulla vengono detti **punti stazionari** per f

$y = \overset{0}{\cancel{mx}} + q$

Cioè il punto x_0 tale che $f'(x_0) = 0$

Cioè i punto x_0 tale che la tangente in quel punto è orizzontale





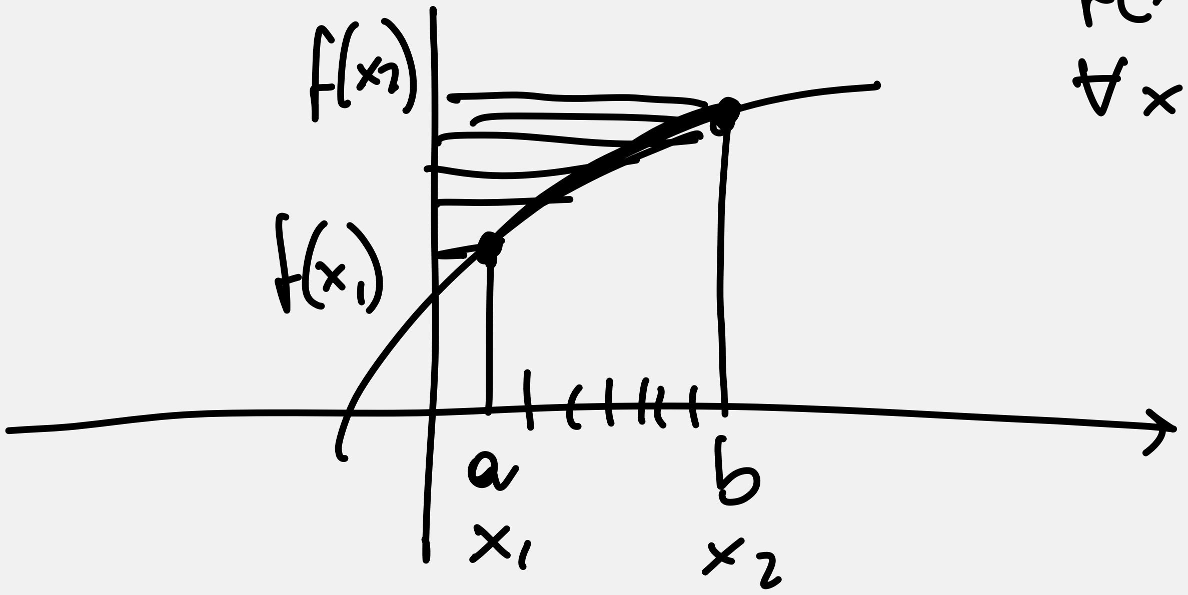
Teorema di Weierstrass

Una funzione $f(x)$ continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ ha un valore minimo $m = f(x_1)$ e massimo $M = f(x_2)$ tali che

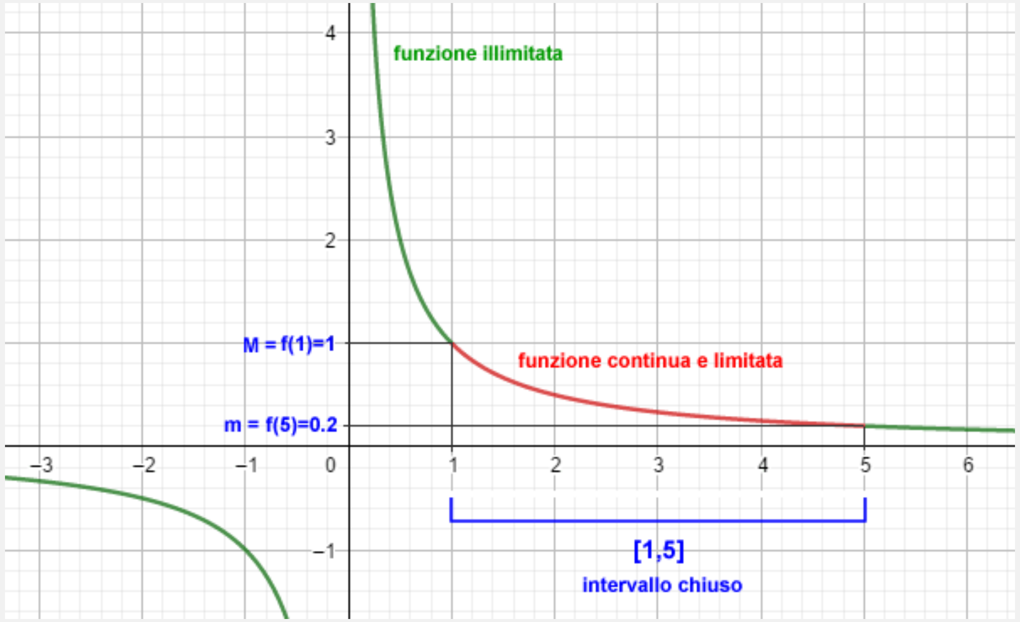
$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \qquad \forall x \in [a, b]$$

La funzione è dotata di minimo e massimo, che sono, in particolare, i punti x_1 e x_2 dell'intervallo $[a, b]$.

$f(x)$
$\forall x \in [a, b]$



Esempio. Sia data la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$



La funzione non è limitata nell'intervallo $(0,5]$ perché non ha un estremo superiore. Quindi non può avere un massimo M.

Non è limitata nemmeno nell'intervallo $[5, +\infty)$ perché pur avendo un limite che tende a zero (estremo inferiore), non esiste un numero x tale che $f(x) = 0$. Quindi non ha un minimo m.

Tuttavia, se prendo in considerazione l'intervallo chiuso $[1,5]$, la $f(x)$ diventa una funzione limitata:

$$0.2 \leq f(x) \leq 1, \qquad \forall x \in [1,5]$$

In questo caso, esistono due punti di minimo (x_1) e di massimo (x_2) nell'intervallo $[a, b]$ del dominio in cui la funzione assume il minimo e il massimo:

$$M = f(1) = 1, \qquad m = f(5) = 0.2$$

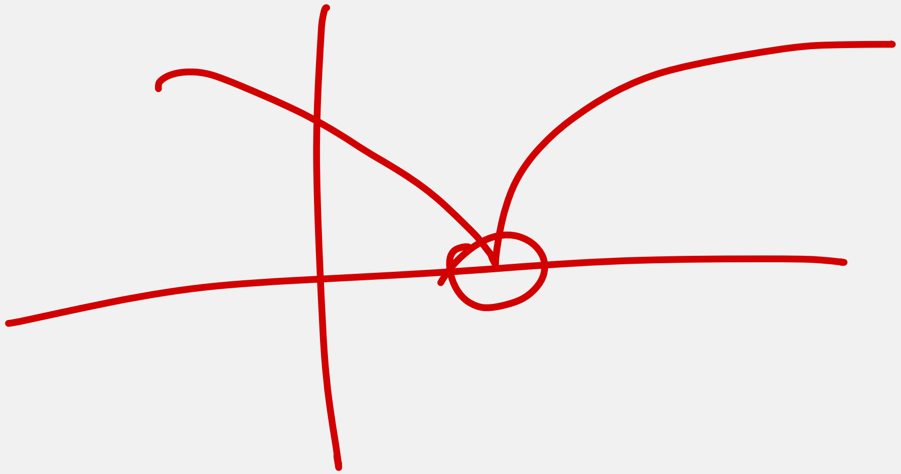
Teorema di Fermat

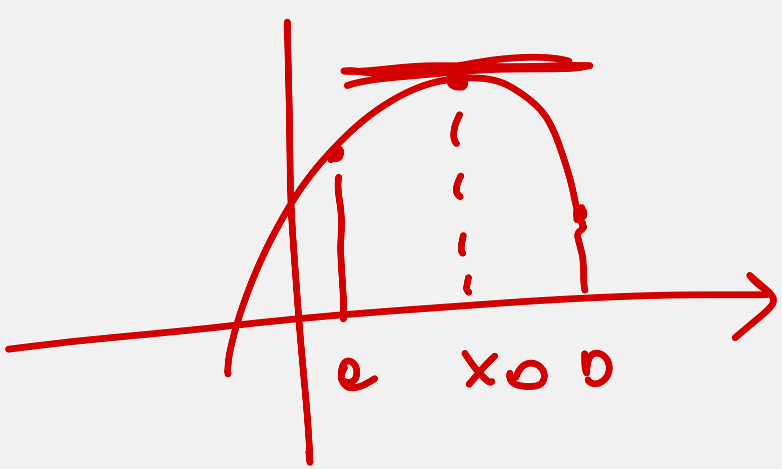
Sia $f\,:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione derivabile in $x_0\in(a,b)$ e sia x_0 un punto di estremo relativo.

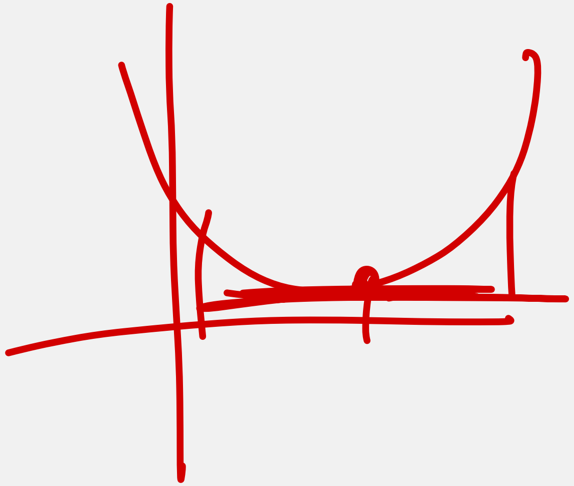
$$f'(x_0)=0$$

x_0 è un punto stazionario per f

Una funzione che ammette un massimo o un minimo relativo in un punto interno del dominio, e che sia ivi derivabile, ha la derivata prima nulla nel punto.







Se x_0 è un punto di estremo relativo per f tale che $\exists f'_-(x_0), \exists f'_+(x_0)$,

- Se x_0 è un punto di massimo relativo, allora

$$f'_-(x_0) \geq 0, \qquad f'_+(x_0) \leq 0$$

- Se x_0 è un punto di minimo relativo, allora

$$f'_-(x_0) \leq 0, \qquad f'_+(x_0) \geq 0$$

A partire da tale teorema, possiamo affermare che in punto x_0 di estremo relativo per una funzione f in cui f sia derivabile, la tangente al grafico di f nel punto $(x_0\,, f\,(x_0))$ è orizzontale

Dimostrazione

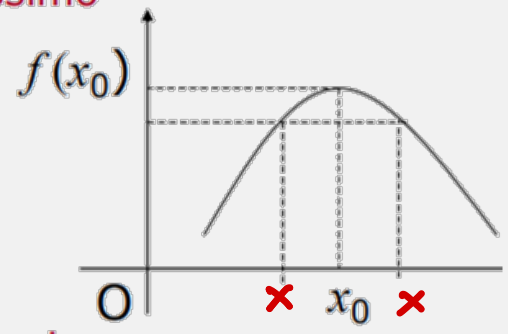
Per ipotesi, sappiamo che f è una funzione derivabile in $x_0 \in (a, b)$ e che x_0 è un punto di estremo relativo per f.
Supponiamo che x_0 sia un punto di massimo relativo.
Per definizione di massimo relativo:

$$\exists I_{x_0} : \forall x \in I_{x_0} \Rightarrow f(x) \le f(x_0)$$

In particolare:

$$\underset{x - x_0 > 0}{x > x_0} \Rightarrow \frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\le 0 \text{ perché } x_0 \text{ è punto di massimo}}}{\underbrace{x - x_0}_{>0}} \le 0$$

$$\underset{x - x_0 < 0}{x < x_0} \Rightarrow \frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\le 0 \text{ perché } x_0 \text{ è punto di massimo}}}{\underbrace{x - x_0}_{<0}} \ge 0$$



Dimostrazione

Passando ai limiti:

$$\lim_{x \to x_0^{+}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$$

Per il teorema della permanenza del segno, ha lo stesso segno del rapporto

$$\lim_{x \to x_0^{-}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$$

Per il teorema della permanenza del segno, ha lo stesso segno del rapporto

Poiché per ipotesi esiste $f'(x_0)$ => l'unica possibilità è che sia:

$$f'_-(x_0) = f'(x_0) = f'_+(x_0) = 0$$

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in $x_0 \in (a, b)$ e sia x_0 un punto di estremo relativo.

$$\Downarrow \; \cancel{\Uparrow}$$

$$f'(x_0) = 0$$

x_0 è un punto stazionario per f

Il viceversa non è valido!

Cioè, possono esistere punti stazionari, in cui si annulla la derivata prima di f, che non sono punti di estremo relativo

Esempio.

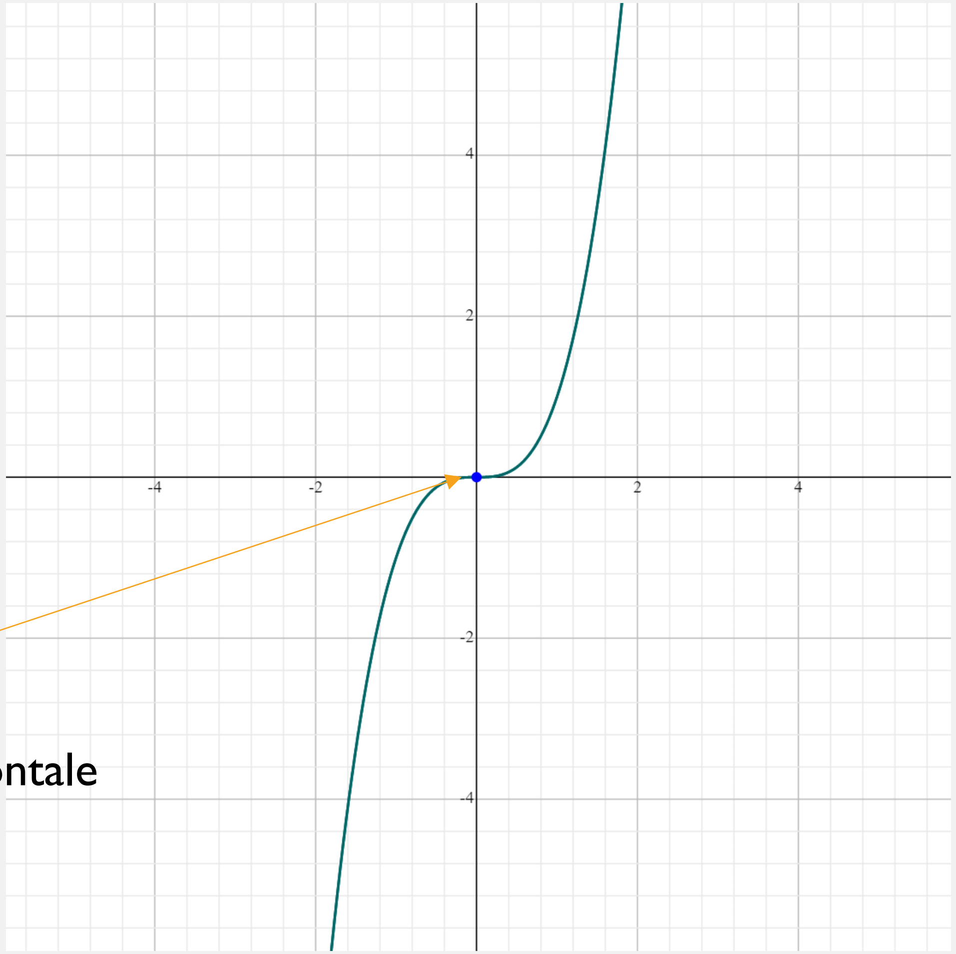
Sia data la funzione $f(x) = x^3$

La derivata è: $f'(x) = 3x^2$

Nel punto $x_0 = 0 \rightarrow f'(x_0) = f'(0) = 0$

Dunque, $x_0 = 0$ è un punto stazionario per la funzione f

Però, x_0 non è un punto di estremo relativo per f!



$x_0 = 0$ è un flesso a tangente orizzontale

Osservazione 1.

Dal teorema di Fermat, possiamo affermare che i punti di estremo relativo per una funzione interni all’intervallo di definizione vanno ricercati tra i punti stazionari

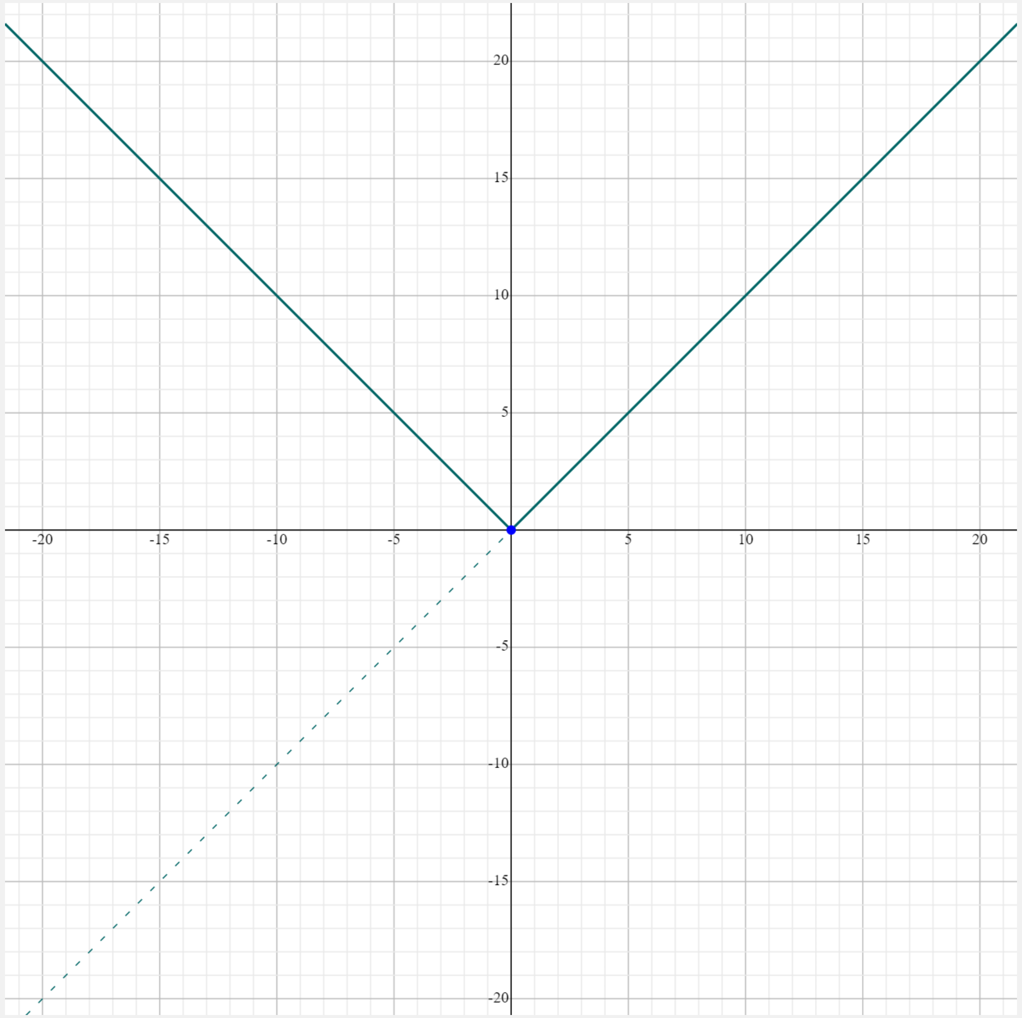
Osservazione 2.

Nei punti in cui una funzione non è derivabile non è possibile applicare il teorema di Fermat. Così, in tali punti bisogna studiare a parte il comportamento della funzione

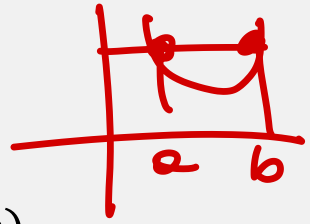
Esempio.

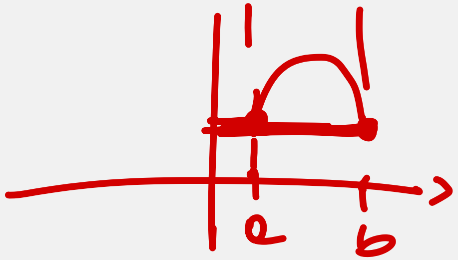
Sia data la funzione $f(x) = |x|$

La funzione valore assoluto non è derivabile nel punto $x_0 = 0$ (punto angoloso), quindi non possiamo applicare Fermat, però, dal grafico si vede chiaramente che il punto $x_0 = 0$ è un punto di minimo assoluto



Teorema di Rolle





Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b).
Se la funzione assume lo stesso valore agli estremi dell'intervallo, ossia $f(a) = f(b)$, allora esiste almeno un punto $x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) = 0$.

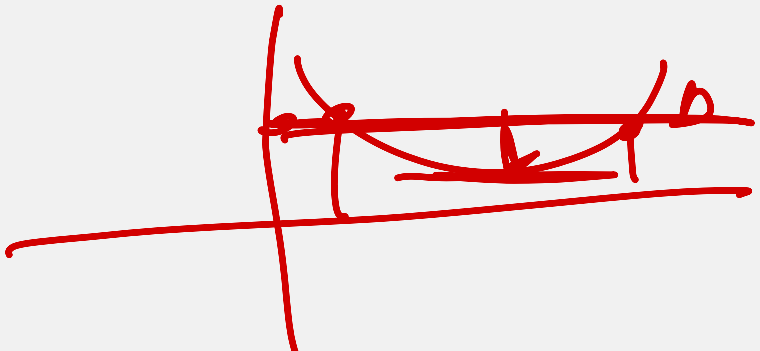
Dimostrazione.
Dato che sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Weierstrass, sappiamo che la funzione $y = f(x)$ assume in $[a, b]$ un massimo M e un minimo m assoluti.

1. Se il massimo e il minimo assoluti coincidono, ossia $M = m$, allora $y = f(x)$ è costante. Di conseguenza $f'(x) = 0$ per ogni unto $x \in (a, b)$ e il teorema vale sicuramente.

2. Se invece $m < M$, poiché nella nostra ipotesi $f(a) = f(b)$, almeno uno dei due valori m, M è assunto dalla funzione in un punto x_0 <u>interno</u> all'intervallo

Ad esempio, immaginiamo che $f(x_0) = M$. Dunque, x_0 è un punto estremante e per il teorema di Fermat risulta che $f'(x_0) = 0$. Risulta così la tesi.

Teorema di Rolle

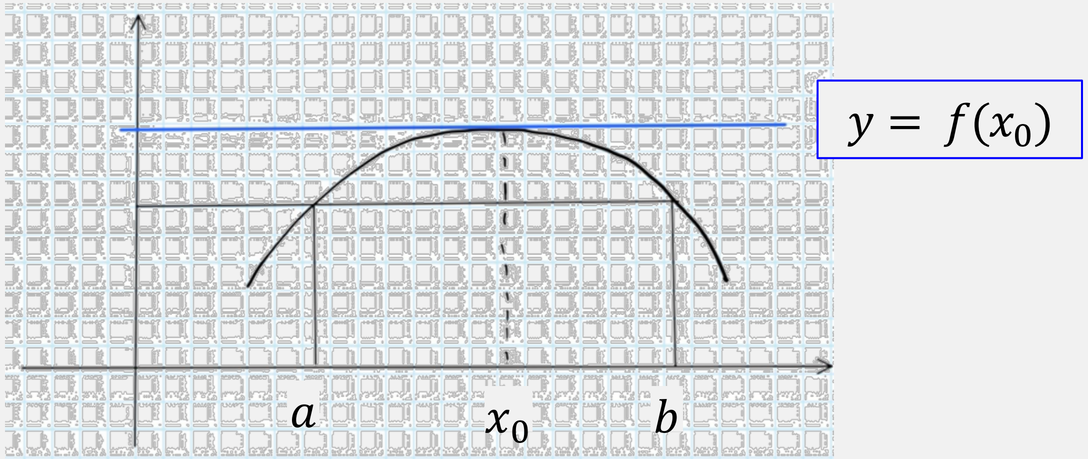


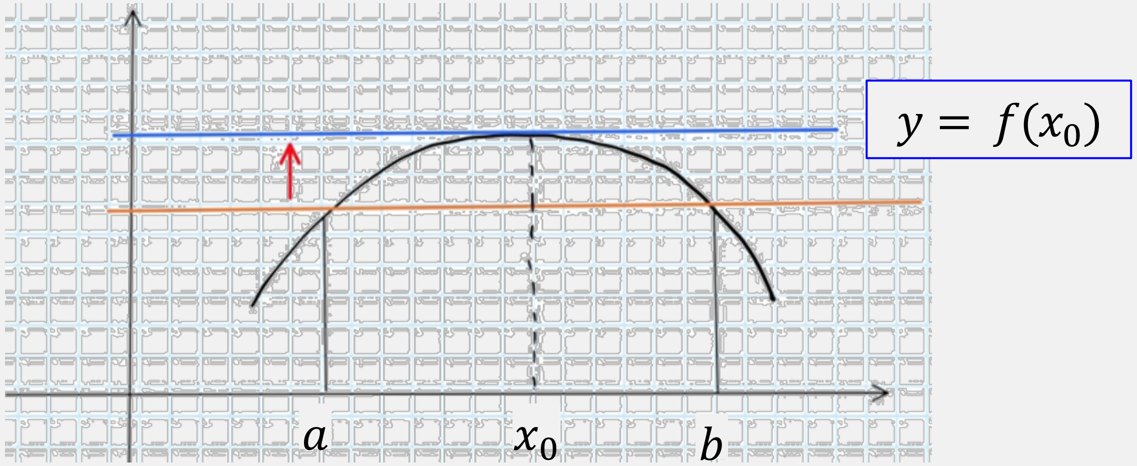
Osservazione.

Nel punto x_0 di cui si dimostra l'esistenza, la derivata prima è nulla.

La derivata prima esprime il coefficiente angolare della retta tangente al punto → nel punto x_0 tale coefficiente angolare vale zero.

La retta tangente è dunque orizzontale e la sua equazione è $y = f(x_0)$.

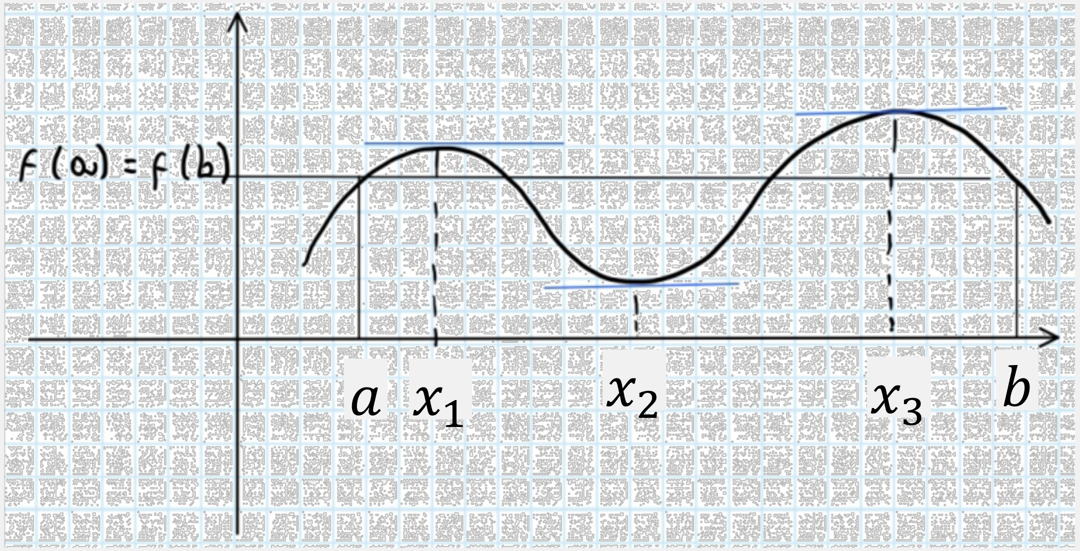




La retta tangente nel punto x_0 è parallela alla retta passante per i punti $A(a, f(a))$ e $B\big(b, f(b)\big)$:
può essere ottenuta come una traslazione di questa ultima retta fino al punto stazionario (x_0) in cui essa risulta tangente alla funzione.

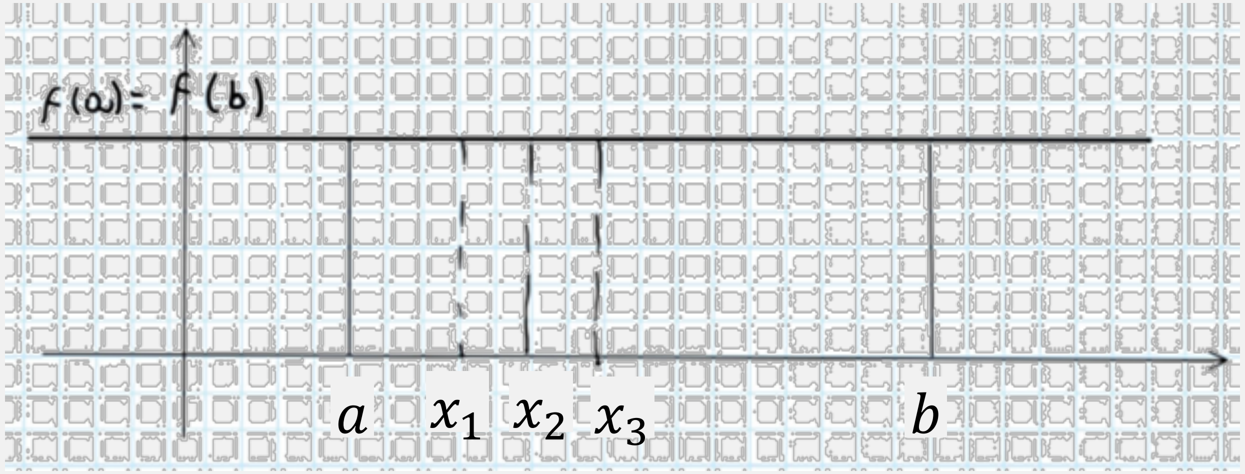
Teorema di Rolle

Osservazione.
Nel punto x_0 di cui si dimostra l'esistenza, la derivata prima è nulla.
Possono esserci più punti di questo tipo.



Nella funzione costante, i punti x_n sono infiniti:

$$\forall x_n \in (a,b) \rightarrow f'(x_n) = 0$$

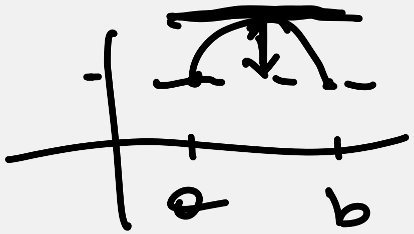


Teorema di Lagrange

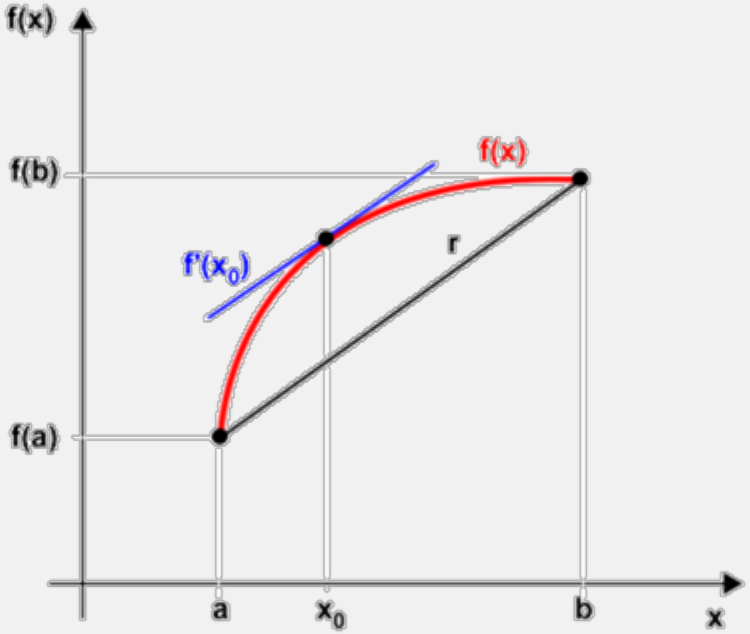
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzioni continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b). Allora esiste almeno un punto $x_0 \in (a, b)$ tale che:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

In altri termini, esiste un punto x_0 in cui la derivata $f'(x_0)$ è uguale al coefficiente angolare della retta che congiunge gli estremi a e b.
Al secondo membro si ritrova infatti il coefficiente angolare della retta per due punti: i punti $A \equiv (a, f(a))$ e $B \equiv (b, f(b))$



Il **Teorema di Lagrange è una generalizzazione del Teorema di Rolle.** Se infatti aggiungiamo l'ipotesi che $f(a) = f(b)$, ricadendo quindi nelle ipotesi del Teorema di Rolle, il secondo membro nella tesi si annulla.



Esempio.

La funzione $f(x) = x^2$ è continua nell'intervallo $[0,2]$ e derivabile in $(0,2)$.

Il punto in cui si verifica il t. di Lagrange è: $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

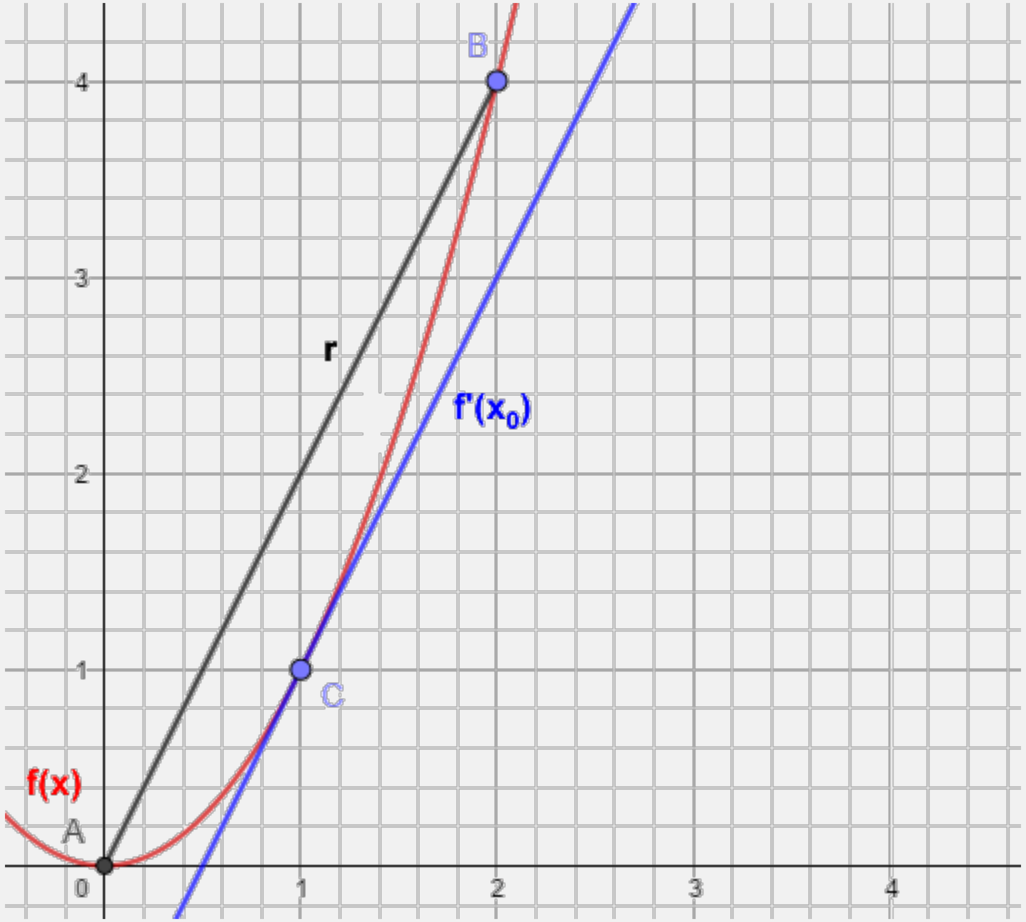
Sappiamo che la sua derivata è $f'(x) = 2x$:

$$2x_0 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Sappiamo che gli estremi dell'intervallo sono: $a = 0$ e $b = 2$:

$$2x_0 = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{4 - 0}{2 - 0} = 2 \ \rightarrow x_0 = \frac{2}{2} = 1$$

Nel punto x_0 la derivata $f'(x_0)$ è uguale al coefficiente angolare della retta che congiunge gli estremi $[a, b]$.



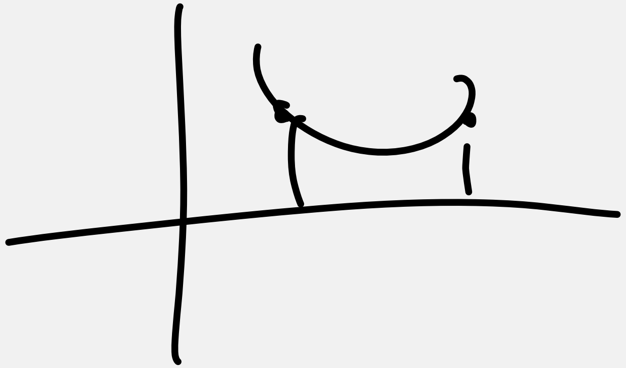
Teorema di Cauchy (o degli incrementi finiti)

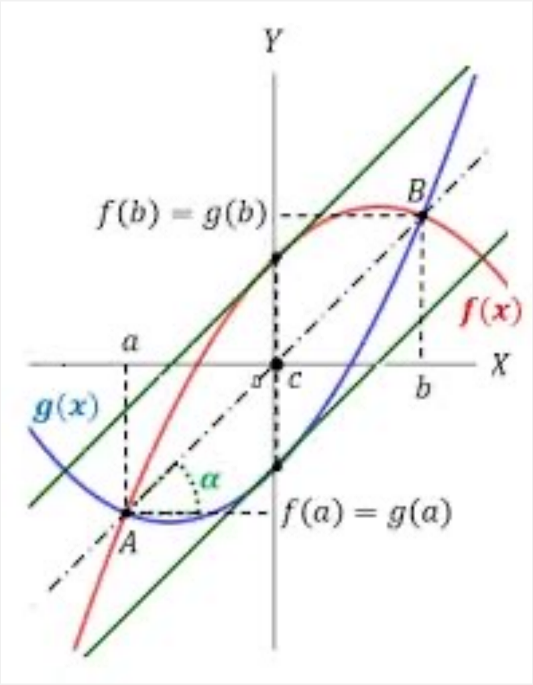
Siano $f\ ,g\ :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ due funzioni continue in $[a,b]$ e derivabili in (a,b).
Allora esiste almeno un punto $x_0 \in (a,b)$ tale che:

$$[f(b)-f(a)]g'(x_0) = f'(x_0)[g(b)-g(a)]$$

Se inoltre valgono le condizioni: $g'(x_0) \neq 0$ e $g(b) \neq g(a)$, allora questa relazione può anche essere scritta:

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$





Teorema di Cauchy (o degli incrementi finiti)

Osservazione.
Il teorema di Cauchy può essere visto come una generalizzazione del teorema di Lagrange.

Se infatti consideriamo una funzione $f(x)$ che rispetti le ipotesi del teorema e poniamo invece $g(x) = x$ (che è sempre continua in un qualsiasi intervallo $[a, b]$ e derivabile in (a, b)), allora abbiamo che $g'(x_0) = 1$ e $g(b) = b \neq a = g(a)$ (stiamo escludendo il caso limite in cui l'intervallo sia ridotto a un solo punto $a = b$, privo di interesse).

Possiamo allora utilizzare la seconda formulazione del teorema ottenendo:

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \Rightarrow \boxed{f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

Che è proprio l'enunciato del teorema di Lagrange applicato alla funzione $f(x)$.

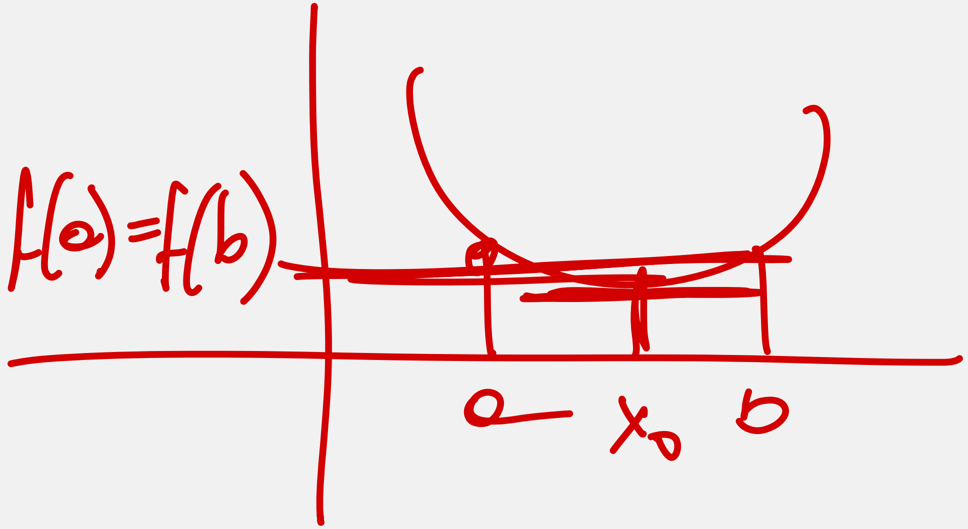
Teorema di Cauchy (o degli incrementi finiti)

Dimostrazione 1.

Supponiamo che $g(a) = g(b)$. Allora, g soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle, quindi esiste un $x_0 \in (a, b)$ tale che $g'(x_0) = 0$.

$$[f(b) - f(a)]g'(x_0) = f'(x_0)[g(b) - g(a)] \to 0 = 0$$

Teorema dimostrato



Teorema di Cauchy (o degli incrementi finiti)

Dimostrazione 2.

Supponiamo, invece, che $g(a) \neq g(b)$. Allora, possiamo definire il numero $R = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

Consideriamo la funzione ausiliaria $h(x)$ definita come: $h(x) = f(x) - Rg(x)$

La funzione $h(x)$ rispetta le ipotesi del teorema di Rolle:

- $h(x)$ è combinazione lineare di $f(x)$ e $g(x)$, che sono due funzioni che per ipotesi sono continue in $[a, b]$ e derivabili in (a, b); quindi anche $h(x)$ rispetta tali condizioni
- Abbiamo che

$$h(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(a) = \frac{f(a)\big(g(b)-g(a)\big) - g(a)\big(f(b)-f(a)\big)}{g(b)-g(a)} = \frac{g(b)f(a) - g(a)f(b)}{g(b)-(a)}$$

$$h(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(b) = \frac{f(b)\big(g(b)-g(a)\big) - g(b)\big(f(b)-f(a)\big)}{g(b)-g(a)} = \frac{-f(b)g(a) + f(a)g(b)}{g(b)-(a)}$$

Confrontando le espressione, vediamo che $h(a) = h(b)$

$$h(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(a) = \frac{f(a)\big(g(b) - g(a)\big) - g(a)\big(f(b) - f(a)\big)}{g(b) - g(a)} = \frac{g(b)f(a) - g(a)f(b)}{g(b) - (a)}$$

$$h(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(b) = \frac{f(b)\big(g(b) - g(a)\big) - g(b)\big(f(b) - f(a)\big)}{g(b) - g(a)} = \frac{-f(b)g(a) + f(a)g(b)}{g(b) - (a)}$$

Confrontando le espressione, vediamo che $h(a) = h(b)$

Il teorema di Rolle, allora, ci dice che esiste un valore $x_0 \in (a, b)$ tale per cui $h'(x_0) = 0$.Visto che:

$$h'(x) = \big(f(x) - Rg(x)\big)' = f'(x) - Rg'(x),$$

Otteniamo:

$$h'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = Rg'(x_0) \Leftrightarrow f'(x_0)\big(g(b) - g(a)\big) = g'(x_0)\big(f(b) - f(a)\big)$$

L’ultima relazione è quella che volevamo dimostrare.

- **CARATTERIZZAZIONE DELLE FUNZIONI MONOTONE**

Ricordiamo: Funzioni monotone – crescenti

Sia data una funzione

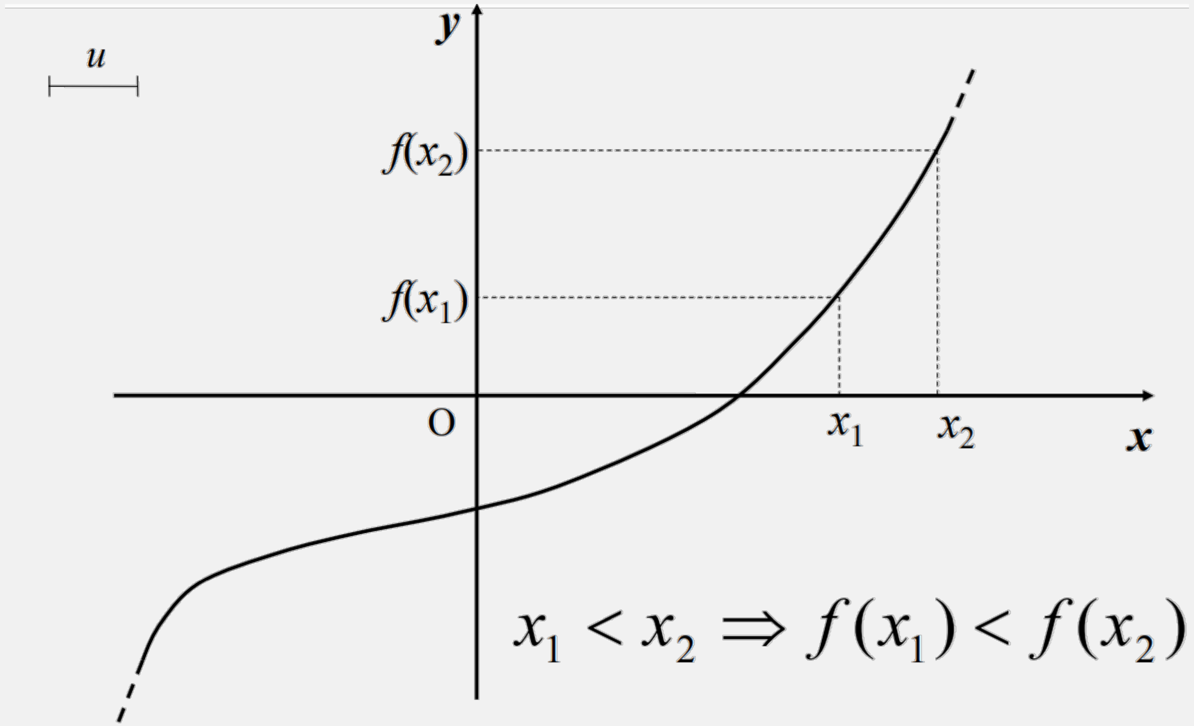
$f : A \to B, \qquad con\ A, B \subseteq \mathbb{R}, \qquad A, B \neq \emptyset$

Si dice che f è **strettamente crescente** in A se:

$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Si dice che f è **crescente** in A se:

$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$



Ricordiamo: Funzioni monotone – decrescenti

Sia data una funzione

$f : A \to B, \qquad con\ A, B \subseteq \mathbb{R}, \qquad A, B \neq \emptyset$

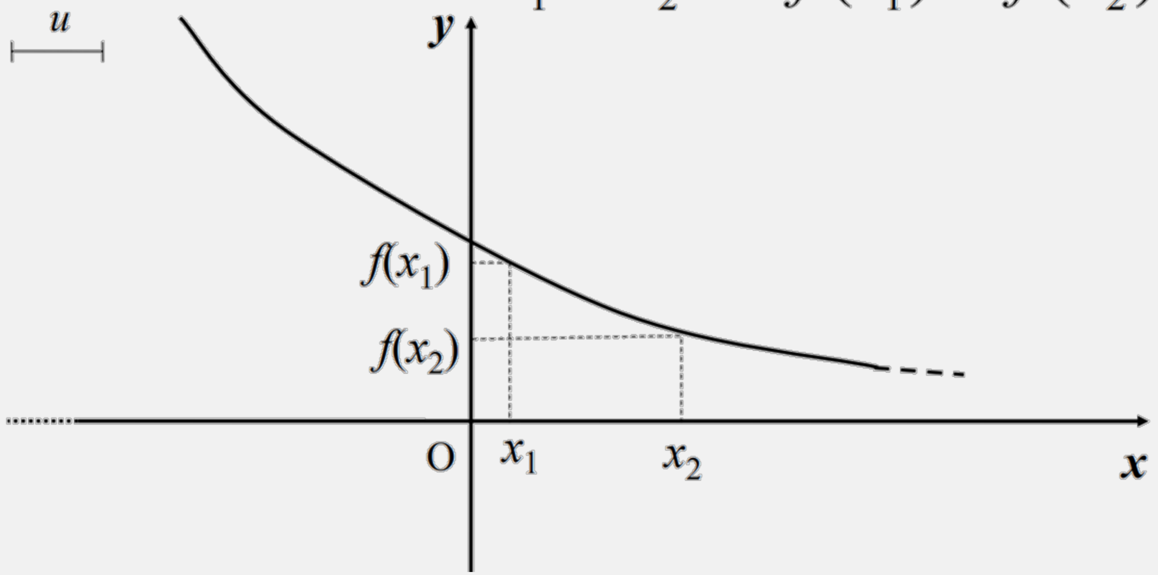
Si dice che f è **strettamente decrescente** in A se:

$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Si dice che f è **decrescente** in A se:

$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$



Definizione crescente/decrescente

Vediamo ora come il segno della derivata prima di una funzione caratterizzi la monotonia della funzione stessa.

A tale proposito, consideriamo una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabile nei punti interni all'intervallo e siano dati due punti $x_0, x_1 \in (a, b)$.

Già sappiamo che:

- f crescente se : $x_1 > x_0 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_0)$
  $x_0 + h > x_0 \Rightarrow f(x_0 + h) \geq f(x_0)$

- f decrescente se : $x_1 > x_0 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_0)$
  $x_0 + h > x_0 \Rightarrow f(x_0 + h) \leq f(x_0)$

Quindi:

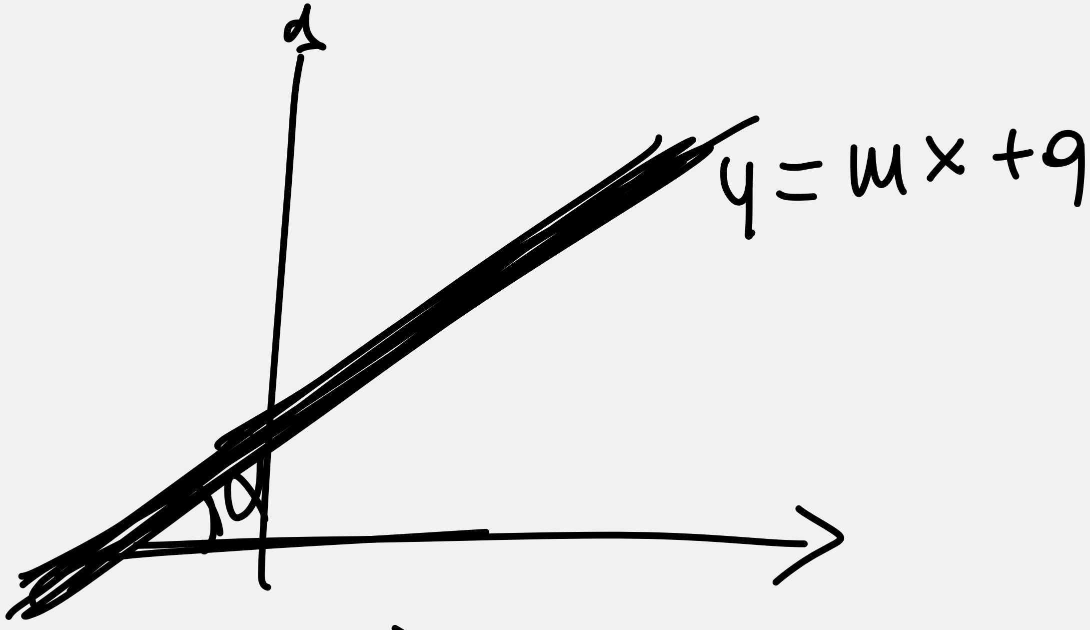
- f crescente $\Leftrightarrow \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0} \geq 0$

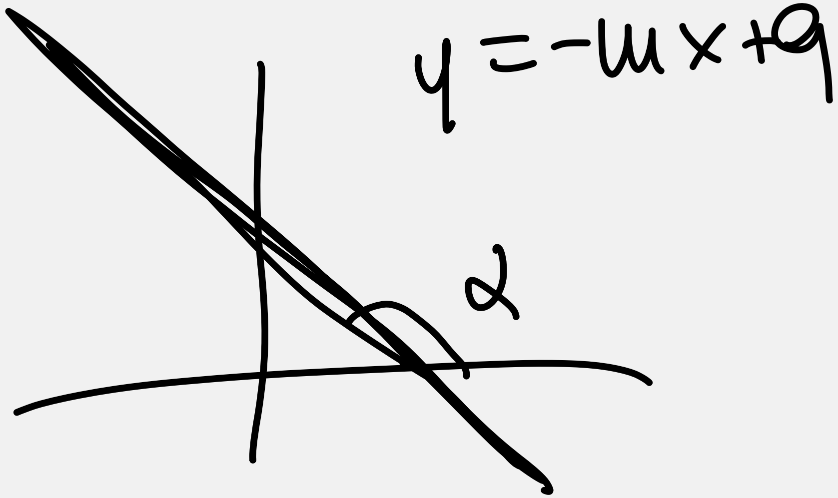
- f decrescente $\Leftrightarrow \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0} \leq 0$

Passando al limite per $x \rightarrow x_0$

- f crescente $\Leftrightarrow f'(x_0) \geq 0, \forall x_0 \in (a,b)$

- f decrescente $\Leftrightarrow f'(x_0) \leq 0, \forall x_0 \in (a,b)$





Quindi:

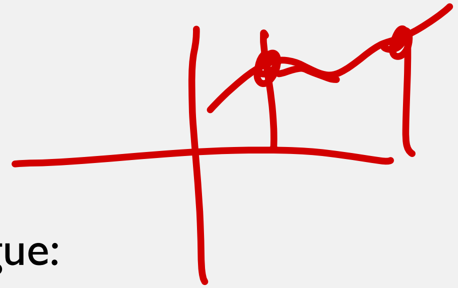
Criterio di monotonia

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b).
Allora vale che:

- f crescente in $[a,b] \Leftrightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in (a,b)$

- f decrescente in $[a,b] \Leftrightarrow f'(x) \leq 0, \forall x \in (a,b)$

A partire dal criterio di monotonia, è possibile effettuare lo studio dei massimi e minimi relativi ed assoluti di una funzione



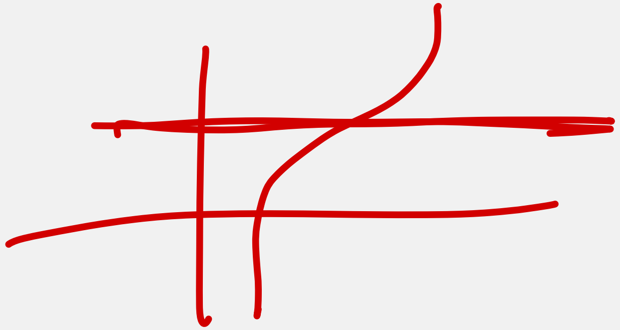
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione definita in $[a, b]$ e derivabile in (a, b).

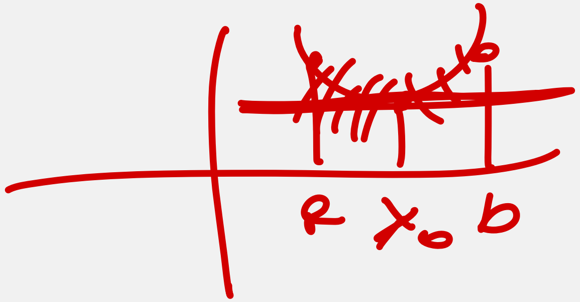
Allora, per ricercare gli estremi relativi ed assoluti (se esistono) della f si può procedere come segue:

1. Si calcolano i valori $f(a)$ e $f(b)$

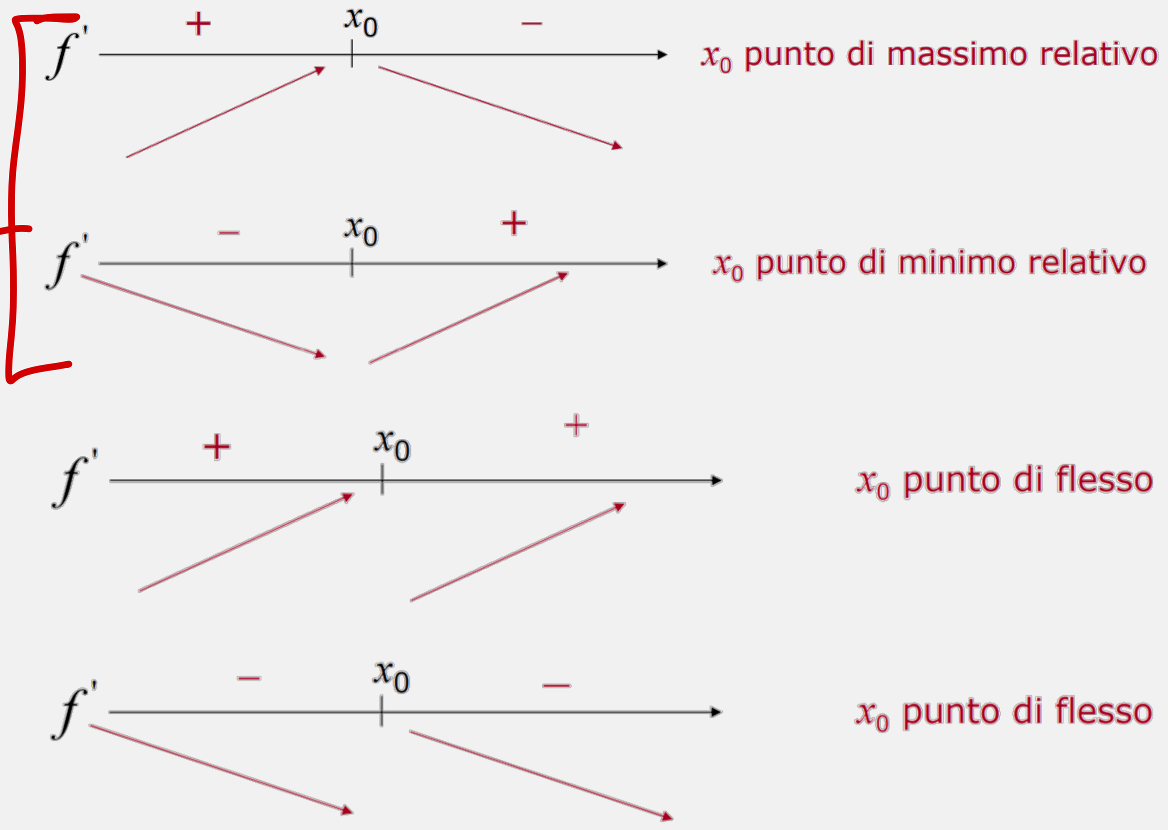
2. Si determina la funzione derivata $f'(x)$ e si risolve l'equazione $f'(x) = 0$. Le soluzioni di tale equazione sono i punti stazionari di f tra i quali vi sono anche gli eventuali punti di estremo locale interni ad (a, b)

3. Se:
   a. l'equazione $f'(x) = 0$ non ammette soluzioni (non vi sono punti stazionari), allora $f(a)$ e $f(b)$ (diversi fra loro) sono estremi assoluti
   b. l'equazione $f'(x) = 0$ ammette soluzioni e, ad esempio, $x = x_0$ è un punto stazionario, allora per stabilire se x_0 è o meno un estremo relativo, occorre studiare il segno della derivata prima in un intorno di x_0 e applicare quindi il criterio di monotonia





Più precisamente, se $f'(x_0) = 0$ si può verificare che:



punto staz. = punto estrem.

4. Trovati gli eventuali punti di estremi locale, si calcola il valore di f in tali punti e lo si confronta con i valori $f(a)$ ed $f(b)$.

Come conseguenza del criterio di monotonia, si ha:

Caratterizzazione delle funzioni costanti in un intervallo

Sia f una funzione derivabile in un intervallo $[a, b]$ tale che $f'(x) = 0, \forall x \in (a, b)$

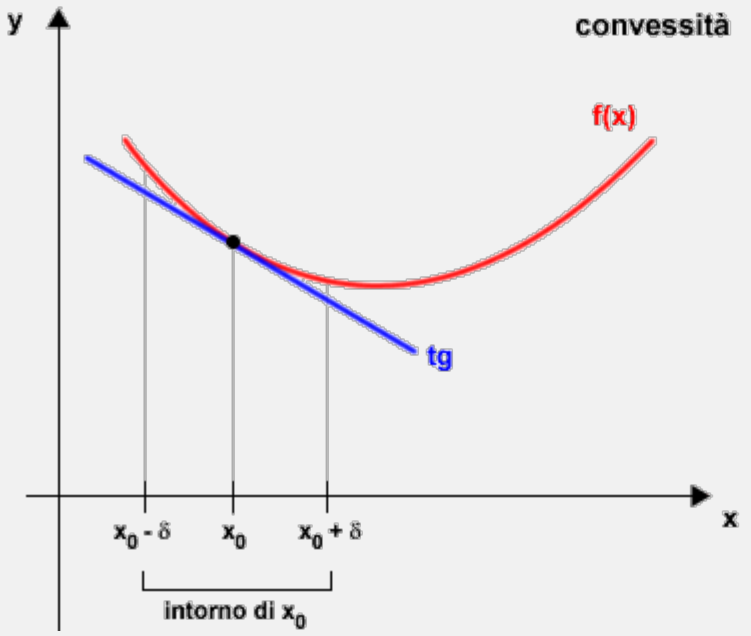
$$\Updownarrow$$

f è costante nell'intervallo $[a, b]$

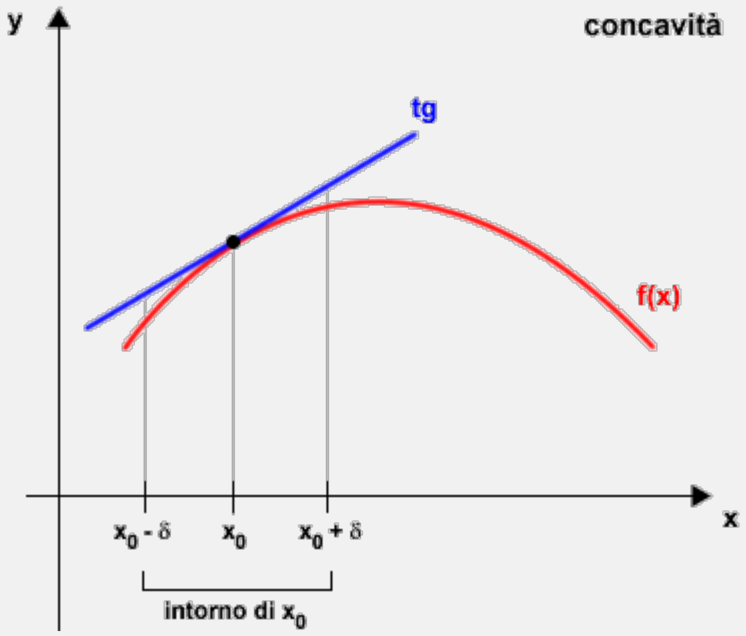
- **CONCAVITÀ E CONVESSITÀ**

Funzioni convesse e funzioni concave

Si dice che $f(x)$ è **convessa** in un intervallo $[a,b]$ se $\forall x_0 \in [a,b]$ il grafico di $f(x)$ è al di sopra della retta tangente al grafico di f nel punto di coordinate $\left(x_0, f(x_0)\right)$

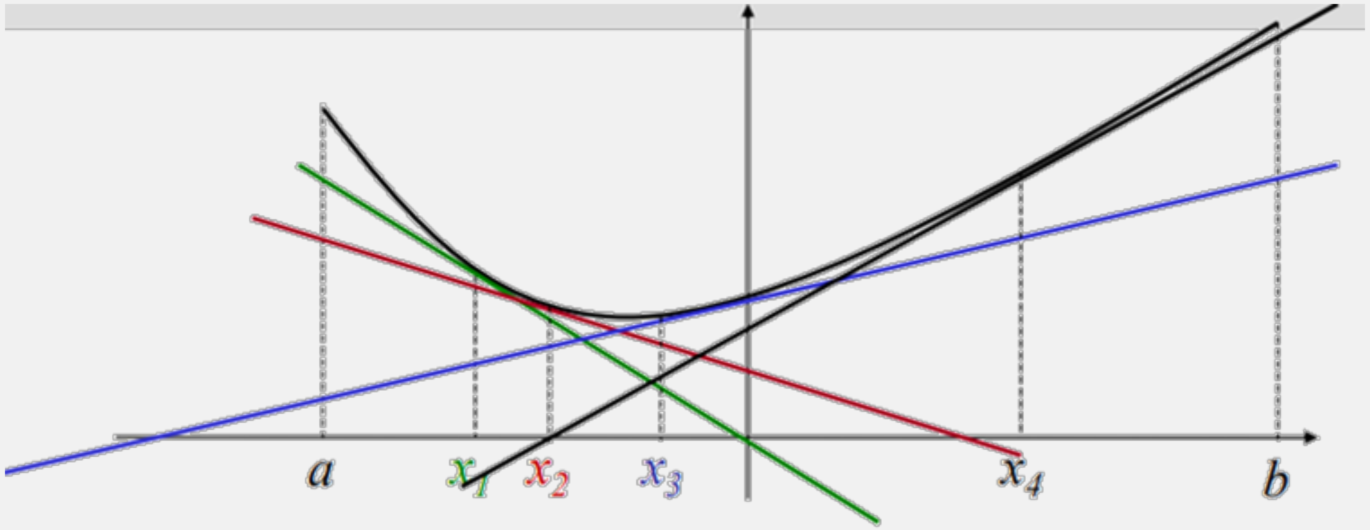


Si dice che $f(x)$ è **concava** in un intervallo $[a,b]$ se $\forall x_0 \in [a,b]$ il grafico di $f(x)$ è al di sotto della retta tangente al grafico di f nel punto di coordinate $\left(x_0, f(x_0)\right)$



Significato geometrico della convessità

Al crescere di x_0 in $[a, b]$ da valori più piccoli fino a valori più grandi, la pendenza della retta tangente al grafico di f nel punto $\left(x_0, f(x_0)\right)$ cambia e in particolare, il **coefficiente angolare** di tale tangente <u>cresce</u> passando da valori più piccoli (anche negativi) a valori più grandi

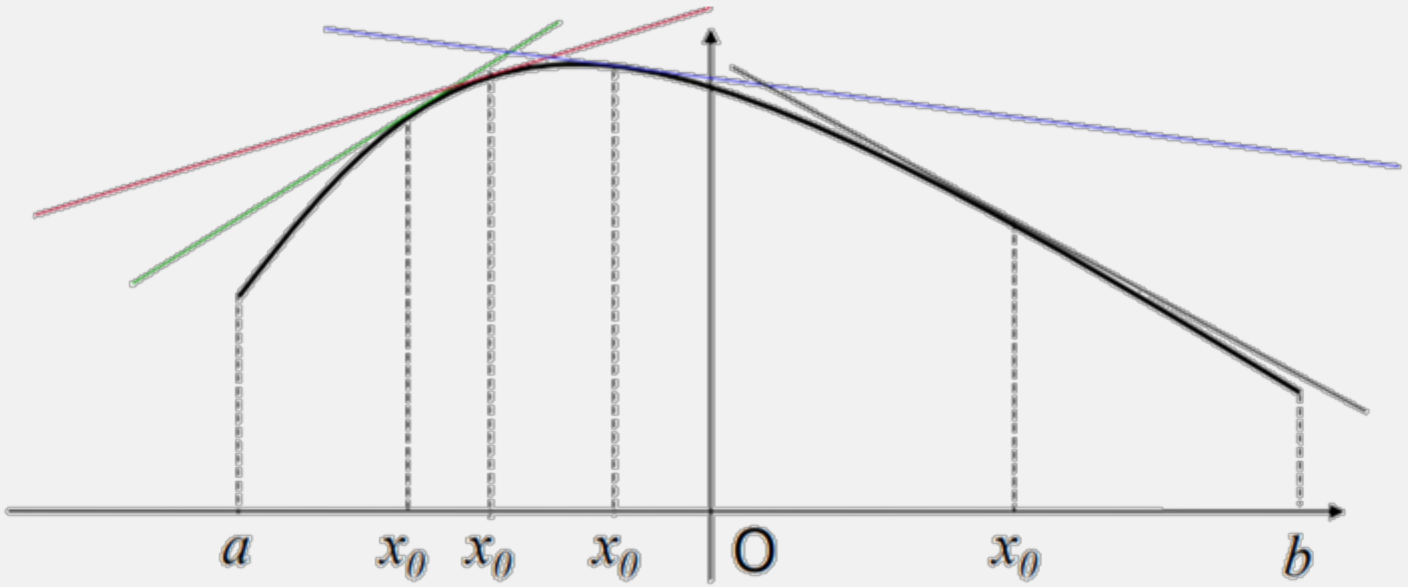


$$x_1 < x_2 \Rightarrow f'(x_1) < f'(x_2) \Rightarrow f'(x) \text{ crescente}$$

$$f \text{ convessa in } [a,b] \Leftrightarrow f' \text{ crescente in } [a,b] \Leftrightarrow \left(f'\right)' \geq 0 \text{ in } [a,b] \Leftrightarrow f'' \geq 0 \text{ in } [a,b]$$

Significato geometrico della concavità

Al crescere di x_0 in $[a, b]$ da valori più piccoli fino a valori più grandi, la pendenza della retta tangente al grafico di f nel punto $\left(x_0, f(x_0)\right)$ cambia e in particolare, il **coefficiente angolare** di tale tangente <u>decresce</u> passando da valori più grandi a valori più piccoli (anche negativi)



Criterio di convessità

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile due volte in (a, b).

al crescere delle x

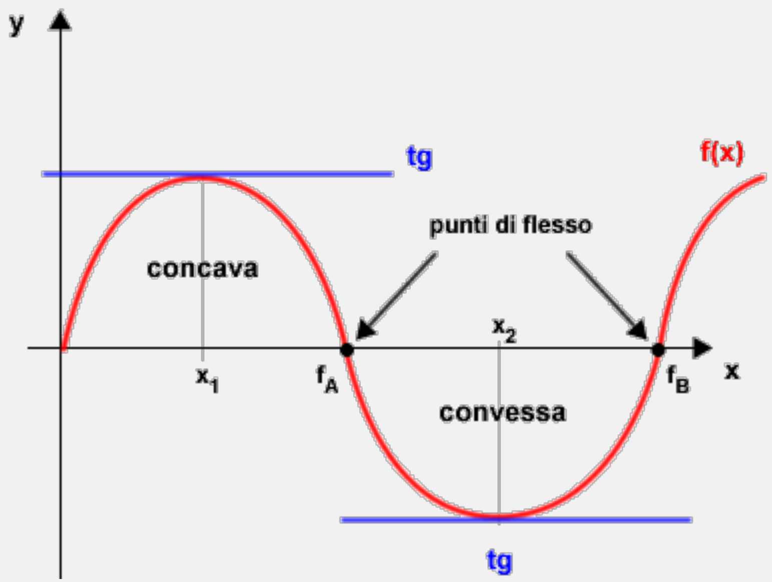
Allora vale che:

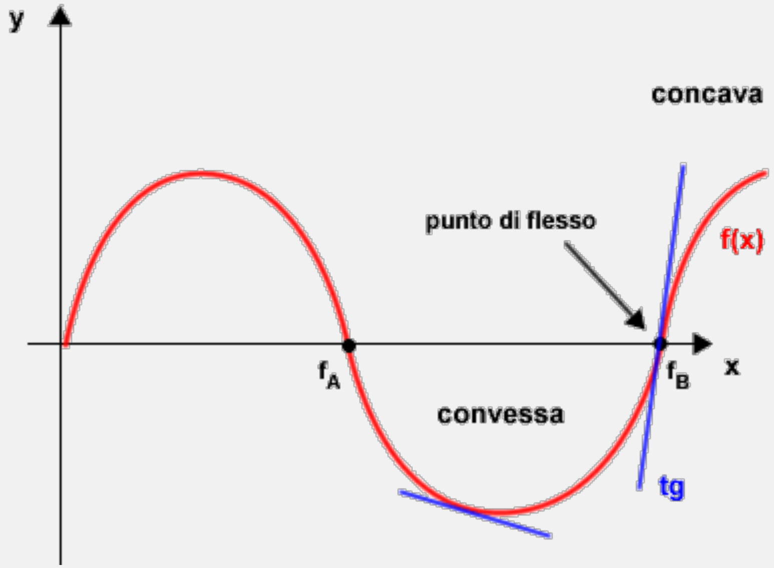
- f convessa in $[a, b] \Leftrightarrow f'$ crescente in $[a, b] \Leftrightarrow f'' \geq 0 \; in \; [a, b]$

- f concava in $[a, b] \Leftrightarrow f'$ decrescente in $[a, b] \Leftrightarrow f'' \leq 0 \; in \; [a, b]$

Se la derivata prima di un funzione è crescente nell'intervallo $[a, b]$, la funzione $f(x)$ è convessa
Se la derivata prima di un funzione è decrescente nell'intervallo $[a, b]$, la funzione $f(x)$ è concava

Se la derivata prima di una funzione ha come significato geometrico quello di pendenza del grafico della funzione stessa, la derivata seconda rappresenta la variazione di tale pendenza





All'interno di uno stesso intervallo, il verso della concavità di una funzione può cambiare.

Sia f derivabile due volte in (a, b) e sia $x_0 \in [a, b]$;
se f è convessa in $[a, x_0]$ e concava in $[x_0, b]$:
Allora il punto x_0 di transizione tra le due concavità è detto punto di flesso

In particolare, poiché il verso della concavità è caratterizzato dal segno della derivata seconda f'', dire che nel punto x_0 cambia il verso della concavità vuol dire che nel punto x_0 la derivata seconda f'' si annulla:

x_0 punto di flesso $\Longleftrightarrow f''(x_0) = 0$