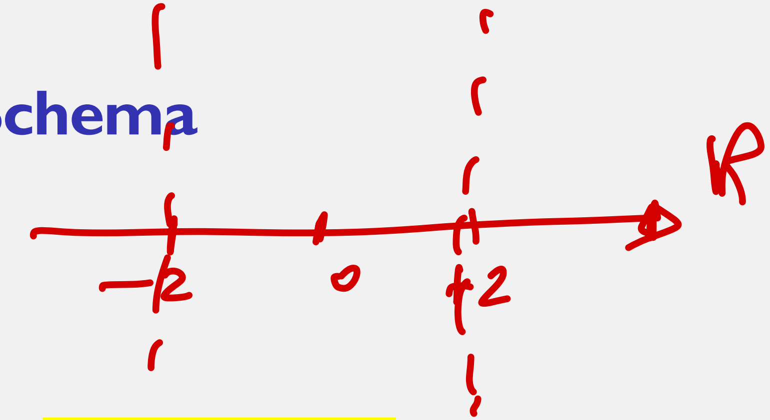
- **LO STUDIO DI FUNZIONE**

Schema



$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$$

$x^2 - 4 \neq 0$

$x^2 \neq 4$

$x \neq \pm 2$

$D_f = \{\forall x \in \mathbb{R} : x \neq \pm 2\} = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$

$\mathbb{R} - \{+2\} - \{-2\}$

1. DOMINIO DI f

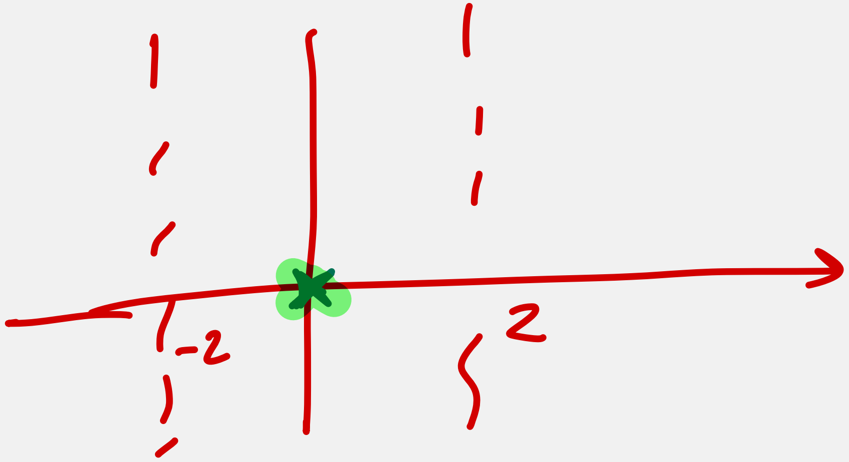
La prima informazione importante è capire per quali valori reali la funzione è definita.
Nell'esempio, il dominio è dato da $D_f = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$, cioè consiste di tutti i numeri reali, con l'esclusione dei punti che annullano il denominatore (± 2).

Ricordiamo: per le funzioni razionali, il dominio è dato dai punti dove il denominatore è diverso da zero; per le funzioni algebriche che contengono radici pari, il dominio è dato dai punti dove l'argomento della radice è positivo o nullo; per le funzioni in cui appare un logaritmo, l'argomento era positivo; per le funzioni esponenziali, trigonometriche e polinomiali, il dominio è dato da tutto l'asse reale.

Può essere utile stabilire anche se la funzione ha *simmetrie*, cioè se è pari $[f(x) = f(-x)]$ o dispari$[f(-x) = -f(x)]$.
Nell'esempio, vediamo che la funzione è dispari, quindi nel grafico vedremo tale simmetria.

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^3}{x^2-4} \\ x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \dfrac{x^3}{x^2-4} \\ y = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$$



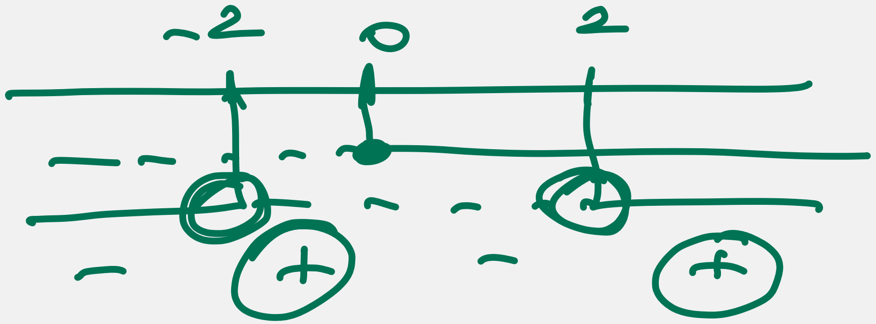
2. INTERSEZIONI CON GLI ASSI

Determinare gli eventuali punti di intersezione della curva con gli assi coordinati significa trovare le coordinate dei punti in cui, eventualmente, la funzione interseca l'asse x e le coordinate dei punti in cui, eventualmente, la funzione interseca l'asse y.

• Per trovare le coordinate dei punti in cui la funzione interseca l'asse y si vede cosa succede quando si pone $x = 0$ nella funzione.

• Per trovare le coordinate dei punti in cui la funzione interseca l'asse x si vede cosa succede quando si pone $y = 0$ nella funzione

Nell'esempio, la funzione interseca l'asse x e l'asse y soltanto nell'origine.



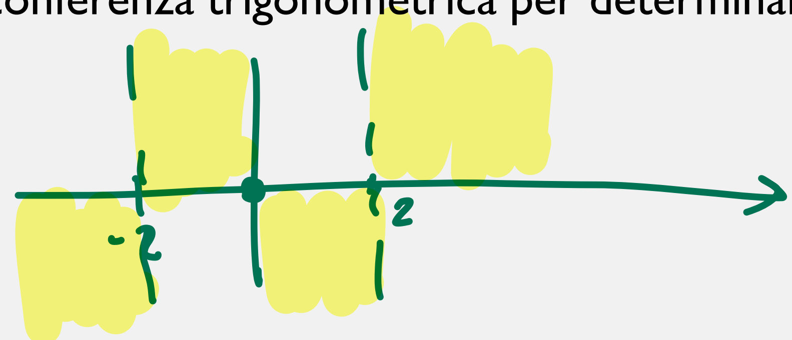
$$\frac{x^3}{x^2-4} \geq 0 \rightarrow \begin{cases} x^3 \geq 0 \\ x^2-4 > 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$$

3. SEGNO DI f

Vogliamo determinare i valori di x per i quali $f(x) \geq 0$. Nell'esempio, dobbiamo studiare separatamente il segno di numeratore e denominatore, e poi mettere insieme le informazioni. Il numeratore è positivo o nullo per $x \geq 0$, mentre il denominatore è positivo per $x < -2$ e $x > 2$. pertanto, abbiamo che $f(x) \geq 0$ per $-2 < x \leq 0, x > 2$.

Ricordiamo: studiare il segno per le funzioni razionali equivale a risolvere due disequazioni, una per il numeratore e una per il denominatore; è poi necessario combinare i risultati; la funzione esponenziale è sempre strettamente positiva; per studiare il segno della funzione logaritmo è necessario determinare per quali valori di x l'argomento del logaritmo è ≥ 1; per le radici dispari il segno è dato dal segno del radicando; le radici pari sono sempre positive; per le funzioni trigonometriche è utile ricorrere alla circonferenza trigonometrica per determinarne il segno.



$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$$

4. ASINTOTI DI f

Ricordiamo:

- se $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$, allora, la retta $x = x_0$ è detta <u>asintoto verticale</u> per la funzione $f(x)$
- se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l_1$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l_2$, allora, $f(x)$ ammette due <u>asintoti orizzontali</u>: $y = l_1$ a $+\infty$ e $y = l_2$ a $-\infty$

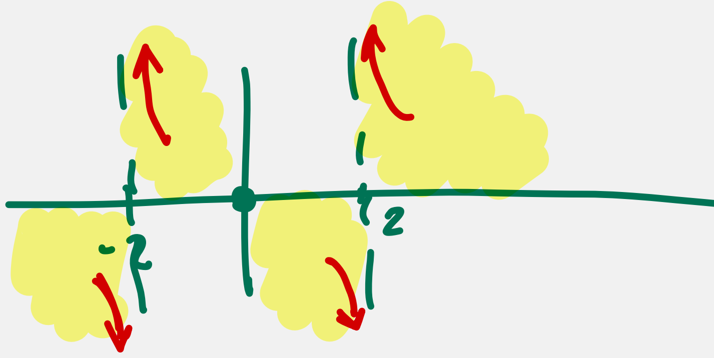
- se si verificano le seguenti condizioni, allora il grafico della funzione $f(x)$ ammette asintoto obliquo di equazione $y = mx + q$: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0\ finito$, $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx] = q\ finito$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$$

Calcoliamo il limite di f per x tale che tende a $\pm\infty$ nel caso in cui il dominio contenga valori di x arbitrariamente grandi (positivi o negativi) e poi andiamo a studiare il limite, eventualmente solo destro o sinistro della funzione, nei punti di frontiera del dominio (punti che non appartengono al dominio, ma ogni intervallo aperto di tali punti interseca il domini di f).
Nell'esempio, i punti critici sono $x = \pm 2$ ed è necessario calcolare separatamente il limite destro e sinistro, in quanto la funzione cambia segno in tali punti:

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x^3}{x^2 - 4} = -\infty, \quad \lim_{x \to -2^+} \frac{x^3}{x^2 - 4} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^3}{x^2 - 4} = -\infty, \quad \lim_{x \to 2^+} \frac{x^3}{x^2 - 4} = +\infty$$



Quando, come in questo caso, abbiamo che il limite destro e/o sinistro per x che tende a un valore $a \in \mathbb{R}$ è uguale a $\pm\infty$, diciamo che la funzione ha asintoto verticale $x = a$. Dunque, la funzione dell'esempio ha asintoti verticali $x = -2$ e $x = 2$.

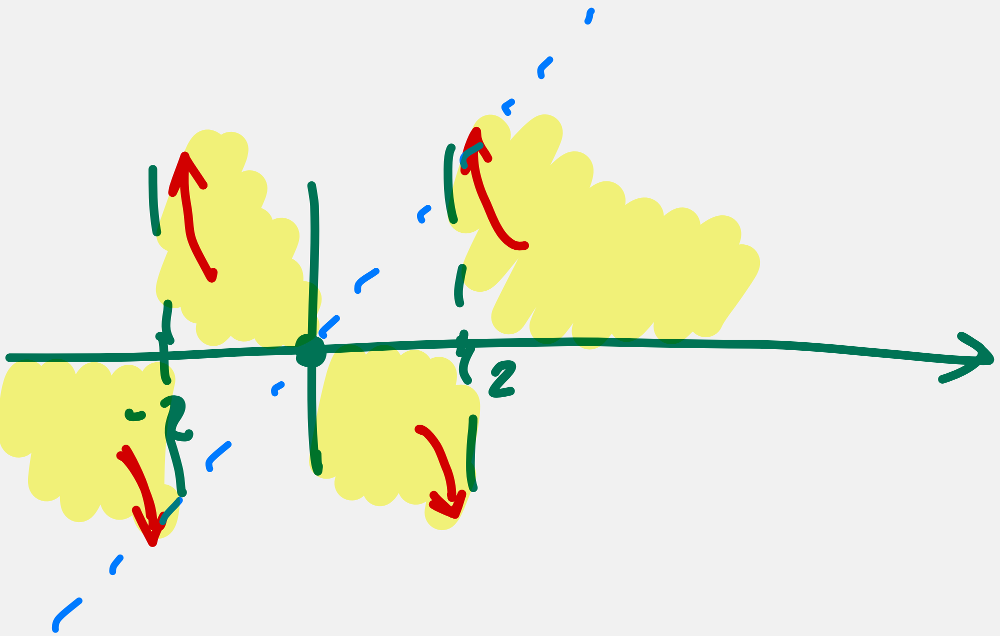
Asintoti obliqui:

Nel nostro esempio, $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{(x^2-4)x}=1=m$

$y=x$

Inoltre, $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\pm\infty}[\frac{x^3}{(x^2-4)}-x]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-x^3+4x}{(x^2-4)}=0$

Pertanto, $y=x$ è l'asintoto obliquo.



$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

5. MASSIMI E MINIMI

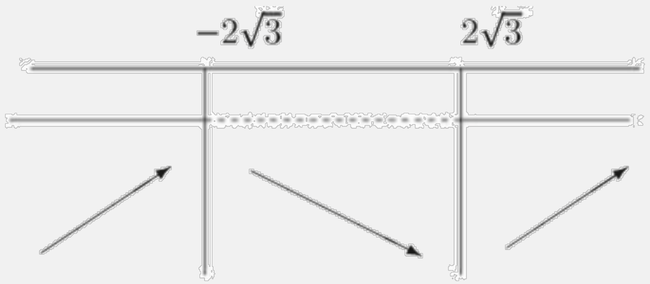
Per calcolare massimi e minimi di una funzione, è necessario calcolare la derivate prima e studiarne il segno.

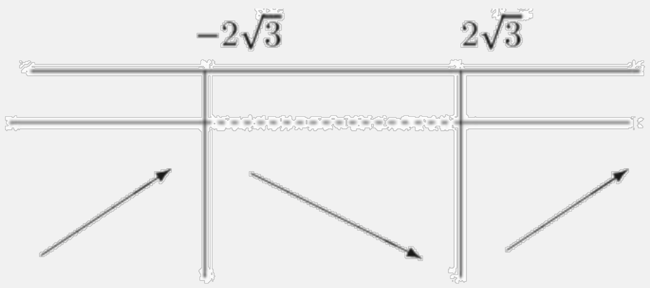
$$f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2} \geq 0 \Rightarrow x \leq -2\sqrt{3}, x \geq 2\sqrt{3}$$

Dunque, sappiamo che per gli intervalli in cui $f'(x) > 0$ la funzione è crescente, mentre per quelli in cui $f'(x) < 0$ la funzione è decrescente.

La derivata si annulla per$x = \pm 2\sqrt{3}$. Per capire se si tratta di punti di massimo, di minimo, o di flesso, dobbiamo studiare il segno della derivata: $f'(x) \geq 0$ per$x \leq -2\sqrt{3}, x \geq 2\sqrt{3}$. Dunque, abbiamo che:

- Negli intervalli $(-\infty, -2\sqrt{3})$ e $(2\sqrt{3}, \infty)$ la funzione è crescente
- Nell'intervallo $(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ la funzione è decrescente





I punti in cui la derivate si annulla sono $x = \pm 2\sqrt{3}$. Il punto $x = -2\sqrt{3}$ è punto di minio, mentre il punto $x = 2\sqrt{3}$ è punto di massimo locale.

Vediamo anche che abbiamo un punto di flesso per $x = 0$, cioè un punto in cui la derivata prima si annulla, ma non si tratta né di un punto di massimo, né di un punto di minimo. Dunque, in $x = 0$ il grafico di f avrà come tangente una retta orizzontale.

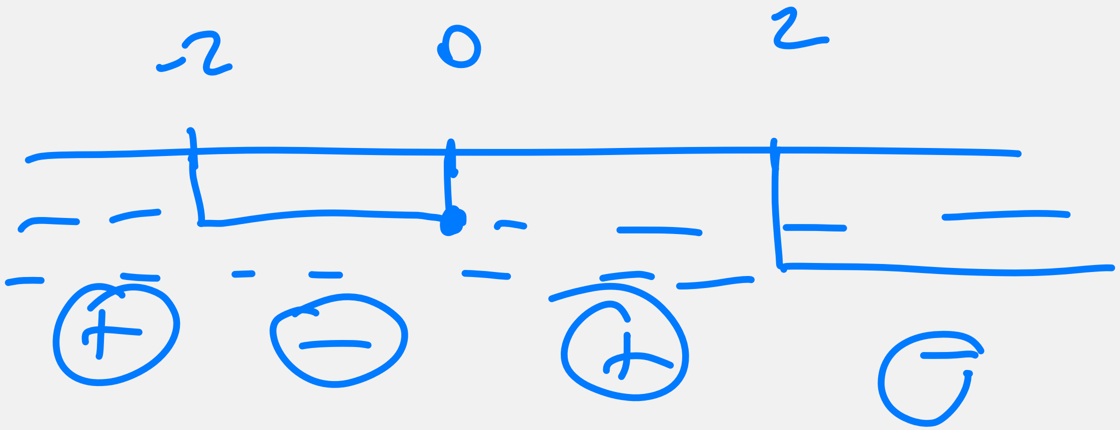
$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$$

6. CONCAVITÀ

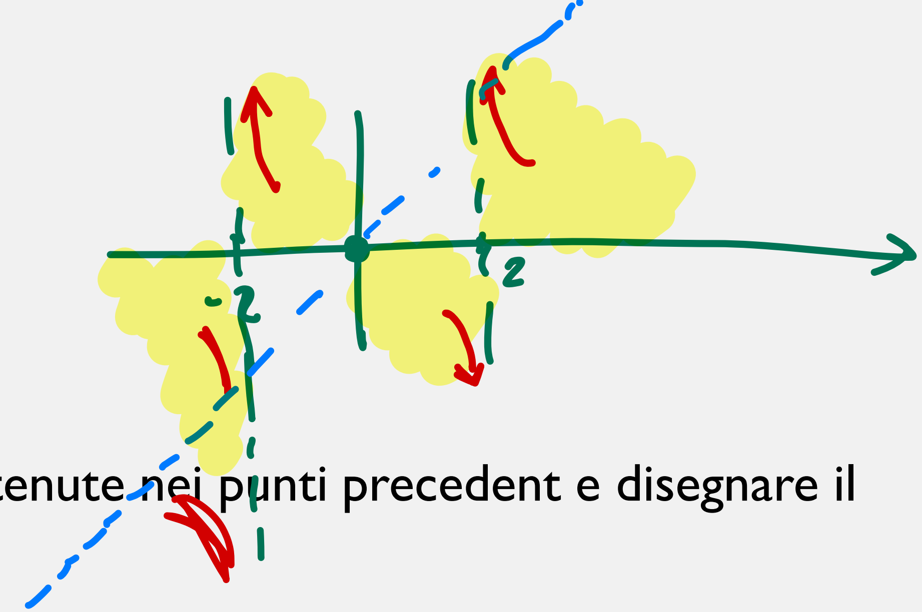
Lo studio del segno della derivate seconda $f''(x)$, cioè la derivata della funzione derivata, ci permette di studiare la concavità della funzione f. Infatti, se $f''(x) > 0$, la funzione è convessa; se $f''(x) < 0$, la funzione è concava.

Nell'esempio: $f''(x) = \frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3} \geq 0 \rightarrow -2 < x \leq 0, x > 2$

Se $f''(x) > 0$, la funzione $f'(x)$ è crescente, dunque la retta tangente al grafico ha pendenza crescente; se $f''(x) < 0$, tale pendenza sarà decrescente.



$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$$



7. GRAFICO

A questo punto, sarà necessario mettere insieme le informazion ottenute nei punti precedent e disegnare il grafico di f.