

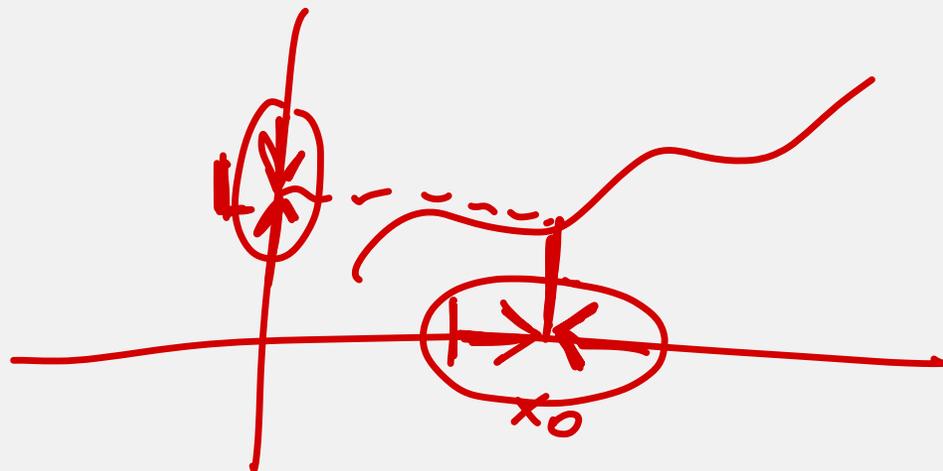
- **LIMITI DI FUNZIONI**

I. Definizione «informale» di limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

Supponiamo che $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ sia definita per tutti gli x vicini a x_0 tranne che, eventualmente, per $x = x_0$

Diciamo che f tende al limite L quando x tende a x_0 , se f assume valori $f(x)$ arbitrariamente vicini a L pur di prendere x sufficientemente vicino a x_0 (da entrambi i lati), escludendo $x = x_0$.



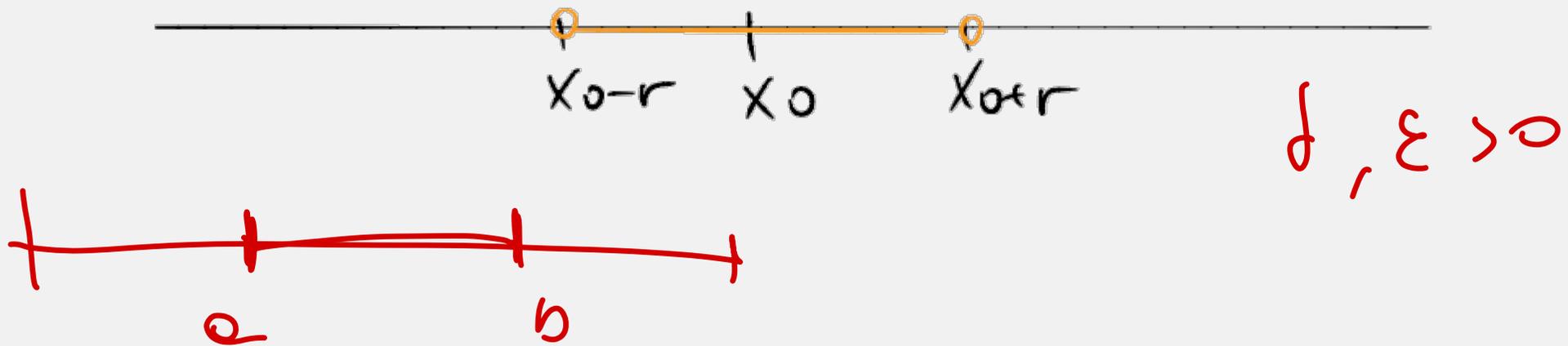
Richiamo: nozione di intorno

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e $r > 0$.

Consideriamo

$$I_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\} = \{x \in \mathbb{R} : x_0 - r < x < x_0 + r\},$$

l'intorno **aperto** di centro x_0 , ossia l'insieme costituito da numeri $x \in \mathbb{R}$ tali che la loro distanza da x_0 sia minore di $r > 0$.



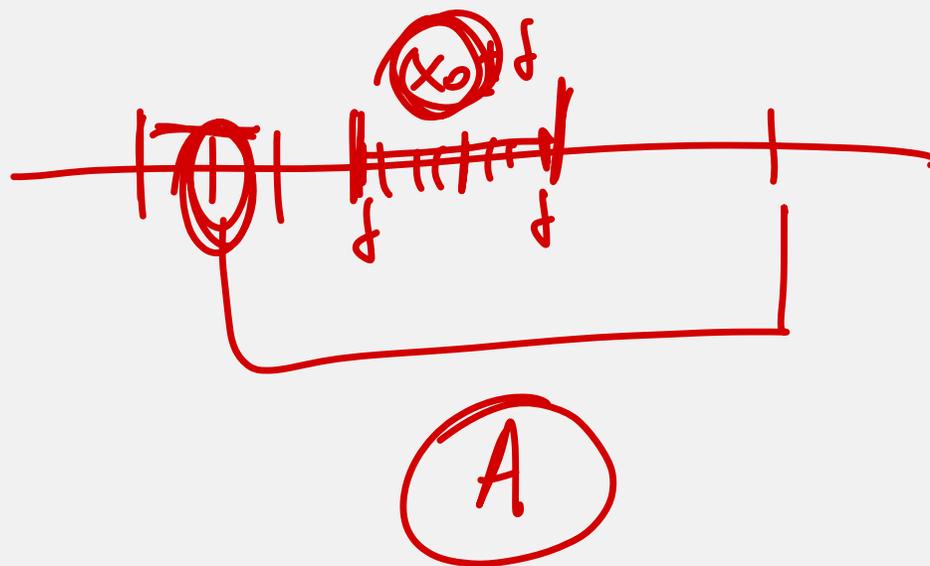
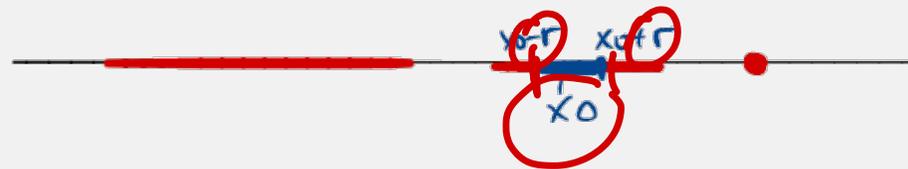
Richiamo: nozione di intorno

Sia $A \subset \mathbb{R}$ e $A \neq \emptyset$.

1. Diciamo che $x_0 \in \mathbb{R}$ è **interno** ad A se:

$$\exists r > 0 : I_r(x_0) \subset A$$

Un punto interno è un punto per il quale esiste almeno un intorno interamente contenuto nell'insieme



Richiamo: nozione di intorno

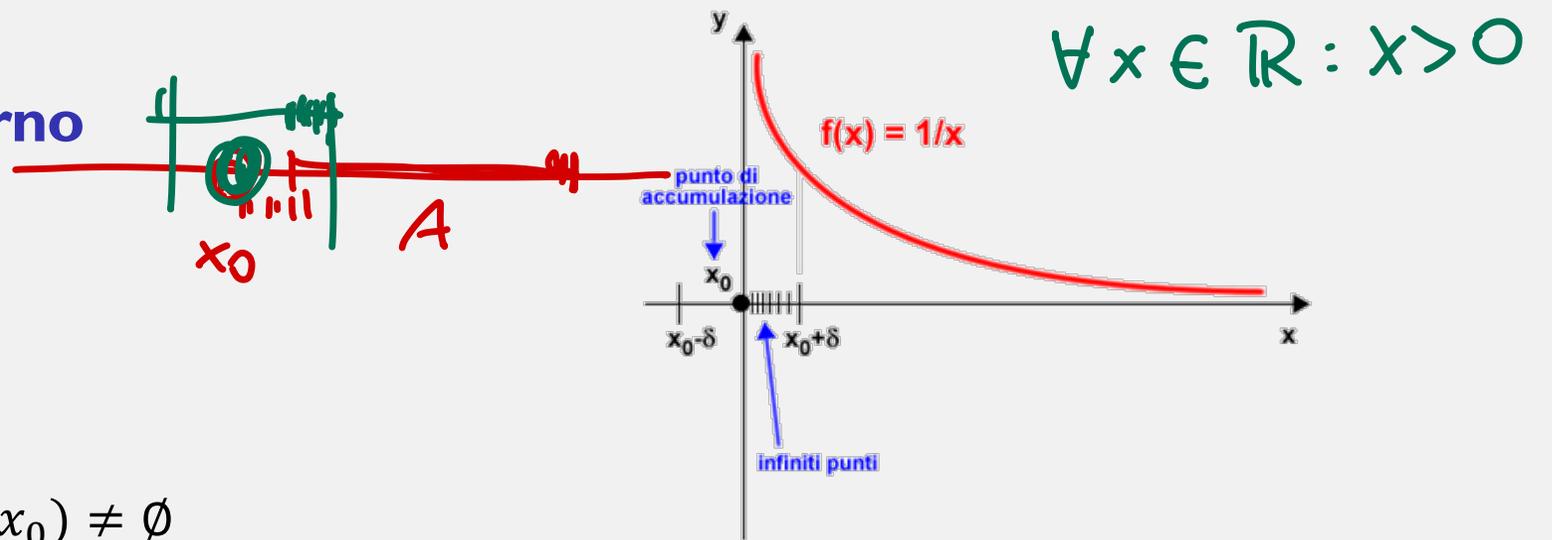
Sia $A \subset \mathbb{R}$ e $A \neq \emptyset$.

2. Diciamo che $x_0 \in \mathbb{R}$ è **punto di accumulazione** per A se:

$$\forall r > 0 \rightarrow A - \{x_0\} \cap I_r(x_0) \neq \emptyset$$

Diremo che x_0 è punto di accumulazione di A se **ogni intorno di x_0 contiene almeno un elemento di A diverso da x_0 stesso.**

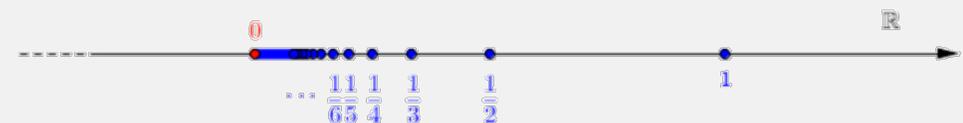
Un punto di accumulazione è un punto nel cui intorno cadono **infiniti punti** di I_r distinti dal punto stesso



- Un punto di accumulazione per A non deve appartenere per forza ad A . Per esempio, prendiamo l'insieme

$$A = \left\{ a \in \mathbb{R} \mid a = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Questo insieme ammette come punto di accumulazione $x = 0$: infatti, comunque scelto un intorno $B_\varepsilon(0) = (-\varepsilon, \varepsilon)$ possiamo trovare un n tale che $\frac{1}{n} < \varepsilon$ (basta scegliere $n > \frac{1}{\varepsilon}$). Inoltre, $0 \notin A$, dato che nessuna frazione del tipo $\frac{1}{n}$ può essere uguale a 0.



L'insieme A è rappresentato in blu; 0 è un punto di accumulazione per A .

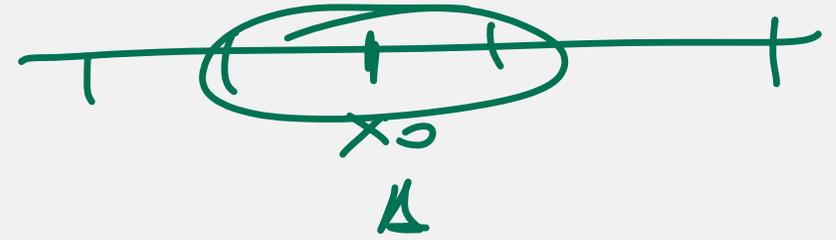
Richiamo: nozione di intorno

Sia $A \subset \mathbb{R}$ e $A \neq \emptyset$.

3. Diciamo che $x_0 \in \mathbb{R}$ è **punto isolato** di A se:
 $\exists r > 0 \rightarrow A \cap I_r(x_0) = \{x_0\}$

Un punto isolato di un insieme A è un punto appartenente all'insieme per il quale esiste almeno un intorno completo del punto stesso tale da non contenere alcun punto dell'insieme A oltre ad x_0

4. Diciamo che $x_0 \in \mathbb{R}$ è **aderente** ad A se x_0 è d'accumulazione per A oppure x_0 è un punto isolato di A .

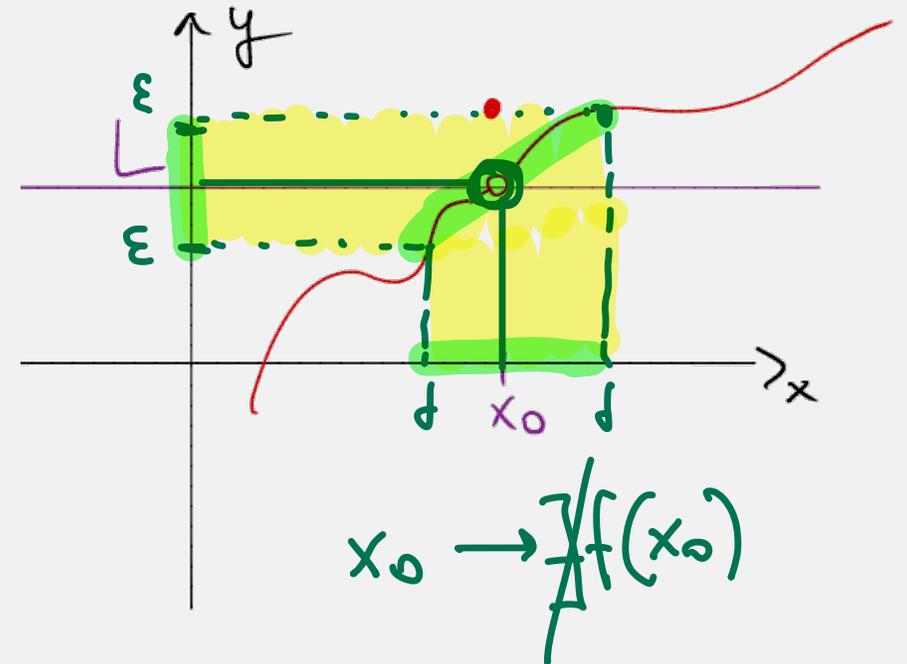


2. Definizione di limite con gli intorni

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

con

➤ $L \in \mathbb{R}$



Diremo che la funzione f tende al limite L per $x \rightarrow x_0$ se:

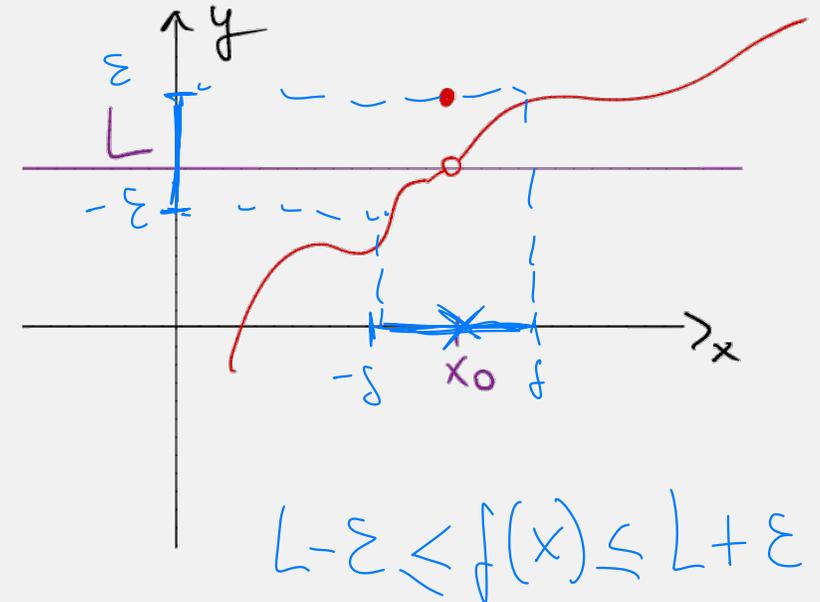
$$\forall I(L, \varepsilon), \varepsilon > 0 \exists I(x_0, \delta), \delta > 0 : \forall x \in (I(x_0, \delta) - \{x_0\}) \cap D \Rightarrow f(x) \in I(L, \varepsilon)$$

3. Definizione «rigorosa» di limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

Supponiamo:

- $D \subset \mathbb{R}$ e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$
- x_0 punto di accumulazione per D
- $L \in \mathbb{R}$



Diremo che la funzione f tende al limite L per $x \rightarrow x_0$ se:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in D, 0 < |x - x_0| \leq \delta, (x \neq x_0) \Rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon$$

Si impone che $x \neq x_0$ perché non vogliamo che il valore di f in x_0 influenzi il limite

Casi dei limiti

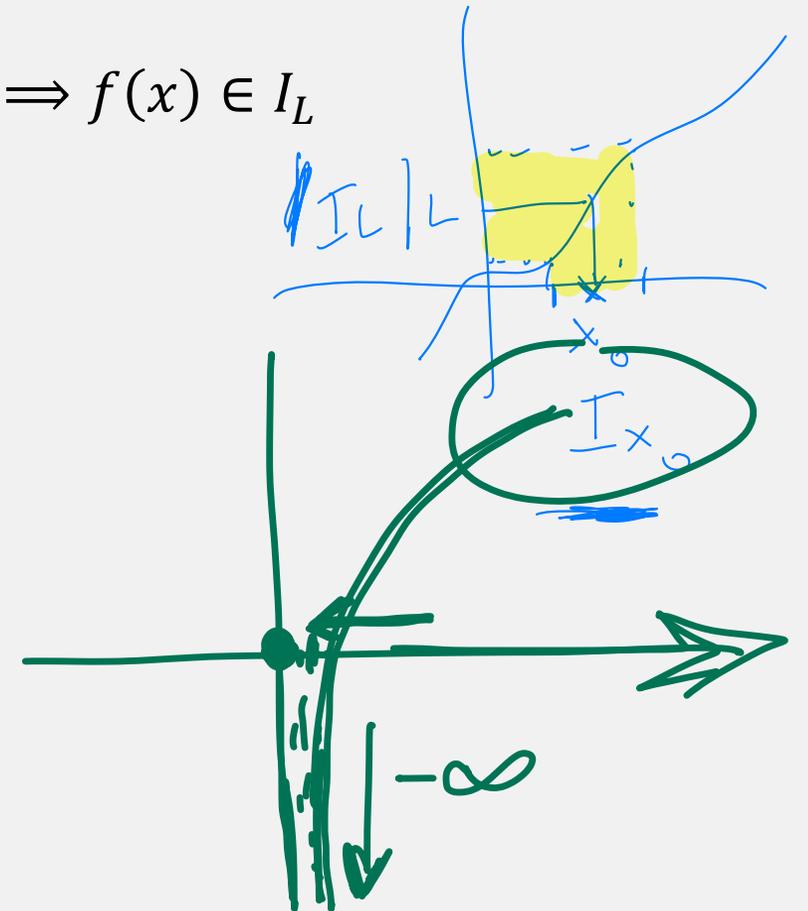
Generale: Il limite per x che tende a x_0 di $f(x)$ è uguale a L se e solo se per ogni intorno di L esiste un intorno di x_0 tale che, per ogni x appartenente all'intorno di x_0 (escluso al più x_0), risulta che $f(x)$ appartiene all'intorno di L

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall I_L \exists I_{x_0} : \forall x \in I_{x_0} - \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in I_L$$

I casi possono vedere:

$$L = \begin{cases} \in \mathbb{R} \rightarrow I_L = (L - \varepsilon, L + \varepsilon) \\ +\infty \rightarrow I_L = (n, +\infty) \\ -\infty \rightarrow I_L = (-\infty, -n) \end{cases}$$

$$x_0 = \begin{cases} \in \mathbb{R} \rightarrow I_{x_0} = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \\ +\infty \rightarrow I_{x_0} = (n, +\infty) \\ -\infty \rightarrow I_{x_0} = (-\infty, -n) \end{cases}$$



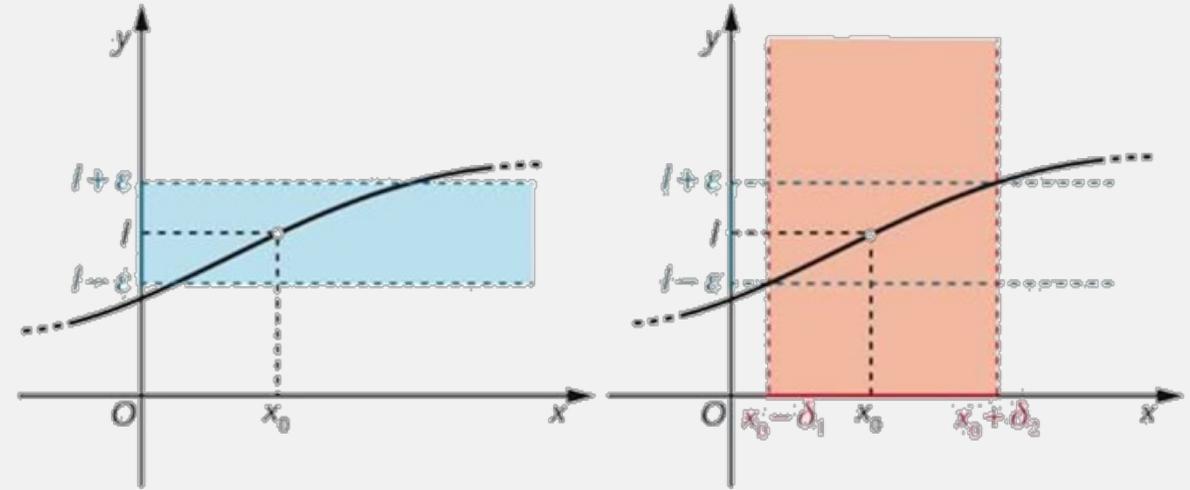
➤ **Limite finito calcolato in un punto**

finito: $L, x_0 \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$

Sia una funzione $f(x)$ una funzione definita in un intervallo (a, b) escluso un punto x_0 , si dice che la funzione $f(x)$ per x che tende a x_0 ha per limite il numero L , quando in corrispondenza di un numero arbitrario positivo ε , si può sempre determinare un intorno completo del punto x_0 tale che, per ogni x di tale intorno, risulti soddisfatta la disequazione:

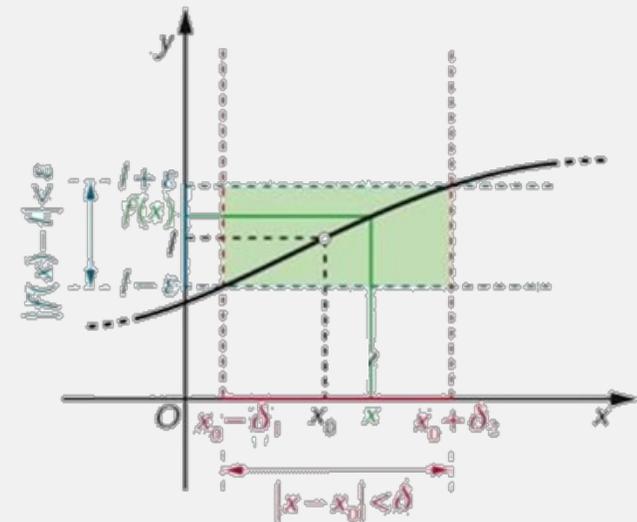
$$|f(x) - L| < \varepsilon \rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists I_{x_0} : \forall x \in I_{x_0} - \{x_0\} \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$



a. Per ogni $\varepsilon > 0$ (con la scelta di ε scegliamo un arbitrario intorno di l sull'asse y)...

b. ... esiste $\delta > 0$ (il quale individua un opportuno intorno di x_0 sull'asse x)...



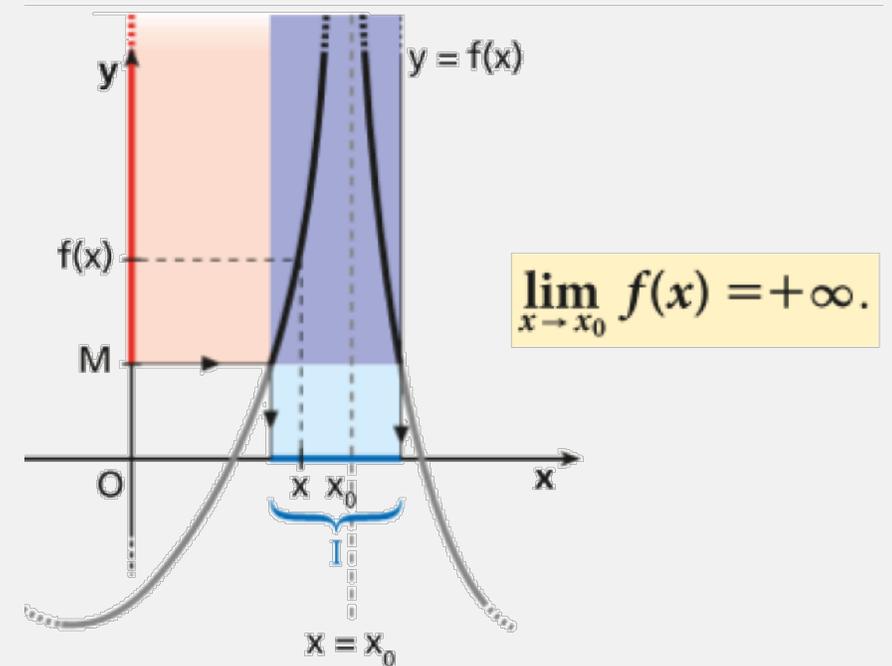
c. ... tale che per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ con $x \neq x_0$ risulta: $f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$.

➤ **Limite infinito calcolato in un punto**

finito: $L = \infty, x_0 \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$

Sia una funzione $f(x)$ una funzione definita in un intervallo (a, b) escluso un punto x_0 , si dice che la funzione $f(x)$ per x che tende a x_0 ha per limite ∞ , quando in corrispondenza di un numero arbitrario positivo M , si può sempre determinare un intorno completo del punto x_0 tale che, per ogni x di tale intorno, risulti soddisfatta la disequazione:

$$|f(x)| > M$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall n > 0 \exists I_{x_0} : \forall x \in I_{x_0} - \{x_0\} \Rightarrow |f(x)| > M$$

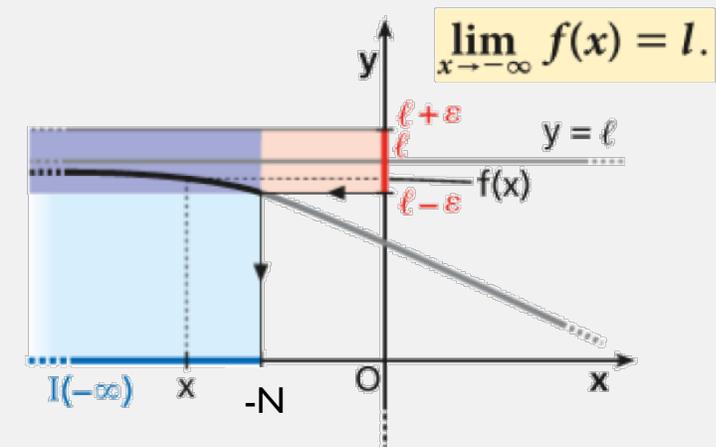
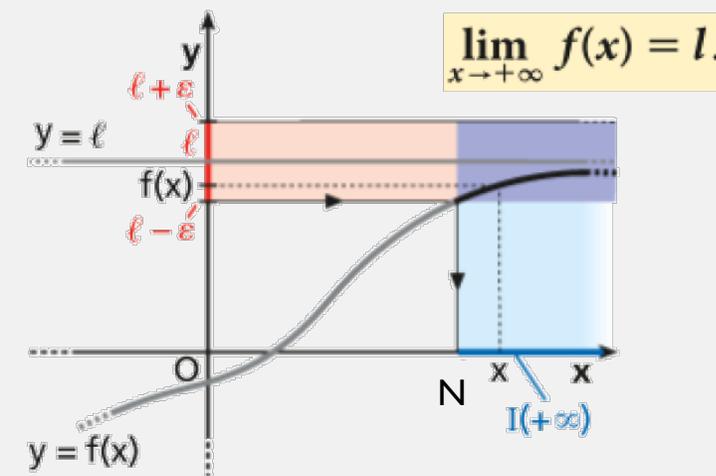
➤ **Limite finito calcolato in un punto infinito:**

$$L \in \mathbb{R}, x_0 = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

Sia una funzione $f(x)$ una funzione definita in un intervallo (a, b) escluso un punto x_0 , si dice che la funzione $f(x)$ per x che tende all'infinito ha per limite L , quando in corrispondenza di un numero arbitrario positivo ε , si può sempre determinare un numero $N > 0$ tale che, per ogni x che verifica la condizione $|x| > N$, risulta verificata la condizione:

$$|f(x) - L| < \varepsilon \rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall x : |x| > N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

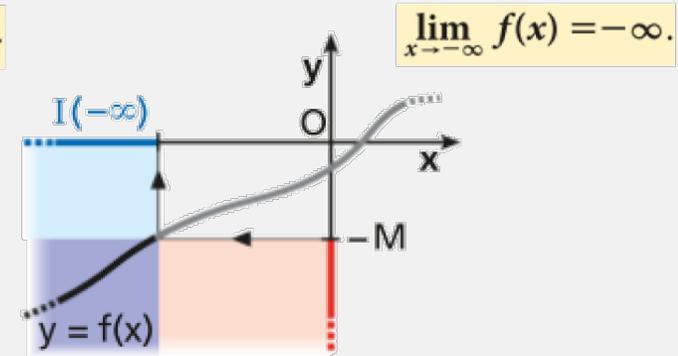
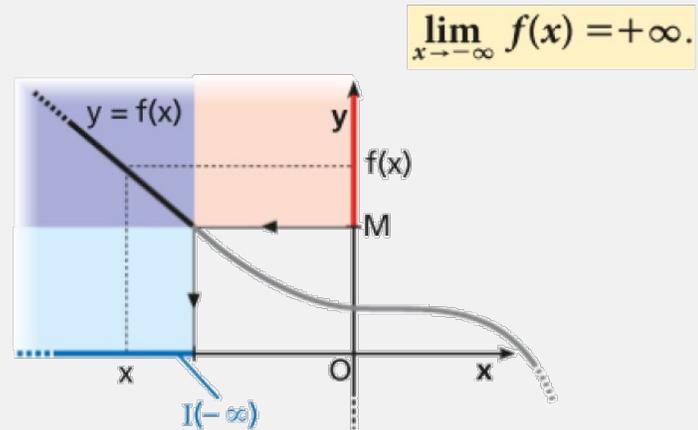
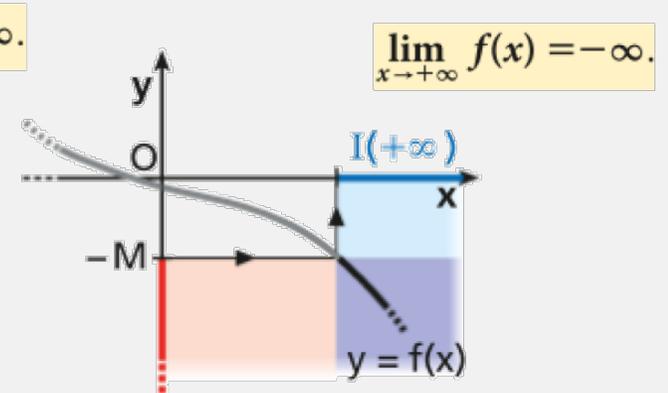
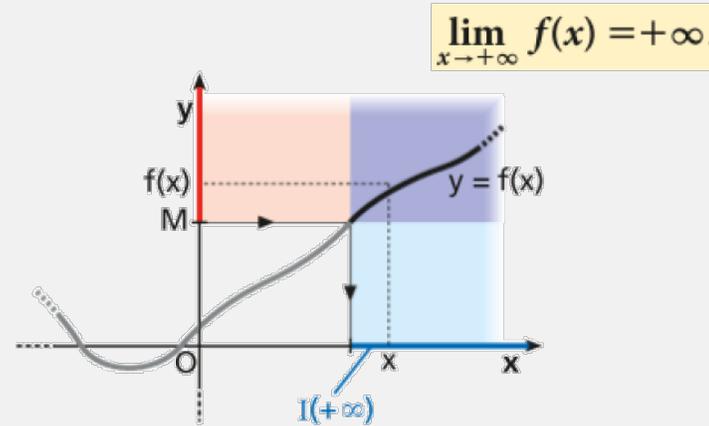


➤ **Limite infinito calcolato in un punto**

infinito: $L, x_0 = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

Sia una funzione $f(x)$ una funzione definita in un intervallo (a, b) escluso un punto x_0 , si dice che la funzione $f(x)$ per x che tende all'infinito ha per limite l'infinito, quando in corrispondenza di un numero arbitrario positivo M , si può sempre determinare un numero $N > 0$ tale che, per ogni x che verifica la condizione $|x| > N$, risulta verificata la condizione:

$$|f(x)| > M$$



$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists N > 0 : \forall x : |x| > N \Rightarrow |f(x)| > M$$

Teorema: Unicità del limite

Una funzione non può avere due limiti differenti; se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \text{ \& } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l' \rightarrow l = l'$$

Dimostrazione:

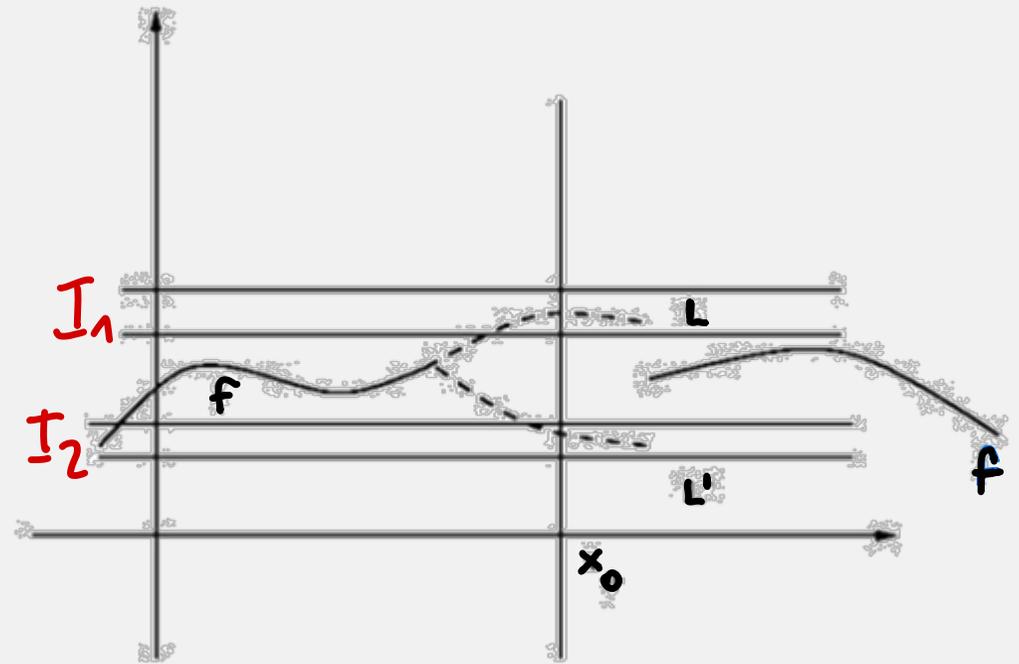
Se $l \neq l'$ posso scegliere due intorni di l e l' disgiunti:

$$I_1 = I(l, \varepsilon_1), I_2 = I(l', \varepsilon_2), I_1 \cap I_2 = \emptyset.$$

$f(x)$ con $x \in I(x_0, \delta)$ a quale intorno apparterebbe?

Si arriva a una contraddizione: dal punto di vista analitico, esiste δ_1 tale che per $x \in D_f$:

$$0 < |x - x_0| < \delta_1, f(x) \in I_1$$



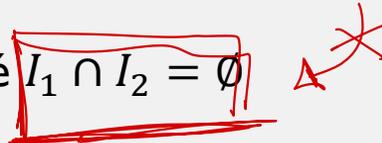
Teorema: Unicità del limite

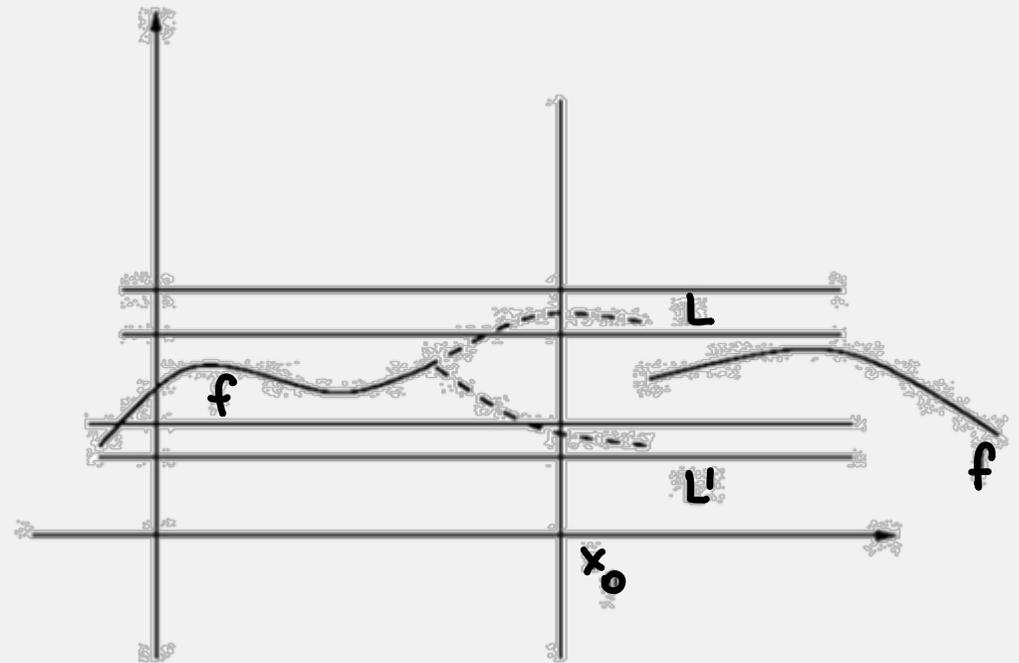
Analogamente, esiste δ_2 tale che per $x \in D_f$:

$$0 < |x - x_0| < \delta_2, f(x) \in I_2$$

Allora, per $x \in D_f$:

$$0 < |x - x_0| < \min\{\delta_1, \delta_2\}, f(x) \in I_1 \text{ \& } f(x) \in I_2$$

Ma ciò è impossibile, perché $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ 



Leggi dei limiti

Siano x_0 un punto di accumulazione di A e $c \in \mathbb{R}$ una costante,

$$f, g : A \rightarrow \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$$

Se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \quad \& \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2, \text{ con } l_1, l_2 \in \mathbb{R}$$

Allora:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_1 + l_2$
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_1 - l_2$
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_1 \cdot l_2$

Leggi dei limiti

$$4. \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)/g(x)) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = l_1/l_2, \quad l_2 \neq 0$$

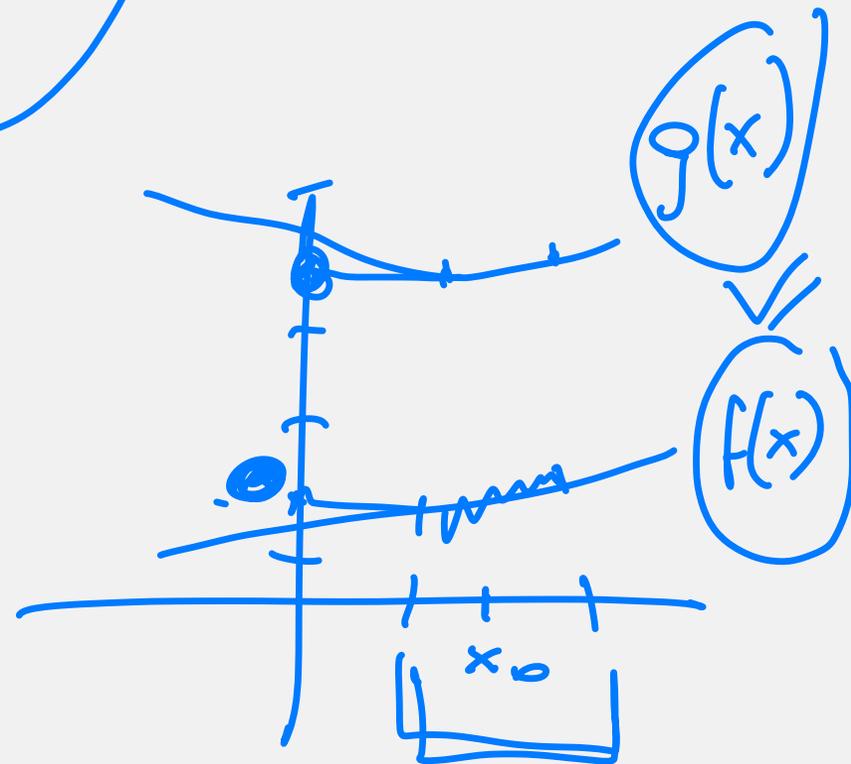
$$5. \lim_{x \rightarrow x_0} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c \cdot l_2$$

$$6. \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^{\frac{p}{q}} = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^{\frac{p}{q}}, \quad p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$$

7. Se esiste un intorno J di x_0 tale che: $\forall x \in D_f \cap J - \{x_0\}, f(x) \leq g(x)$, allora:

$$l_1 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$$

Handwritten diagram illustrating the limit of a function. It shows the expression $2x^2 + 4x$ above a circled 2 , and $x^2 + 2x$ below it. A circled 1 is written as $x \rightarrow 1$. Arrows indicate the relationship between the terms and the limit process.



Limite destro

Siano $x_0 \in \mathbb{R}$ e $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$, si supponga x_0 punto di accumulazione per l'insieme $D_f \cap (x_0, +\infty)$.

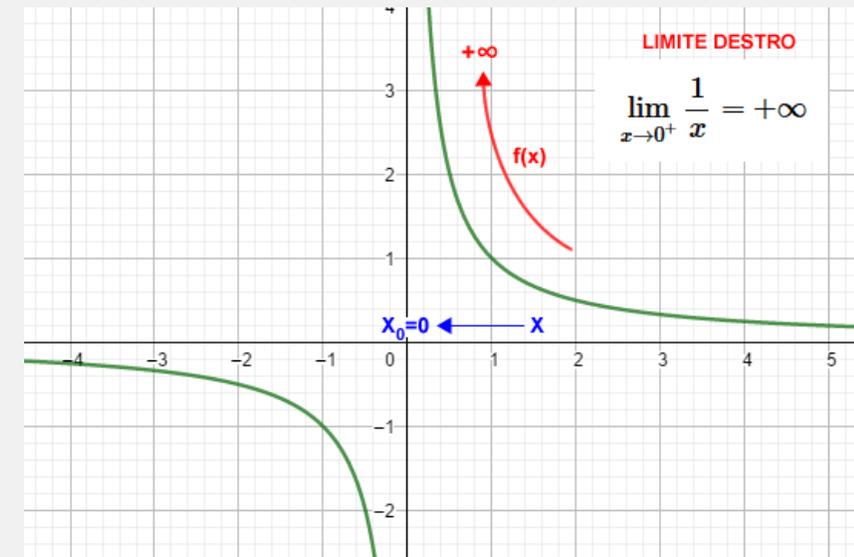
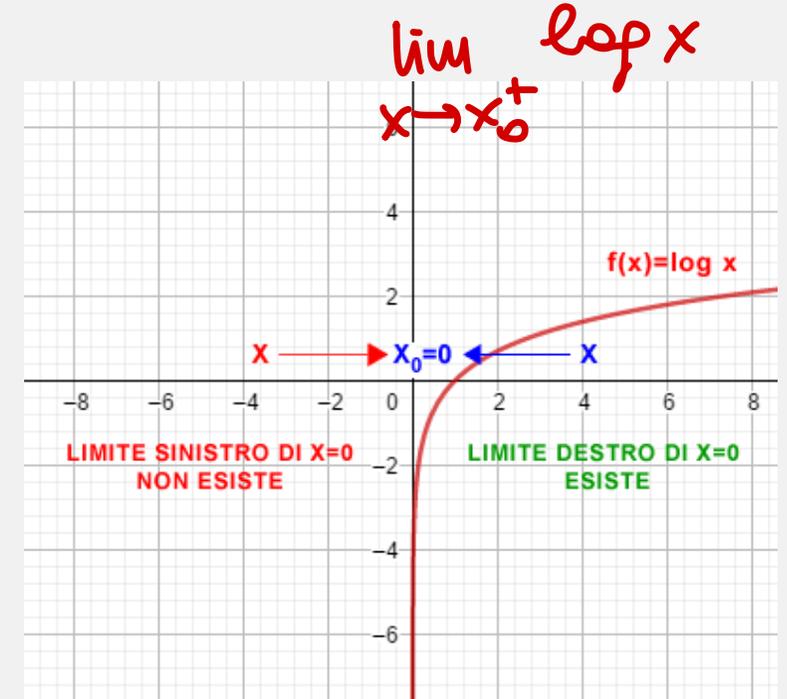
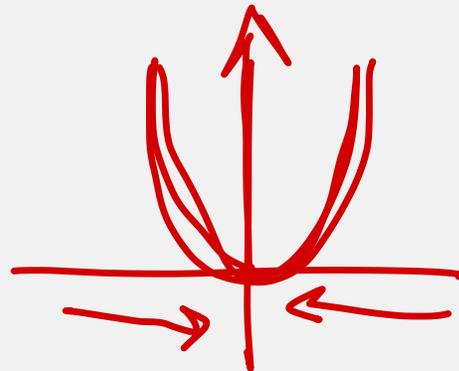
Se esiste il limite per $x \rightarrow x_0$ della restrizione di f a $D_f \cap (x_0, +\infty)$, allora tale valore è detto **limite destro** di f in x_0 , denotato:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

Dicitura con i quantificatori (nel caso $L \in \mathbb{R}$):

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap D_f \rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon$$

$$x_0 < x < x_0 + \delta$$



Limite sinistro

Siano $x_0 \in \mathbb{R}$ e $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$, si supponga x_0 punto di accumulazione per l'insieme $D_f \cap (-\infty, x_0)$.

Se esiste il limite per $x \rightarrow x_0$ della restrizione di f a $D_f \cap (-\infty, x_0)$, allora tale valore è detto **limite sinistro** di f in x_0 , denotato:

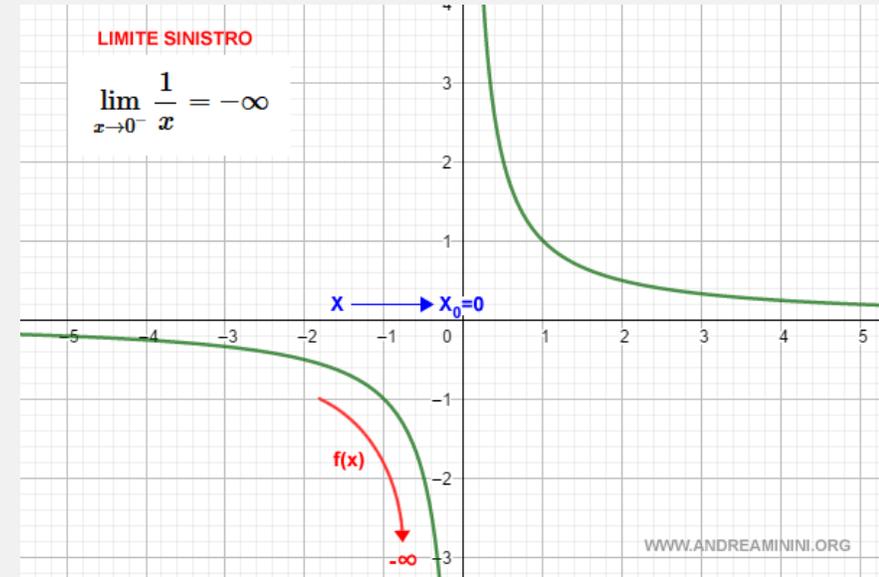
$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

Dicitura con i quantificatori (nel caso $L \in \mathbb{R}$):

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap D_f \rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon$$

↓

$$x_0 - \delta < x < x_0$$



Limiti di funzioni polinomiali

Dalle regole di calcolo dei limiti, si deduce che esiste il limite per $x \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}$ di ogni funzione polinomiale

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n.$$

Tramite la definizione di limite, è facile verificare che:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a_0 = a_0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} a_1x = a_1x_0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} a_nx^n = a_nx_0^n$$

2.2

Quindi, in generale:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} p(x) = p(x_0) = a_0 + a_1x_0 + \cdots + a_nx_0^n$$

$$\hookrightarrow x_0 \in \mathbb{R} / \neq \pm \infty$$

Limiti del quoziente di due polinomi: funzioni razionali fratte

$n, m = \text{grado}$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \begin{array}{l} 1. n > m \rightarrow \lim = \pm\infty \\ 2. n < m \rightarrow \lim = 0 \\ 3. n = m \rightarrow \lim = a_n/b_m \end{array}$$

Esempi.

$$1. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x^2+3x^3}{2x^2-1+5x^3} = \frac{3}{5} \rightarrow n = m$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3+2}{12x^4-x+7} = 0^- \rightarrow n < m$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1^\pm} \frac{x^3-7x+1}{x^2-1} = \frac{-3}{0} = \pm\infty \rightarrow n > m$$

$$m=2 \rightarrow x^2 + 3x + 1$$

$$M=3 \rightarrow 4x^3 + x$$

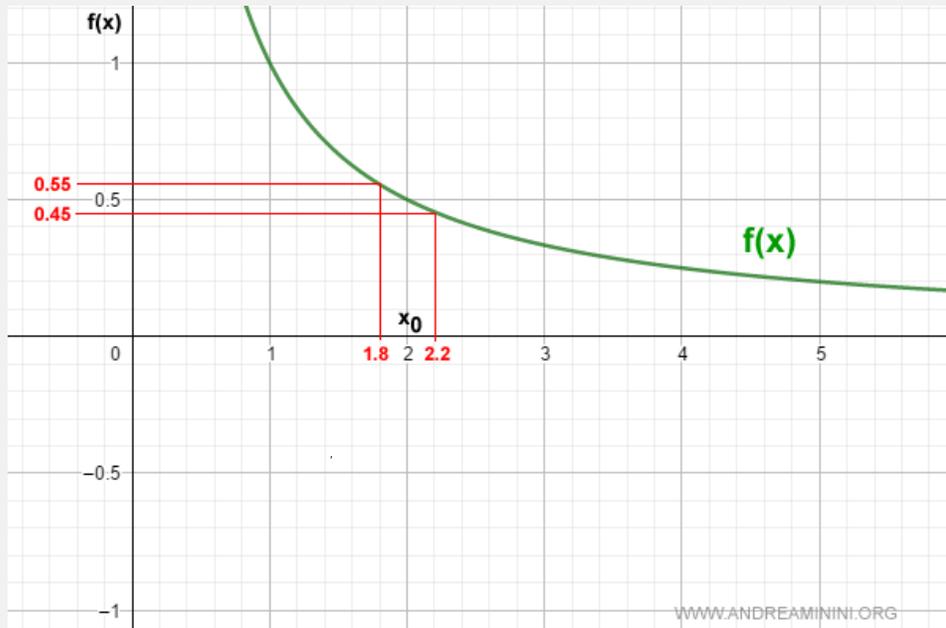
$$\frac{x^2 + 3x + 1}{5x^2 + 7} = \frac{1}{5}$$

Teorema: Permanenza del segno

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L > 0$, allora esiste I intorno di x_0 tale che:

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in I - \{x_0\} \cap D_f$$

Data una funzione $f(x)$ definita e continua in un intorno del punto x_0 . Se $f(x_0) > 0$ allora esiste un numero $\delta > 0$ tale che $f(x) > 0$ per ogni x nell'intorno $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$



Sia la funzione: $f(x) = \frac{1}{x}$.

Nel punto $x_0 = 2$ la funzione $f(x_0) = 0.5 \rightarrow f(2) = 0.5$

Considero un intorno di $x_0 = 2$ con $\delta = 0.2$:

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) = (2 - 0.2, 2 + 0.2) = (1.8, 2.2)$$

Nell'intorno $(1.8, 2.2)$ la funzione è sempre maggiore di zero:

$$f(1.8) = \frac{1}{1.8} = 0.55$$

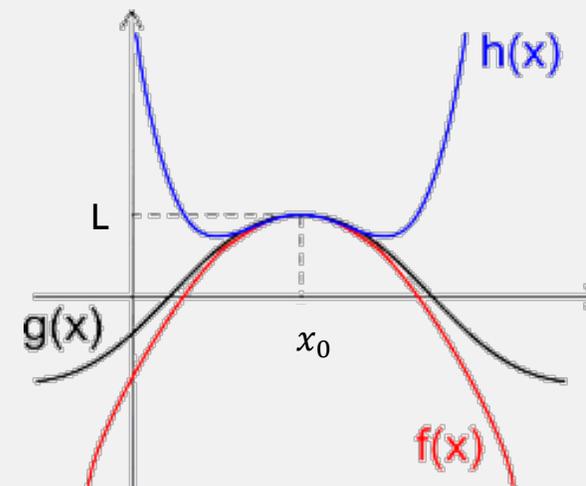
$$f(2.2) = \frac{1}{2.2} = 0.45$$

Teorema dei due carabinieri / del confronto per i limiti

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, siano $f, g, h : A \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione di A . Supponiamo che in un intorno I del punto x_0 si abbia:

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in I - \{x_0\}$$

Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L$, allora anche g ammette limite per $x \rightarrow x_0$ e si ha $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$



Sia $\varepsilon > 0$, da $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ deriva che $\exists \delta_1 > 0 : |f(x) - L| < \varepsilon$ per $0 < |x - x_0| < \delta_1$

Analogamente, $\exists \delta_2 > 0 : |h(x) - L| < \varepsilon$ per $0 < |x - x_0| < \delta_2$

Scelto $\bar{\delta} = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, per $0 < |x - x_0| < \bar{\delta}$, allora: $L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$ & $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$

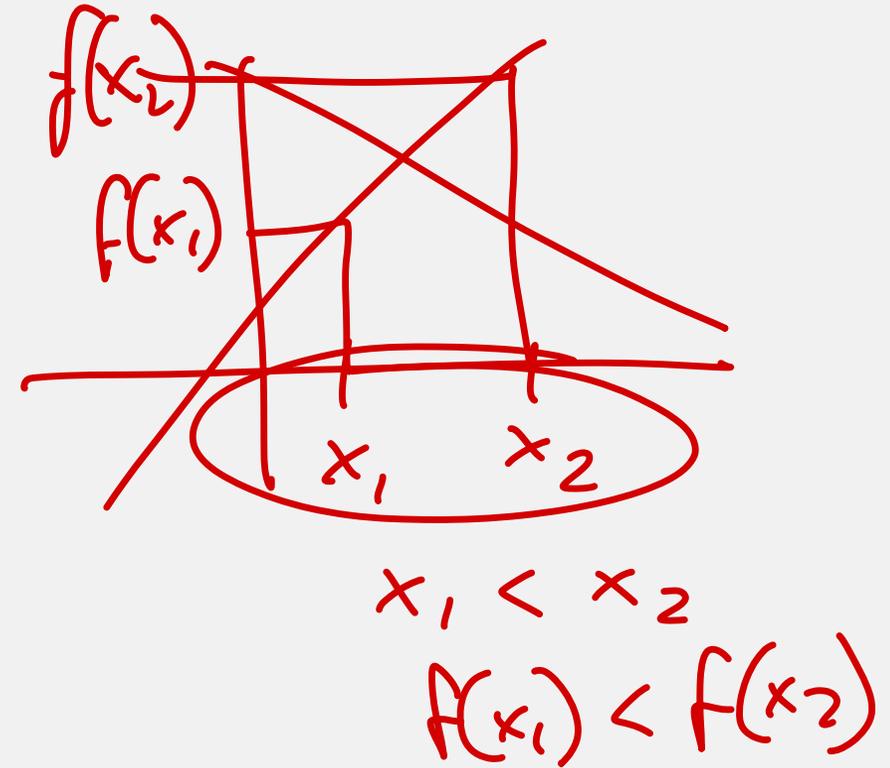
Quindi, per $0 < |x - x_0| < \min\{\bar{\delta}, r\} = \delta \rightarrow L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \varepsilon$, da cui deriva:

$$|g(x) - L| < \varepsilon \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$$

Richiamo: funzioni monotone

Una funzione $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ si dice:

- Monotona non decrescente o **monotona crescente** se
$$\forall x, y \in D_f : x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$
- Monotona non crescente o **monotona decrescente** se
$$\forall x, y \in D_f : x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$
- Strettamente crescente se
$$\forall x, y \in D_f : x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$
- Strettamente decrescente se
$$\forall x, y \in D_f : x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$$



Infiniti e infinitesimi

Sia f un funzione a valori reali definita in un intervallo I (limitato o illimitato) fatta eccezione per un punto $x_0 \in I$ (con x_0 punto al finito o all'infinito),

➤ Si dice che f è **infinitesima** per $x \rightarrow x_0$ oppure $x \rightarrow \pm\infty$ se risulta che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

➤ Si dice che f è **infinita** per $x \rightarrow x_0$ oppure $x \rightarrow \pm\infty$ se risulta che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

Forme indeterminate

Le forme indeterminate sono operazioni che coinvolgono infiniti e infinitesimi nel calcolo dei limiti per le quali non è possibile determinare un risultato a priori:

$$\infty - \infty \quad 0 \cdot \infty \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \frac{0}{0} \quad 0^0 \quad 1^\infty \quad \infty^0$$

Non sono forme indeterminate:

$$k + \infty = +\infty$$

$$k - \infty = -\infty$$

$$\infty + \infty = \infty$$

$$k \cdot \infty = \infty$$

$$\infty \cdot \infty = \infty$$

$$\frac{k}{\infty} = 0$$

$$\frac{0}{\infty} = 0$$

$$\frac{\infty}{k} = \infty$$

$$\frac{k}{0} = \infty$$

Forme indeterminate

È necessario risolvere le forme indeterminate.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \text{polinomio} = +\infty - \infty$$

Raccogliere la x di grado massimo

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\text{polinomio}}{\text{polinomio}} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

Raccogliere la x di grado massimo al numeratore e al denominatore; semplificare

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\text{polinomio}}{\text{polinomio}} = \frac{0}{0}$$

Scomporre numeratore e denominatore; semplificare

Forme indeterminate

$$\frac{\sqrt{A} - \sqrt{B}}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} = \frac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}$$

È necessario risolvere le forme indeterminate.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{A} - \sqrt{B} = +\infty - \infty$$

Ricordando che: $(\sqrt{A} - \sqrt{B})(\sqrt{A} + \sqrt{B}) = A - B$,
moltiplicare e dividere per $\sqrt{A} + \sqrt{B}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B} = +\infty - \infty$$

Ricordando che: $(\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B})[(\sqrt[3]{A})^2 + \sqrt[3]{AB} + (\sqrt[3]{B})^2] = A - B$,
Moltiplicare e dividere per $(\sqrt[3]{A})^2 + \sqrt[3]{AB} + (\sqrt[3]{B})^2$

Forme indeterminate

Soluzione alternativa più rapida ai primi due casi:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \text{polinomio} = +\infty - \infty$$



Sostituire $+\infty$ o $-\infty$ al monomio di grado massimo e trascurare gli altri termini del polinomio

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\text{polinomio}}{\text{polinomio}} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

Se il polinomio al numeratore è di grado maggiore, il risultato è $\pm\infty$, a seconda dei segni.

Se i gradi sono uguali, il risultato è il rapporto tra i coefficienti dei monomi di grado massimo.

Se il denominatore è di grado maggiore, il risultato è zero.

Forme indeterminate: esempi

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \text{polinomio} = +\infty - \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 - x^2 + 3 = 2 \cdot (+\infty)^3 - (+\infty)^2 + 3 = 2 \cdot (+\infty) - (+\infty) + 3 = +\infty - \infty$$

la forma indeterminata $+\infty - \infty$ si risolve raccogliendo la x di grado massimo del polinomio, cioè:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 - x^2 + 3 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^3} \right) = (+\infty)^3 \cdot \left(2 - \frac{1}{+\infty} + \frac{3}{(+\infty)^3} \right) = \\ &= +\infty \cdot (2 - 0 + 0) = +\infty \cdot 2 = +\infty \end{aligned}$$

Soluzione alternativa più rapida:

considero solo il grado di x

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 - x^2 + 3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = 2 \cdot (+\infty)^3 = 2 \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 - x^2 + 3 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = 2 \cdot (-\infty)^3 = 2 \cdot (-\infty) = -\infty$$

Forme indeterminate: esempi

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\text{polinomio}}{\text{polinomio}} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{2x^2-5} = \frac{(+\infty)+2}{2 \cdot (+\infty)^2 - 5} = \frac{+\infty}{2 \cdot (+\infty) - 5} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

la forma indeterminata $\frac{+\infty}{+\infty}$ si risolve raccogliendo la x di grado massimo al numeratore e al denominatore:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{2x^2-5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \left(1 + \frac{2}{x}\right)}{x^2 \cdot \left(2 - \frac{5}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{x \cdot \left(2 - \frac{5}{x^2}\right)} = \frac{1 + \frac{2}{(+\infty)}}{(+\infty) \cdot \left(2 - \frac{5}{(+\infty)^2}\right)} = \frac{1}{(+\infty) \cdot 2} = \frac{1}{(+\infty)} = 0$$

\downarrow
 $\frac{P_n}{Q_m}, n < m \rightarrow \lim = 0$

Forme indeterminate: esempi

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\text{polinomio}}{\text{polinomio}} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

Soluzione alternativa
più rapida: polinomio
al numeratore grado
maggiore

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^5 - 3x + 2}{2x^2 + 4} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2 + 2x - 5}{x - 4} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^5 - 3x + 2}{2x^2 + 4} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 + 5x^3}{x^3 + 2x^2 - 1} = +\infty$$

Soluzione alternativa
più rapida:
numeratore e
denominatore stesso
grado

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^3 - 3x + 2}{2x^3 + 4} = \frac{7}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - x + 2}{4x - 2x^2 - 1} = -\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^3 - 3x + 2}{2x^3 + 4} = \frac{7}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - x + 2}{4x - 2x^2 - 1} = -\frac{3}{2}$$

Soluzione alternativa
più rapida: polinomio
al denominatore
grado maggiore

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3 - 3x + 1}{2x^4 + 4} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{2x^3 + 4} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 - 3x + 1}{2x^4 + 4} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 1}{-2x^2 + 4x + 3} = 0$$

Forme indeterminate: esempi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\text{polinomio}}{\text{polinomio}} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{1 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ si risolve scomponendo numeratore e denominatore e poi semplificando:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1) \cdot (x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$$

Forme indeterminate: esempi

$$\sqrt{A} - \sqrt{B} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{A} + \sqrt{B}}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} = \frac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{A} - \sqrt{B} = +\infty - \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{3x+1} - \sqrt{x}) = \sqrt{3 \cdot (+\infty)} - \sqrt{(+\infty)} = \sqrt{+\infty} - \sqrt{+\infty} = +\infty - \infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{3x+1} - \sqrt{x}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{3x+1} - \sqrt{x}) \cdot \frac{(\sqrt{3x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3x+1) - x}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{x}} = \frac{2 \cdot (+\infty) + 1}{\sqrt{3 \cdot (+\infty) + 1} + \sqrt{(+\infty)}} = \frac{+\infty}{+\infty} \end{aligned}$$

la forma indeterminata $\frac{+\infty}{+\infty}$ si risolve applicando la tecnica vista in precedenza, cioè:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \left(2 + \frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x} \cdot \left[\sqrt{3 + \frac{1}{x}} + 1\right]} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \cdot \left(2 + \frac{1}{x}\right)}{\sqrt{3 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{\sqrt{+\infty} \cdot \left(2 + \frac{1}{(+\infty)}\right)}{\sqrt{3 + \frac{1}{(+\infty)}} + 1} = \frac{+\infty}{\sqrt{3} + 1} = +\infty$$

Limiti di funzioni continue

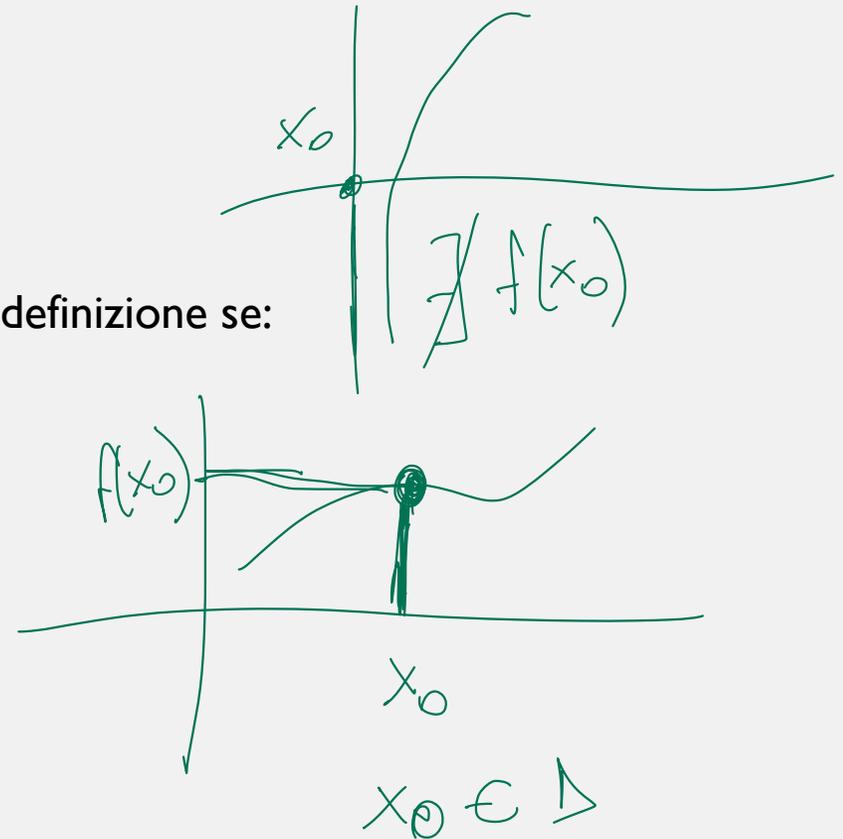
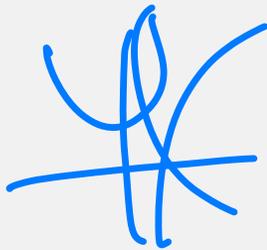
Sia f una funzione a valori reali definita in un intervallo I (limitato o illimitato) e sia x_0 un punto appartenente all'intervallo $x_0 \in I$

Si dice che f è **continua** nel punto x_0 se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Quindi, si dice che f è continua in un punto x_0 interno al proprio intervallo di definizione se:

- $\exists f(x_0)$
- \exists finito il limite di $f(x)$ per $x \rightarrow x_0$
- Il limite coincide con il valore $f(x_0)$ di f nel punto x_0



Limiti di funzioni continue

➤ Se si verifica solo che:

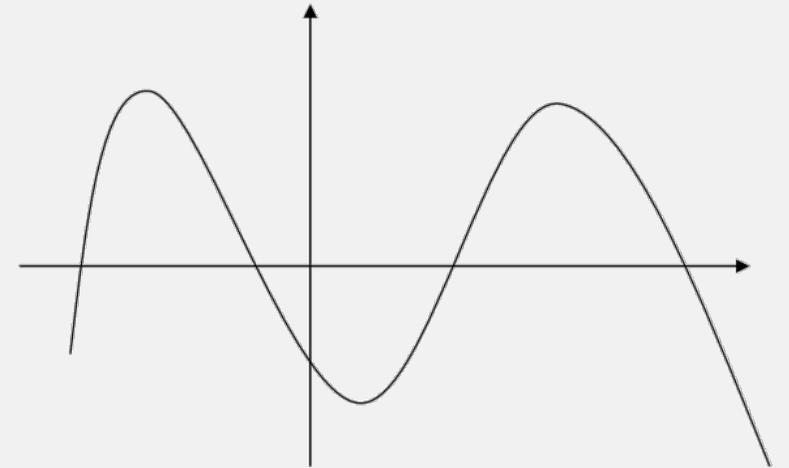
$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Allora si dice che la funzione è **continua a destra**

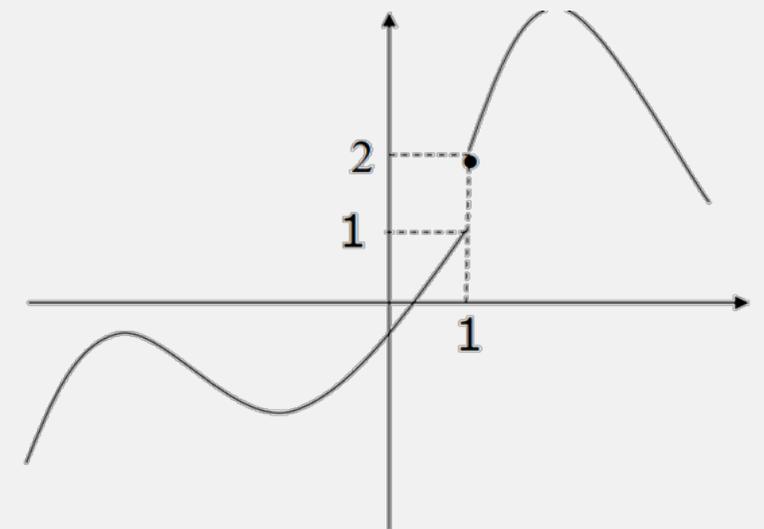
➤ Se si verifica solo che:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

Allora si dice che la funzione è **continua a sinistra**



Funzione continua



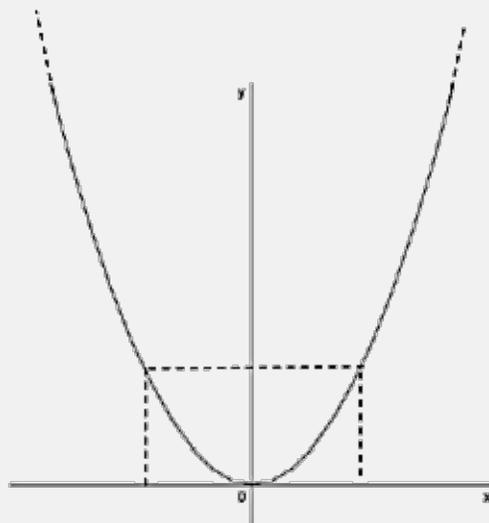
Funzione non continua

Limiti di funzioni elementari

Funzione potenza con esponente intero

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty,$$
$$\forall n \in \mathbb{N}$$

n pari



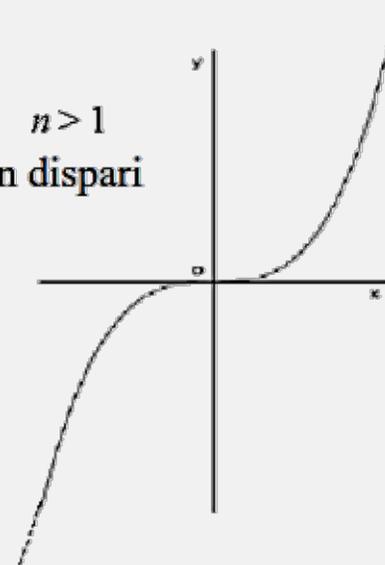
n pari

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$$

n pari

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0$$

n > 1
n dispari



n dispari

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$$

n dispari

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0$$

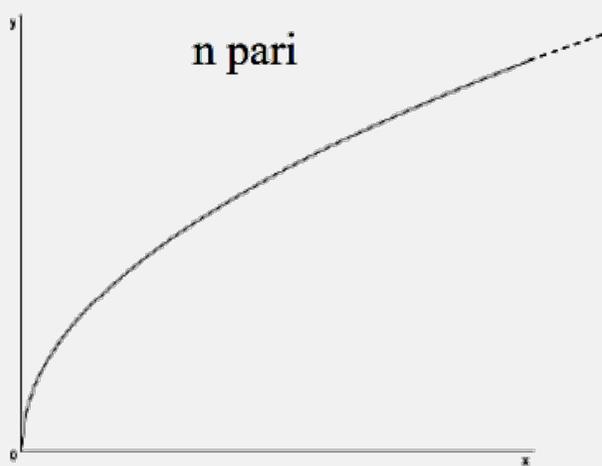
Limiti di funzioni elementari

Funzione radice ennesima

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty,$$

$\forall n \in \mathbb{N}$

(Handwritten blue annotations: an arrow points from the x in the expression to the x in $x^{1/n}$ above it.)

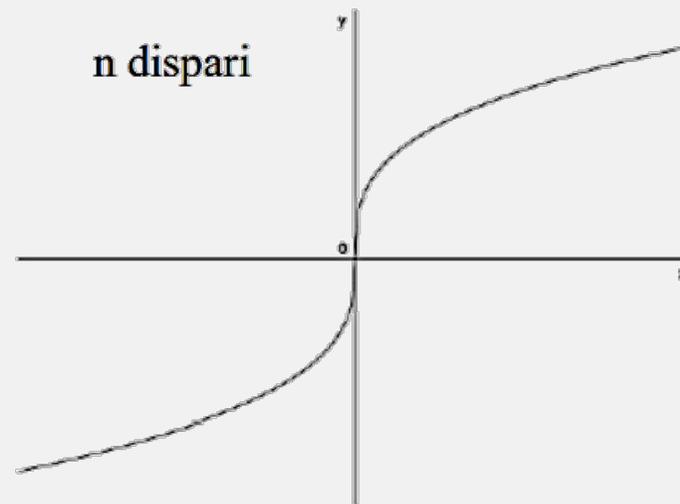


n pari

$$\nexists \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[n]{x}$$

n pari

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[n]{x} = 0^+$$



n dispari

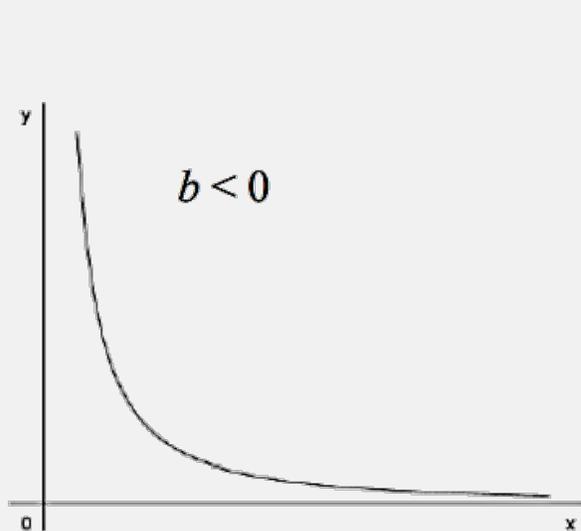
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty$$

n dispari

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[n]{x} = 0$$

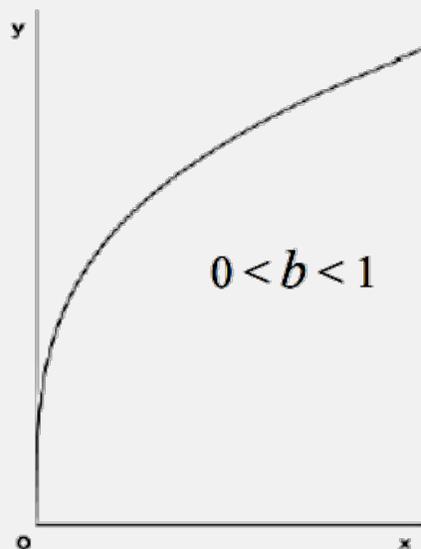
Limiti di funzioni elementari

Funzione potenza con esponente reale



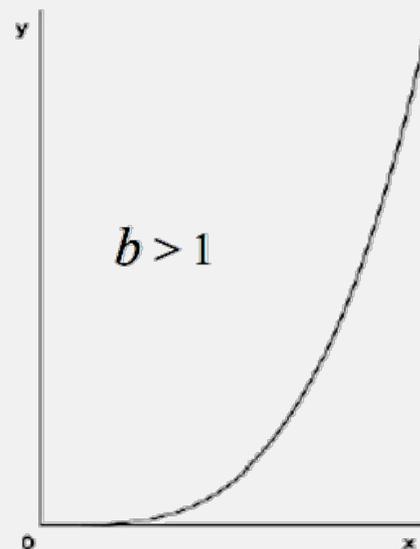
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^b = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^b = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^b = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^b = 0$$



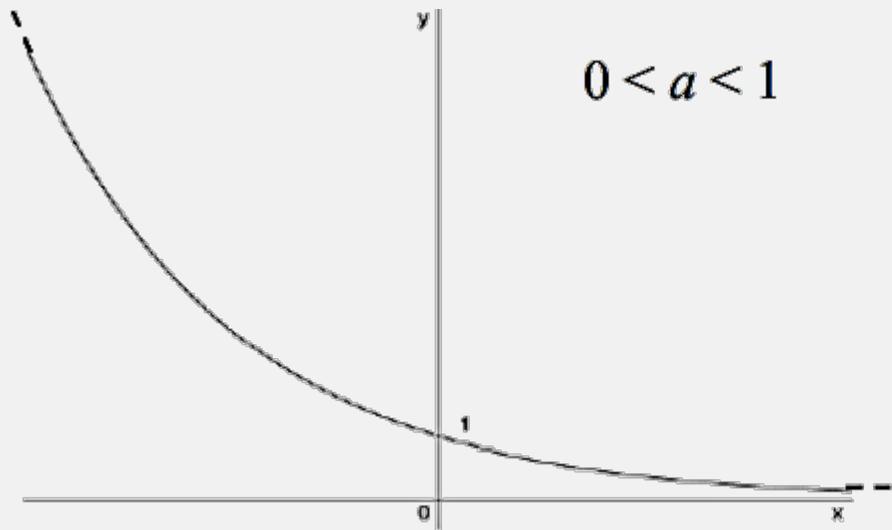
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^b = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^b = 0$$

Continuità in zero

Limiti di funzioni elementari

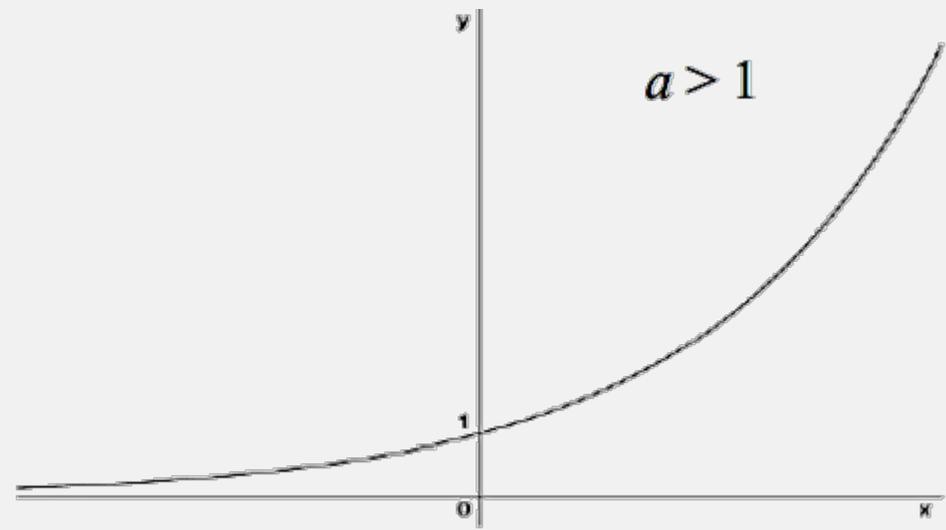
Funzione esponenziale



$$0 < a < 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$$



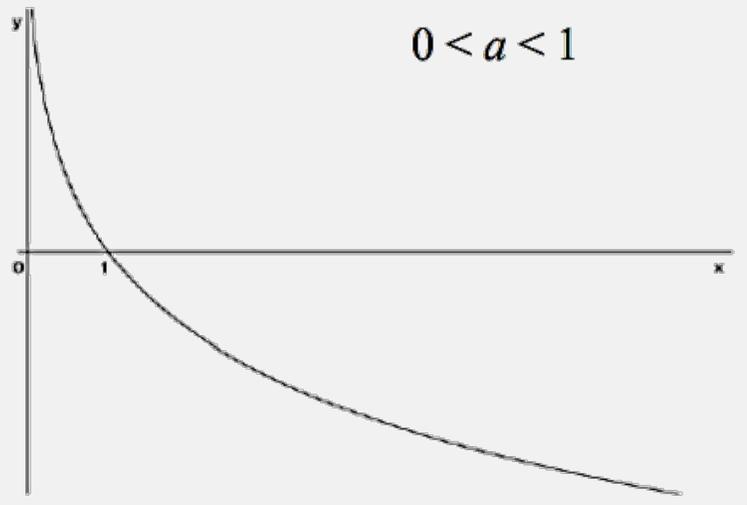
$$a > 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

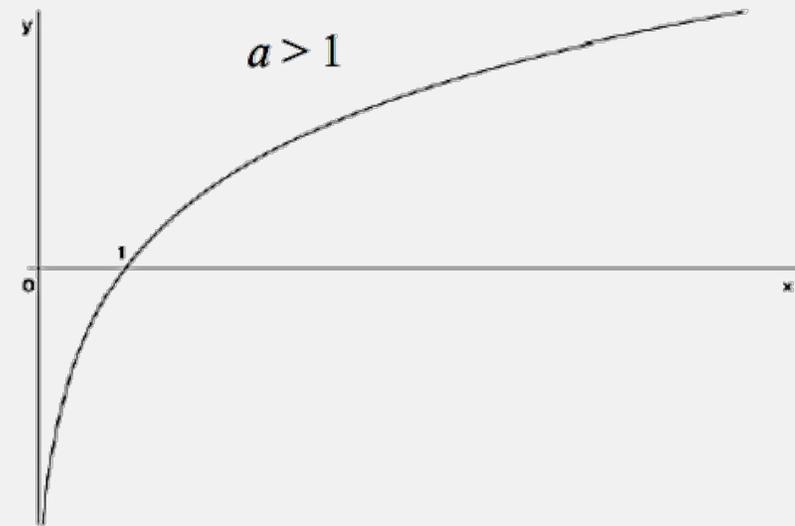
Limiti di funzioni elementari

Funzione logaritmo



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$$



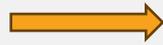
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$$

Limiti di funzioni elementari

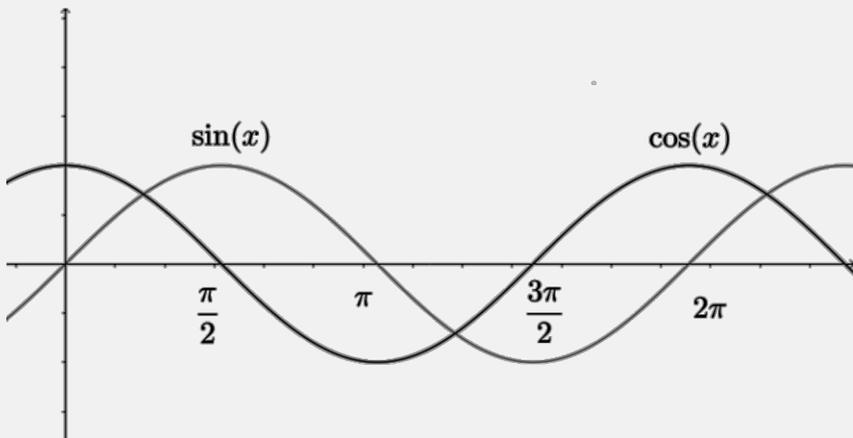
Funzione seno / coseno

$$\nexists \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sin x$$



$$\nexists \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \cos x$$

Pur non esistendo, tali limiti rappresentano qualcosa di limitato (finito) poiché sia la funzione seno che la funzione coseno assumono valori nell'intervallo chiuso e limitato $[-1, 1]$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$$

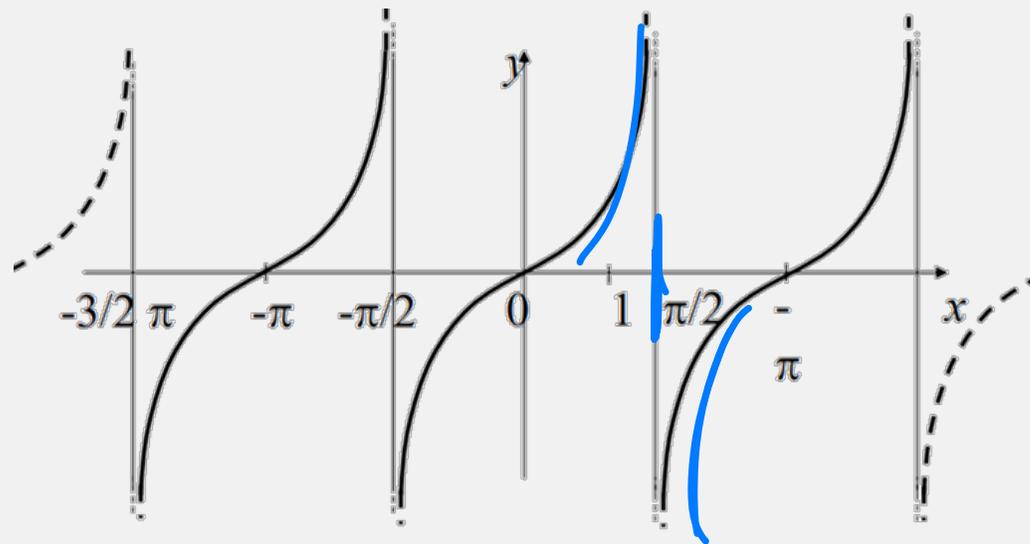
$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x = 0$$

Limiti di funzioni elementari

Funzione tangente

$$\nexists \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \tan x$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \tan x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} \tan x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}} \tan x = +\infty$$

Asintoti orizzontali $\rightarrow y = l$

Assegnata una funzione f a valori reali definita in un intervallo illimitato I , se il limite all'infinito di risulta finito, cioè se

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l$$

Allora, la retta $y = l$ è detta **asintoto orizzontale** per il grafico della funzione $f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$



$$y = 2$$

Asintoto orizzontale

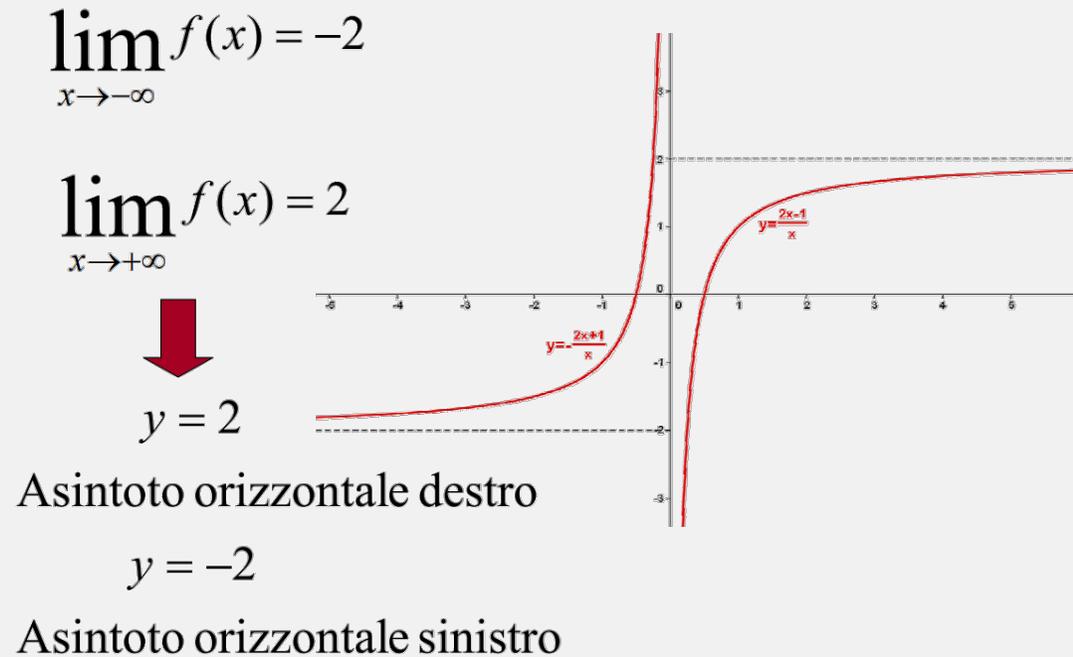


Asintoti orizzontali

Se succede che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l_1 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l_2$$

Allora, il grafico di $f(x)$ ammette due asintoti orizzontali: $y = l_1$ a $+\infty$ e $y = l_2$ a $-\infty$



Asintoti orizzontali

Se il limite all'infinito di una funzione f a valori reali definita in un intervallo illimitato I risulta invece infinito, cioè se

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty \neq \ell$$

Allora, la funzione sicuramente **NON** ammette asintoto orizzontale

Asintoti obliqui

$$y = mx + q$$

Assegnata una funzione f a valori reali definita in un intervallo illimitato I , se si verifica che

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

Allora, la funzione sicuramente **NON** ammette asintoto orizzontale

È possibile verificare se il grafico della funzione considerata ammetta asintoto obliquo.

Se si verificano le seguenti condizioni, allora il grafico della funzione $f(x)$ ammette asintoto obliquo di equazione $y = mx + q$:

1^a

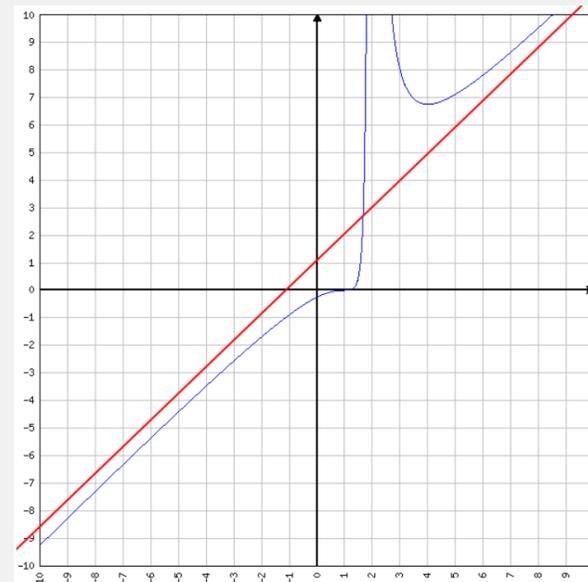
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

2^a

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0 \text{ finito}$$

3^a

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] = q \text{ finito}$$



Asintoti obliqui

Se si verifica che:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

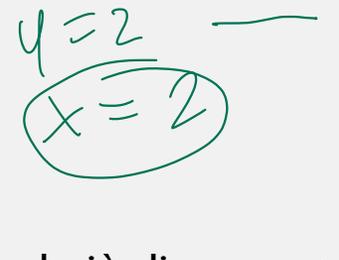
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m = 0 \text{ oppure infinito}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] = q \text{ infinito}$$



Il grafico della funzione $f(x)$ non ammette neppure asintoto obliquo

Asintoti verticali

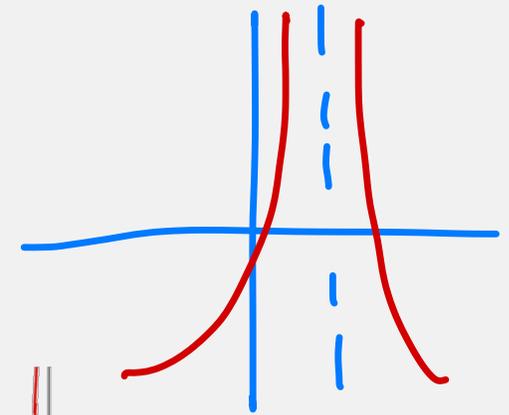


Assegnata una funzione f a valori reali definita in un intervallo I privato al più di un punto x_0 , se il limite al finito x_0 risulta infinito, cioè se

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty$$

Allora, la retta $x = x_0$ è detta **asintoto verticale** per il grafico della funzione $f(x)$



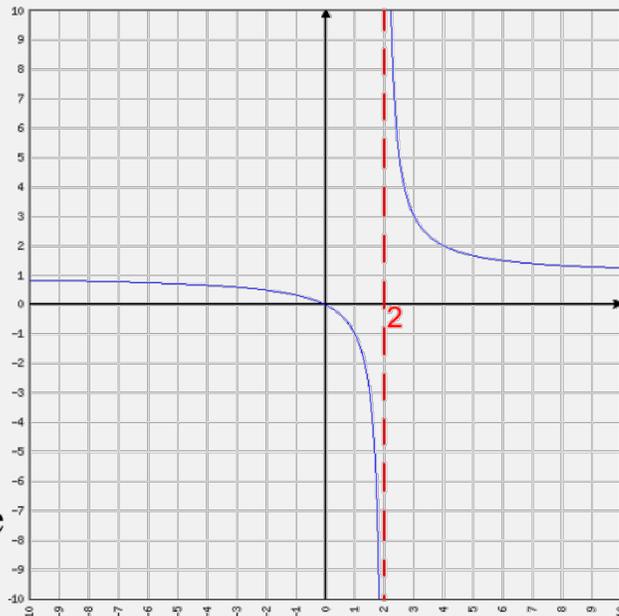
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$$



$$x = 2$$

Asintoto verticale



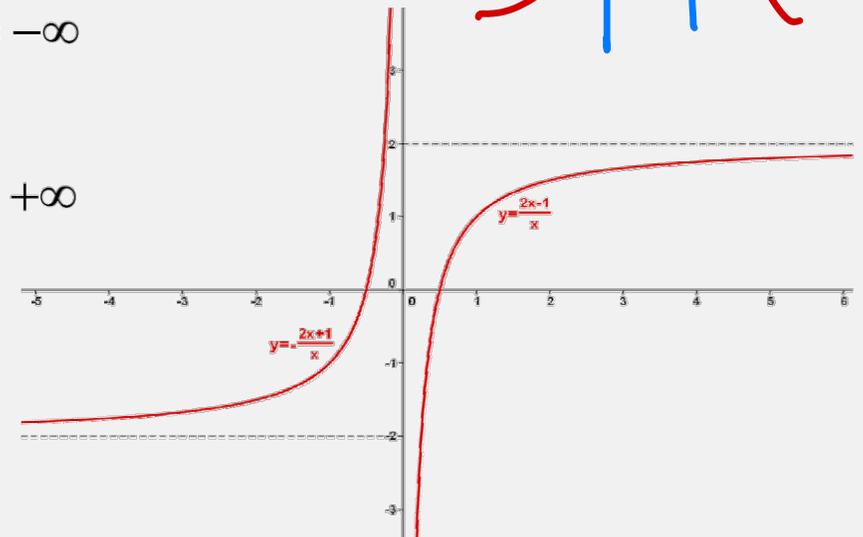
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$$



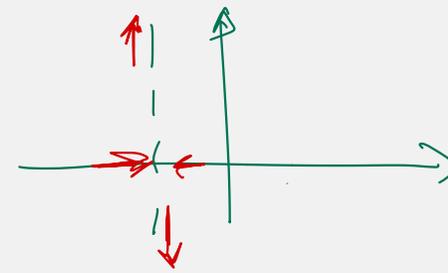
$$x = 0$$

Asintoto verticale



Esempio.

Determinare gli eventuali asintoti della seguente funzione: $f(x) = \frac{x^2-4}{x+1}$



La prima cosa da fare nel determinare la presenza di eventuali asintoti è determinare il dominio della funzione:

$$x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$$

Il dominio pertanto è:

$$(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$$

$$\Delta_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -1\} = \mathbb{R} - \{-1\}$$

Poiché la funzione assegnata ammette un punto in cui non è definita, ha senso ricercare gli eventuali asintoti verticali e orizzontali:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - 4}{x + 1} = \frac{-3}{-1^- + 1} = \frac{-3}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 4}{x + 1} = \frac{-3}{-1^+ + 1} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$

→ $x = -1$
a. verticale

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4}{x + 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

Non esiste a.
orizzontale sinistro

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4}{x + 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

Non esiste a.
orizzontale destro

Esempio.

Non esiste asintoto orizzontale \rightarrow verifichiamo se esiste l'asintoto obliquo

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \frac{x^2 - 4}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

$$\Rightarrow m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$q = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^2 - 4}{x + 1} - x \right] =$$
$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^2 - 4 - x^2 - x}{x + 1} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{-4 - x}{x + 1} \right] = -1$$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$q = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = -1$$

1 -1
↑ ↑
 $y = ux + q$

$y = x - 1$
asintoto obliquo
a sinistra

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x} = 1$$

$$q = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{-4 - x}{x + 1} \right] = -1$$

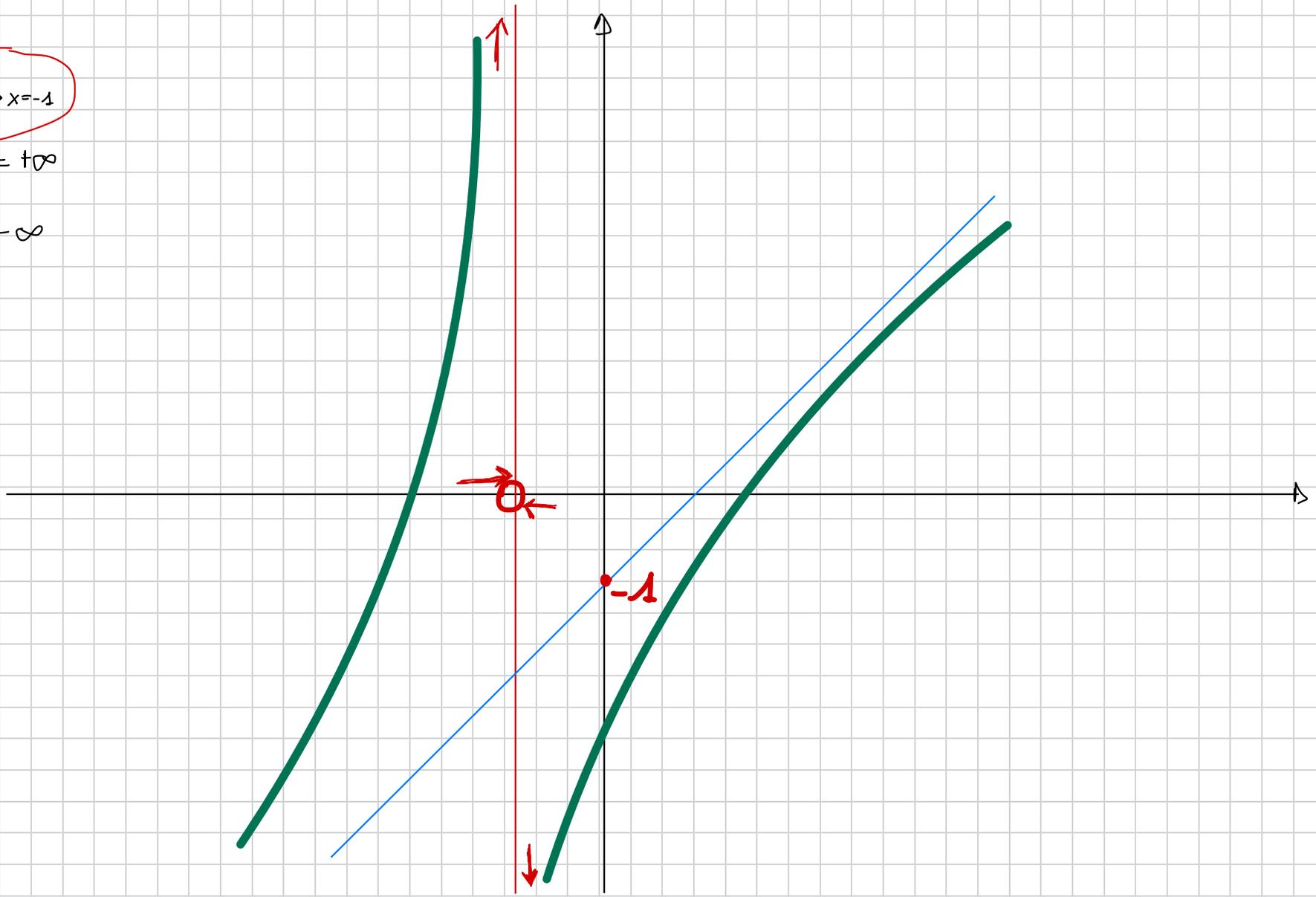
$y = x - 1$
asintoto obliquo
a destra

AS. VERT. $\rightarrow x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$$

AS. OBLIQUO:
 $y = x - 1$
(destro e sinistro)



Discontinuità

➤ Se f è definita in un intervallo $[a, b]$ escluso al più il punto x_0

oppure

➤ Se f non è continua in un punto x_0

Si dice che il punto x_0 è un **punto singolare** o un **punto di discontinuità**

Punti di discontinuità di I specie (punti di salto)

Si dice che nel punto x_0 una funzione f ha una discontinuità di I specie se in tale punto esistono finiti il limite destro ed il limite sinistro di f ma sono diversi tra loro. Cioè:

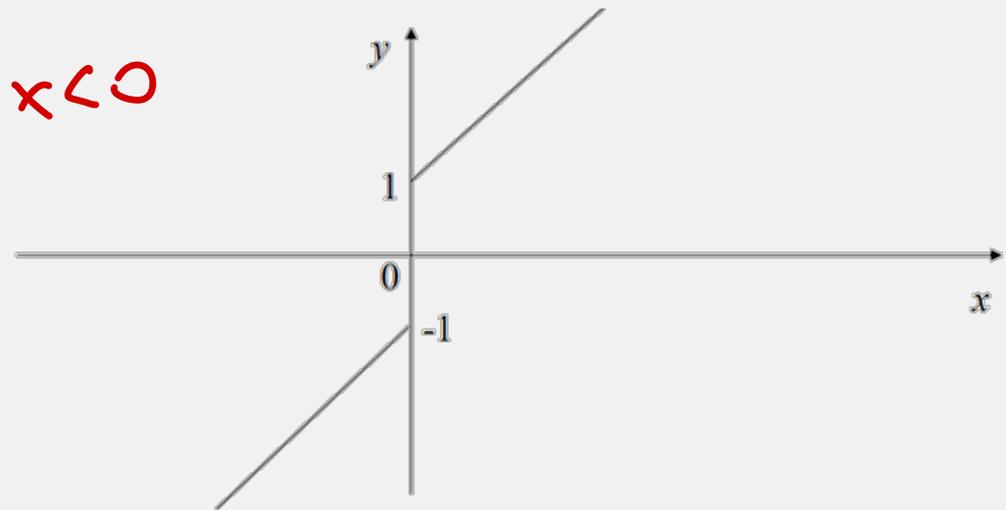
$$l_1 = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l_2$$

Esempio. La funzione seguente presenta una discontinuità di I specie in $x = 0$:

$$f(x) = x + \frac{|x|}{x} = \begin{cases} x + 1, & \text{se } x > 0 \\ x - 1, & \text{se } x < 0 \end{cases} \rightarrow x + \frac{x}{x}, x > 0$$

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$$

$$x + \frac{-x}{x}, x < 0$$



Punti di discontinuità di II specie

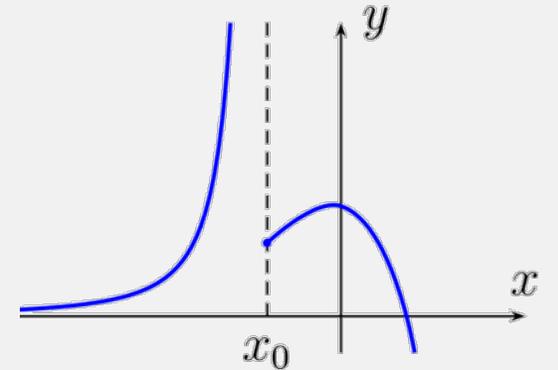
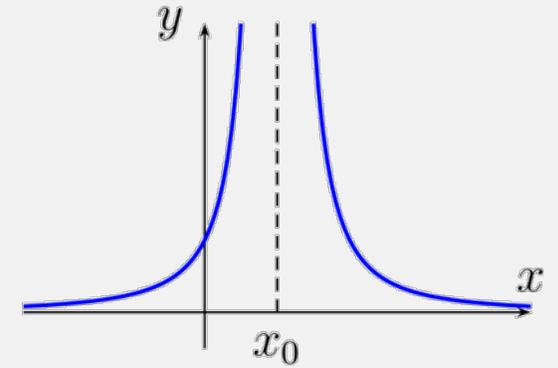
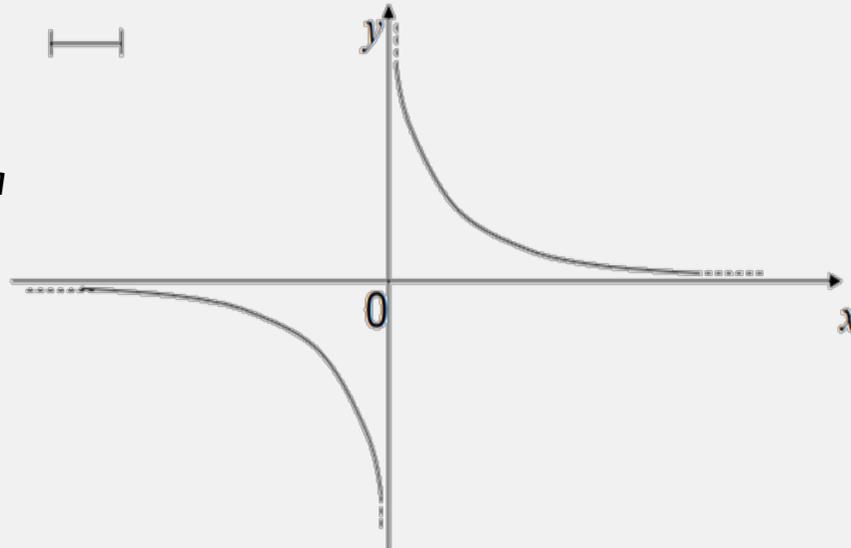
Si dice che nel punto x_0 una funzione f ha una discontinuità di II specie se in tale punto almeno uno dei due limiti destro o sinistro di f è infinito oppure non esiste. Cioè:

Esempio. La funzione seguente presenta una discontinuità di II specie in $x = 0$:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$+\infty = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

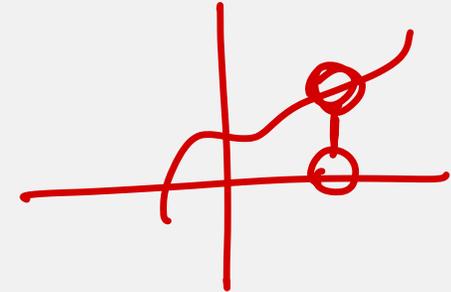
La presenza di asintoti verticali è rappresentativa di discontinuità di II specie



Punti di discontinuità di III specie (o eliminabili)

Si dice che nel punto x_0 una funzione f ha una discontinuità eliminabile se in tale punto esiste finito il limite di f ma f in tale punto:

- Non è definita
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$

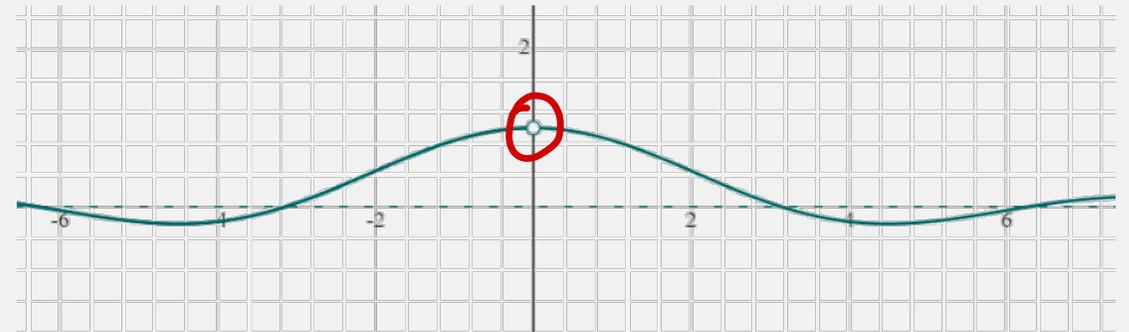


Esempio. La funzione seguente presenta una discontinuità eliminabile in $x = 0$:

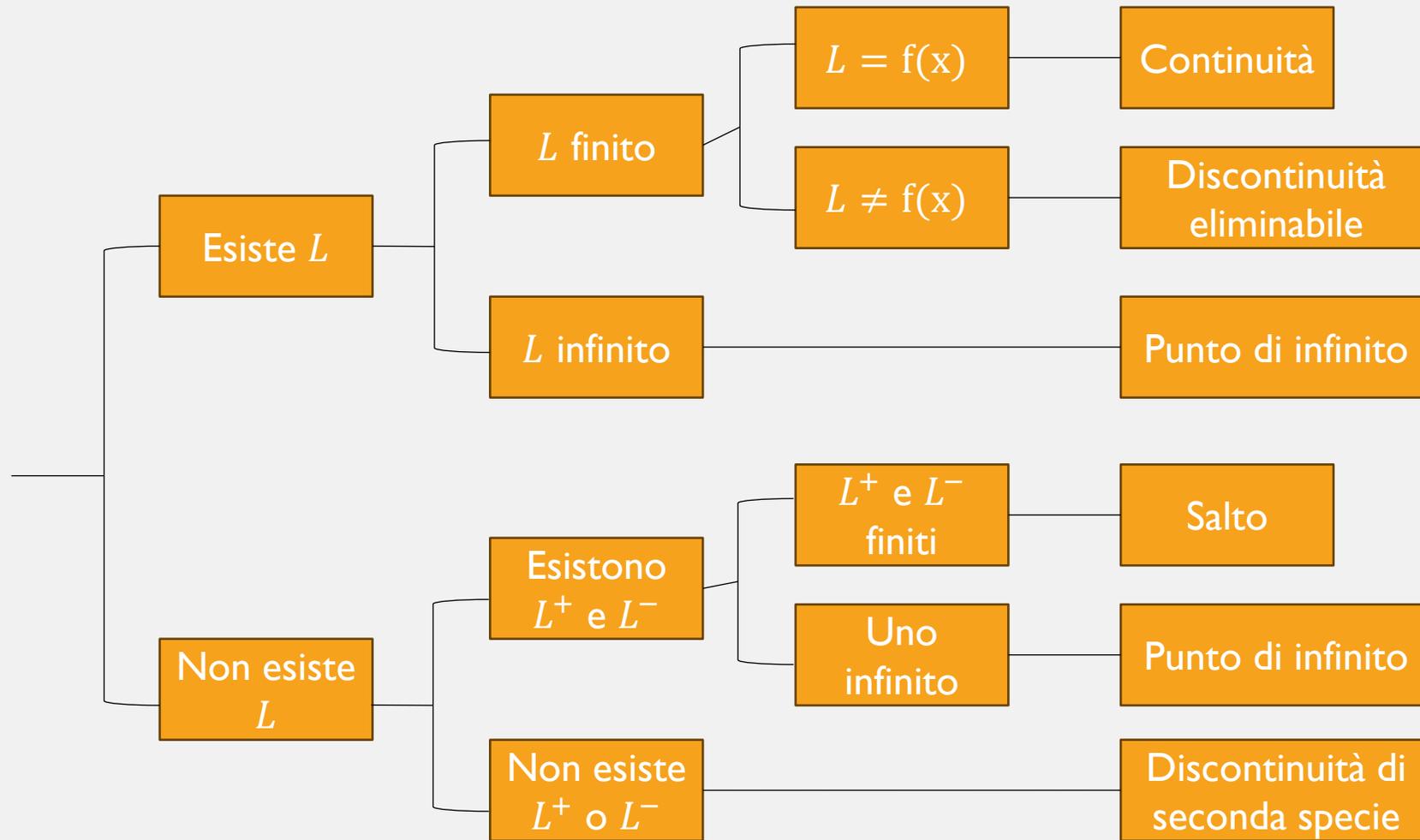
$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Infatti:

- f non è definita in $x = 0 \Rightarrow \nexists f(0)$
- Però esiste $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$



Punti di discontinuità



Limiti notevoli

Limite	Forma di indeterminazione
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\frac{0}{0}$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$	$\frac{0}{0}$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$	1^∞
$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x = 0$	$0 \cdot \infty$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$	$\frac{0}{0}$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$	$\frac{0}{0}$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$	$\frac{0}{0}$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$	$\frac{0}{0}$

Limite	Forma di indeterminazione
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$	$\frac{0}{0}$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$	$\frac{0}{0}$
$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$	1^∞
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$	$\frac{0}{0}$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$	$\frac{0}{0}$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^k - 1}{x} = k$	$\frac{0}{0}$

Limiti notevoli

Ad ogni limite notevole, possono essere applicate le seguenti proprietà

limite iniziale	se il testo del limite è invertito anche il risultato sarà invertito	se nel limite al posto di x c'è nx il risultato del limite resta lo stesso	se il testo del limite è invertito anche il risultato sarà invertito
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(nx)}{nx} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{nx}{\sin(nx)} = 1$