- **INTEGRALI**

Integrale

Il procedimento di integrazione:

- Determinare la funzione conoscendo la derivata (la posizione di un corpo conoscendo la velocità, la numerosità di una popolazione conoscendo il tasso di crescita, …)

- Integrare ha anche il significato di sommare (area di una parte di piano con contorni curvi)

Le due interpretazione sono in stretta relazione

Il concetto d’integrale è legato alla risoluzione di due classi di problemi:

- **Integrale Indefinito**:
  - Calcolo dell’espressione analitica di una funzione a partire dalla derivata della funzione stessa

- **Integrale Definito**:
  - calcolo delle aree di figure delimitate da curve
  - calcolo di volumi
  - calcolo del lavoro di una forza
  - …..

Calcolo integrale: area sottesa al grafico di una funzione

Il problema dell'integrazione per funzioni reali di variabile reale → questo problema è storicamente legato al problema della misura (calcolare l'area di figure con bordi 'curvilinei').

Metteremo in relazione il problema dell'integrazione al problema della primitiva, cioè:

Assegnata una funzione $f : I \to \mathbb{R}$, determinare (tutte) le funzioni $F : I \to \mathbb{R}$ tali che

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$$

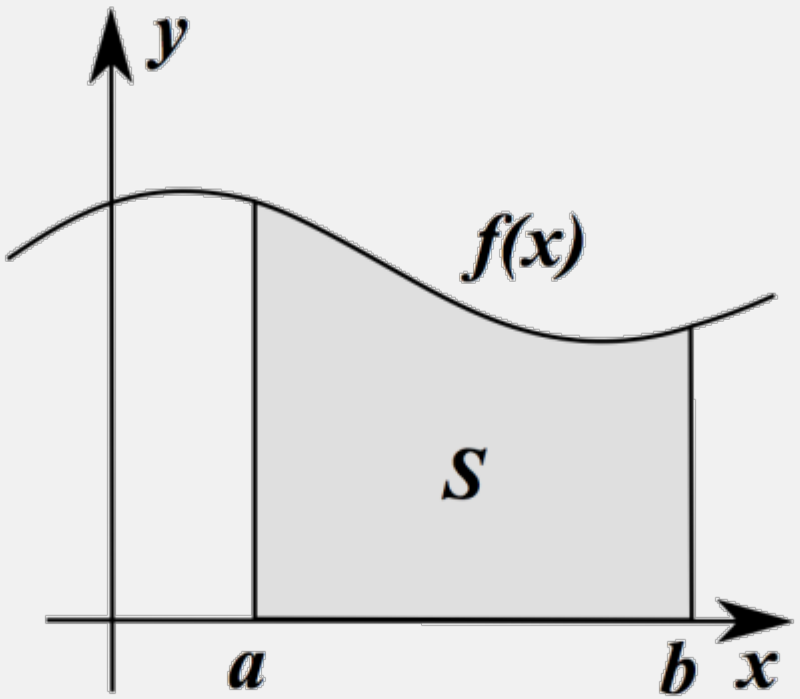
F è detta primitiva di F'

Motivazioni: calcolo di un'area

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua e positiva.

Calcolare l'area A della regione di piano (detta sottografico di f) compresa tra il grafico di f e l'asse delle x.

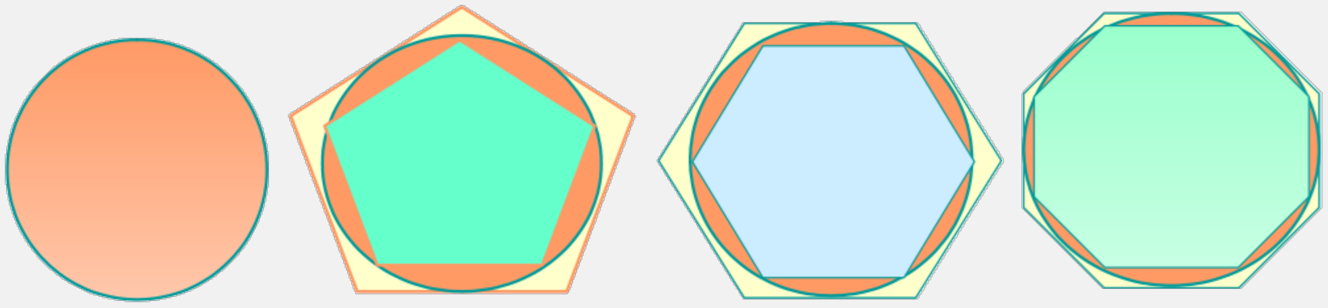
Questo problema ha senso, perché suppongo $f \geq 0$.
Diversamente non avrebbe senso parlare di sottografico di f.

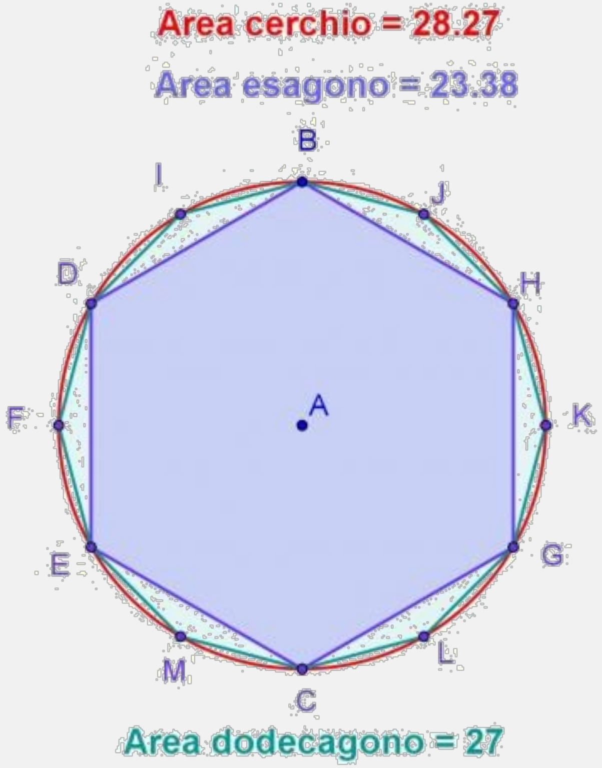


Esempio: area del cerchio.

Archimede di Siracusa (287 a.C. – 212 a.C.): metodo di esaustione per l'area del cerchio/area sottesa da ramo di parabola

È possibile calcolare l'area per approssimazioni successive mediante poligoni regolari inscritti nel cerchio e poligoni regolari circoscritti al cerchio.



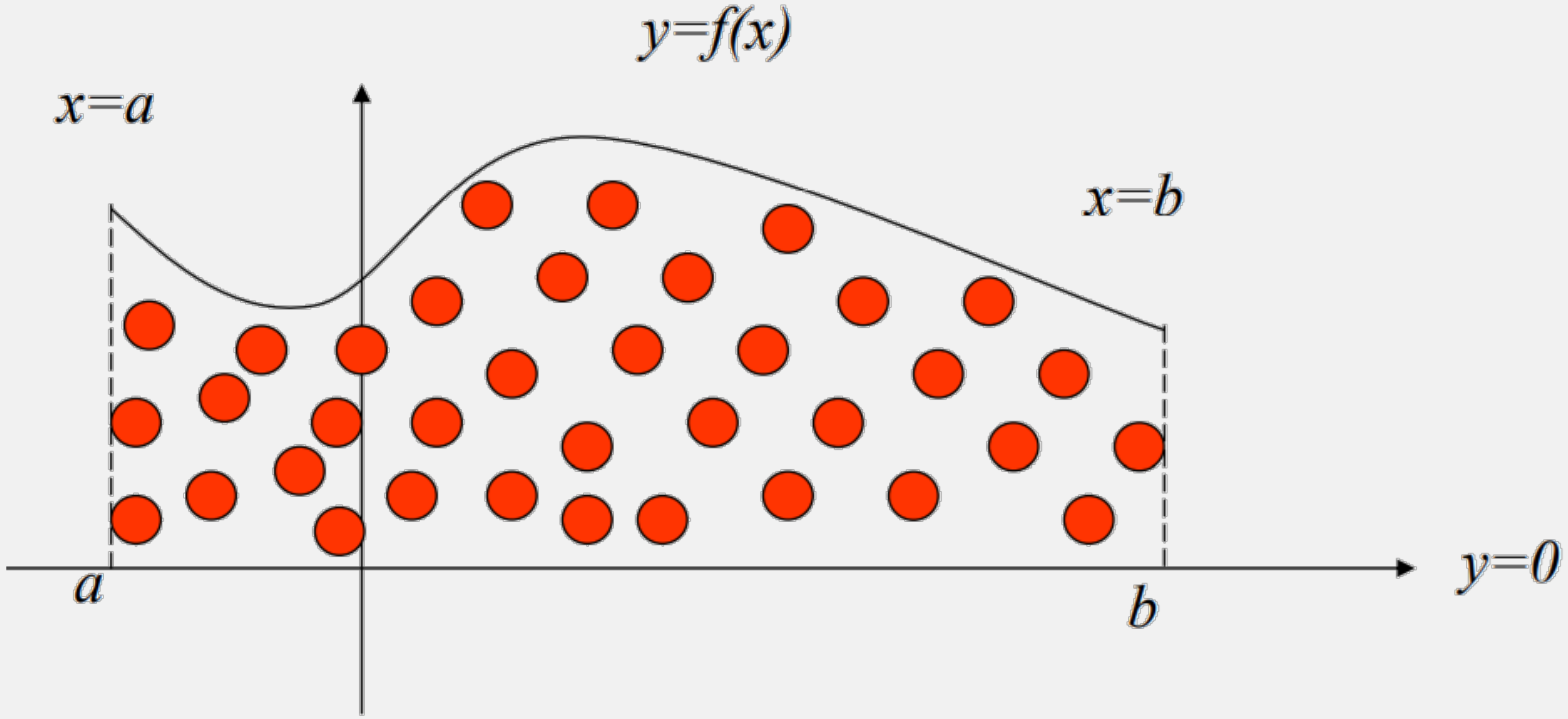


Si dimostra che l'area del cerchio è uguale al limite comune, quando il numero di lati tende a ∞ al quale tendono le successioni formate dalle aree dei poligoni inscritti e circoscritti al cerchio.

Il concetto di integrale: calcolo delle aree

Area del rettangoloide relativa a una funzione

Assegnata una funzione f continua nell'intervallo $[a, b]$, vogliamo calcolare l'area della regione di piano compresa tra l'asse x, le due rette verticali di equazione $x = a$ e $x = b$ ed il grafico di f. Tale regione di piano è detta rettangoloide relativo alla funzione f.



Integrale definito di una funzione: definizione

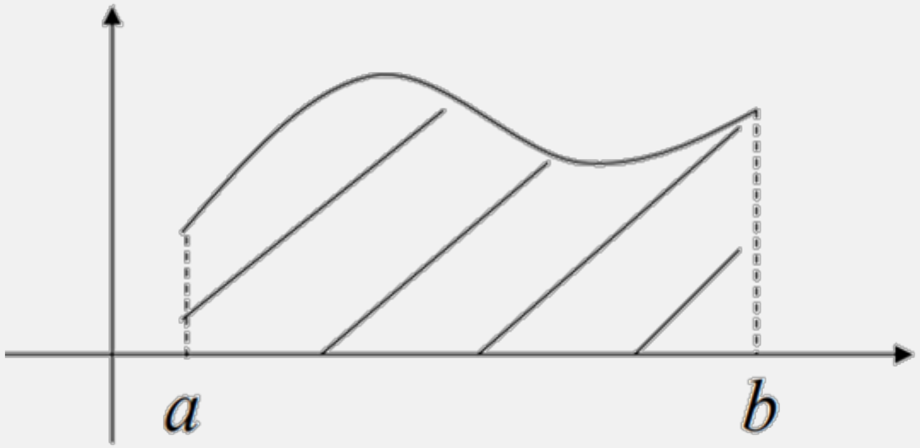
Assegnata una funzione f continua nell'intervallo $[a, b]$, **l'integrale definito** della funzione $f(x)$ relativamente all'intervallo $[a, b]$ è la misura dell'area del rettangoloide R relativo alla funzione f e si indica con il simbolo:

$$\int_a^b f(x)dx = Area\ R$$

Il problema è determinare l'area di una regione del piano R che si trova, in un sistema di assi cartesiani ortogonale, al di sopra dell'asse delle ascisse x e al di sotto del grafico di una funzione $f(x)$ continua e non negativa al variare della variabile x in un intervallo $[a, b]$ chiuso e limitato.

A tale proposito, sia $f(x)$ una funzione definita e continua in un intervallo $[a, b]$ chiuso e limitato, e sia $f(x) \geq 0$ al variare della variabile x in $[a, b]$.

In tale ipotesi, si ha:

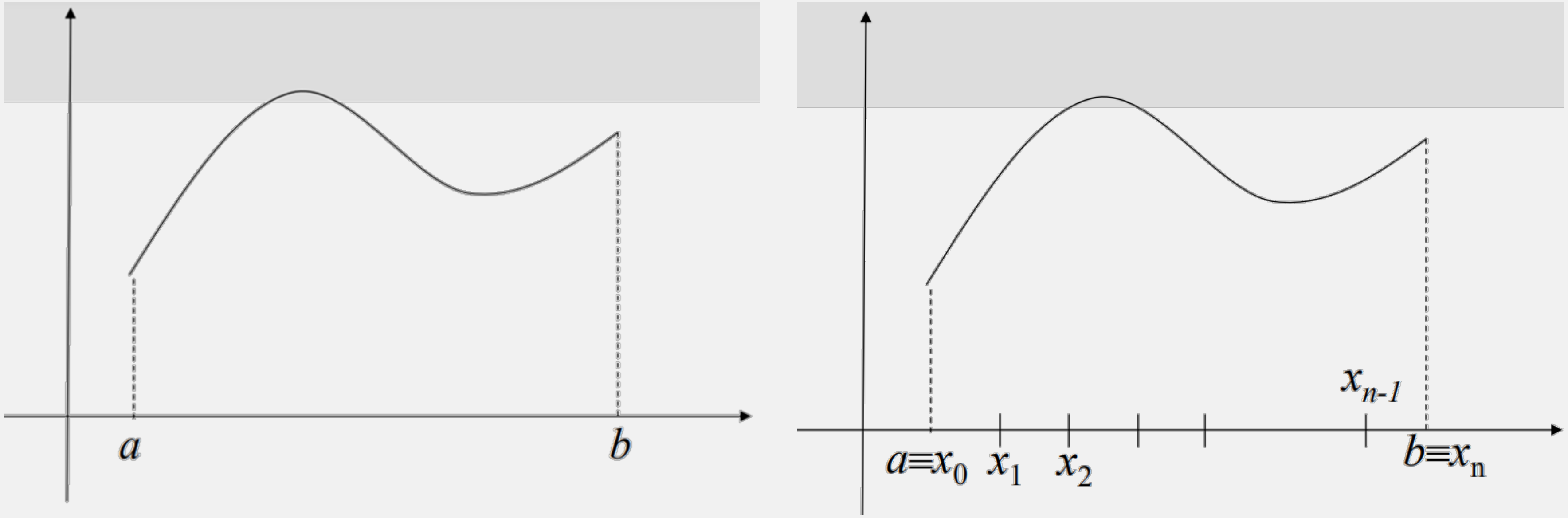


Si definisce **rettangoloide** relativo alla funzione f la parte di piano compresa tra il grafico di $f \geq 0$ e l'asse delle ascisse:

$$R = \{(x, y): a \leq x \leq b \ e \ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Sempre in tale ipotesi, suddividiamo l'intervallo $[a, b]$ in un numero n di parti uguali mediante punti di divisione:

$$a \equiv x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n \equiv b$$



In questo modo, suddividiamo l'intervallo $[a, b]$ in n intervalli parziali più piccoli e uguali fra loro:

$$[x_{i-1}, x_i], i = 1, \dots, n$$

ciascuno di ampiezza $h = \frac{b-a}{n}$

Avendo supposto che $f(x)$ sia una funzione definita e continua nell'intervallo $[a, b]$ chiuso e limitato, in particolare, $f(x)$ risulta definita e continua in ciascuno degli intervalli parziali $[x_{i-1}, x_i]$

Applicando il teorema di Weierstrass in ciascun intervallino parziale

Una funzione $f(x)$ continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ ha un valore minimo $m = f(x_1)$ e massimo $M = f(x_2)$ tali che

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \qquad \forall x \in [a, b]$$

La funzione è dotata di minimo e massimo, che sono, in particolare, i punti x_1 e x_2 dell'intervallo $[a, b]$.

in ciascuno degli intervalli parziali $[x_{i-1}, x_i]$ la funzione f è dotata di minimo m_i e di massimo M_i, con $i = 1, \dots, n$

A partire dai minimi m_i in ciascuno degli intervalli parziali, si possono costruire n rettangoli aventi la base pari all'ampiezza h di ciascun intervallo parziale e l'altezza pari ad m_i

È possibile allora calcolare l'area di ciascuno di questi rettangoli.
Ad esempio, l'area del primo è:

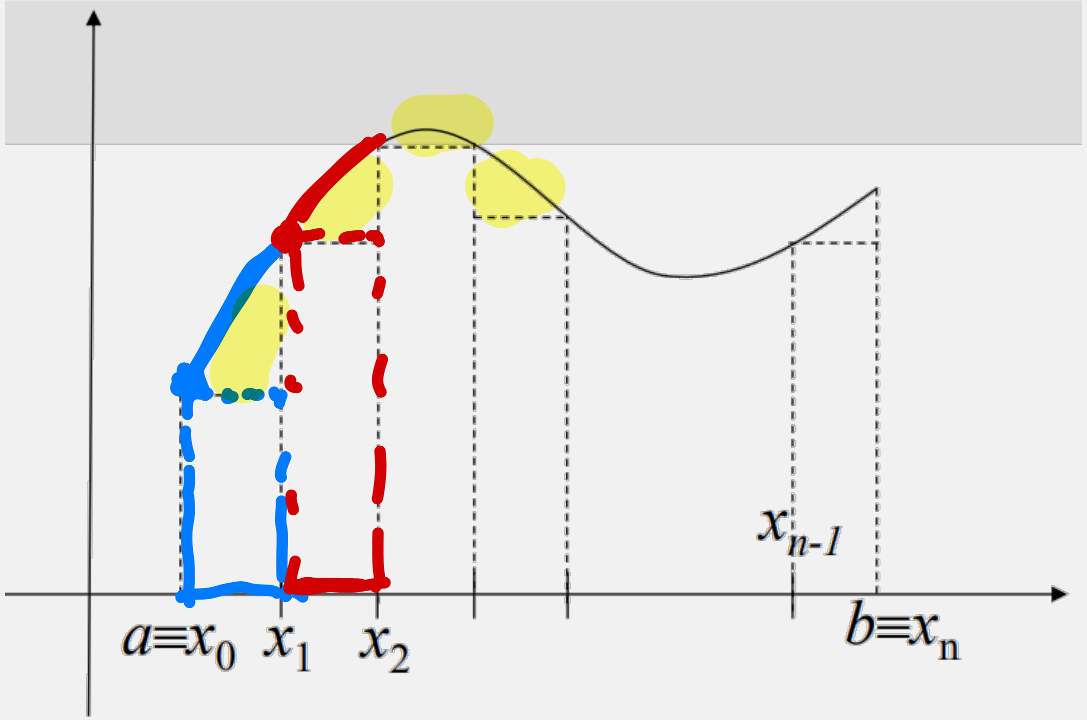
$$m_1(x_1 - x_0) = m_1 \frac{b-a}{n} = m_1 h$$

Analogamente, l'area del secondo è:

$$m_2(x_2 - x_1) = m_2 \frac{b-a}{n} = m_2 h$$

E quella dell'n-esimo:

$$m_n(x_n - x_{n-1}) = m_n \frac{b-a}{n} = m_n h$$



Così la somma delle aree degli n rettangoli di altezza m_i è:

$$s_n = m_1 h + m_2 h + \dots + m_n h$$

A partire dai massimi M_i in ciascuno degli intervalli parziali, si possono costruire n rettangoli aventi la base sempre pari all'ampiezza h di ciascun intervallo parziale e l'altezza pari ad M_i

È possibile allora calcolare l'area di ciascuno di questi rettangoli.
Ad esempio, l'area del primo è:

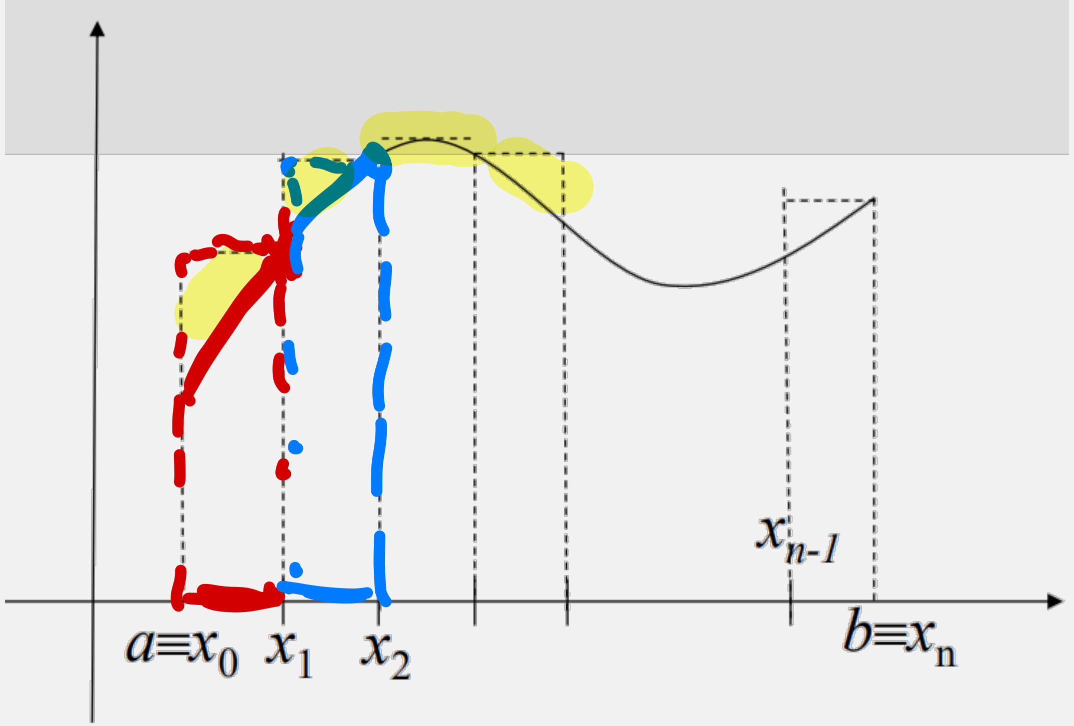
$$M_1 h$$

Analogamente, l'area del secondo è:

$$M_2 h$$

E quella dell'n-esimo:

$$M_n h$$



Così la somma delle aree degli n rettangoli di altezza M_i è:

$$S_n = M_1 y + M_2 h + \cdots + M_n h$$

Sicuramente vale che:

$$s_n \leq S_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

Cioè, qualunque sia la suddivisione dell'intervallo $[a, b]$ in intervalli parziali, l'area del pluri-rettangolo inscritto nel rettangoloide è sempre minore o uguale a quella del pluri-rettangolo circoscritto al rettangoloide.

Teorema.
Se $f(x)$ è una funzione definita e continua in un intervallo $[a, b]$ chiuso e limitato, e se $f(x) \geq 0$ al variare della variabile x in $[a, b]$,

Allora le somme s_n e S_n hanno limite finito per $n \to +\infty$ ed in particolare hanno lo stesso limite coincidente con l'area del rettangoloide relativo alla funzione f:

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} S_n = Area\ R$$

In particolare, il valore comune del limite delle somme s_n e S_n si definisce **integrale definito** della funzione $f(x)$ esteso all'intervallo $[a, b]$ e si indica:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} S_n$$

E non è altro che l'area del rettangoloide relativo alla funzione f (ricordiamo che $f(x) \geq 0$ al variare della variabile x in $[a, b]$

I numeri a e b (estremi dell'intervallo di definizione della funzione) vengono definiti **estremi di integrazione** e in particolare:

- a e l'estremo inferiore di integrazione
- b è l'estremo superiore di integrazione

La funzione $f(x)$ viene definita **funzione integranda**

La variabile x è la **variabile di integrazione**

In definitiva, per definizione si ha:

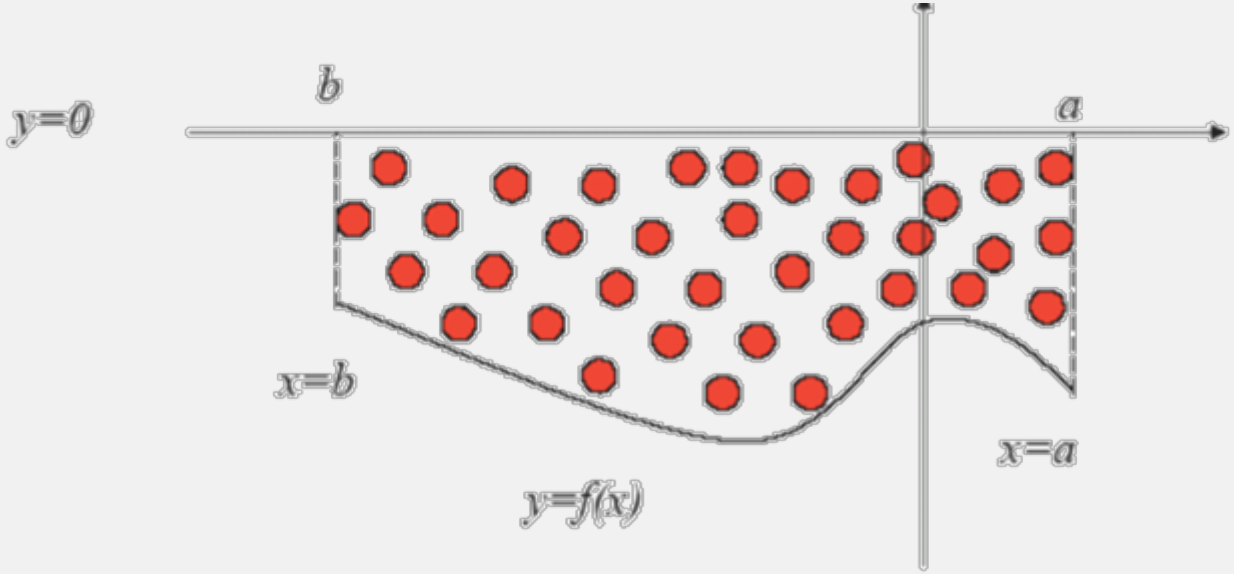
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} S_n = Area\ R$$

Nelle ipotesi poste, l'integrale definito è un numero maggiore di zero.

Osservazione 1.
La definizione di integrale definito di una funzione f definita e continua in un intervallo $[a, b]$, nel caso particolare in cui $f(x) \geq 0$, ha un'interpretazione geometrica in quanto coincide con l'area del rettangoloide relativo alla funzione stessa.

E se $f(x)$ non è sempre maggiore di 0?

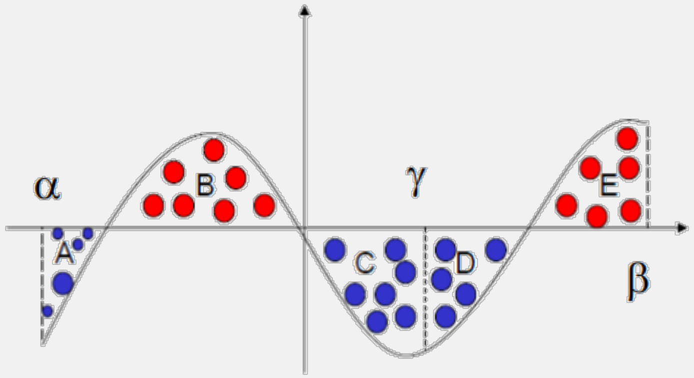
Le somme s_n ed S_n relative ad una funzione $f(x)$, definita e continua in un intervallo $[a, b]$, possono essere costruite anche indipendentemente dal segno della stessa funzione $f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$



In particolare, assegnata $f(x)$ continua in $[a, b]$ (di segno non necessariamente positivo), l'integrale definito

$$\int_a^b f(x)dx$$

Si interpreta come la somma delle aree con segno delle regioni che il grafico $f(x)$ individua insieme all'asse orizzontale e alle rette $x = a$ e $x = b$



$$\int_\alpha^\gamma f(x)dx = -A+B-C$$

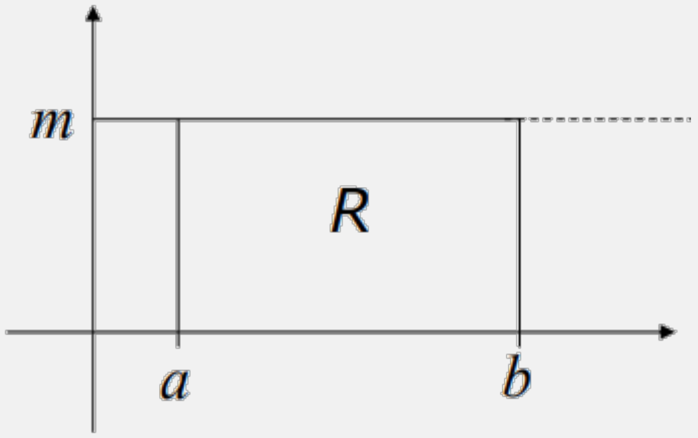
$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = -A+B-C-D+E$$

$$\int_\alpha^\gamma f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\beta^\gamma f(x)dx$$

Osservazione 2.

Se $f(x)$ è una funzione costante:

$$f(x) = m > 0, \forall x \in [a, b]$$



Si ha:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b mdx = m(b-a)$$

In particolare, vale che:

$$\int_a^a f(x)dx = 0, \forall f(x)\ definita\ e\ continua$$

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

Proprietà degli integrali definiti

Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabili. Allora, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ le funzioni

$$f + g, \quad \lambda f, \quad |f| \text{ sono integrabili}$$

$$\forall [c, d] \subset [a, b], \quad f_{[c,d]} \text{ è integrabile}$$

Inoltre, valgono le seguenti proprietà:

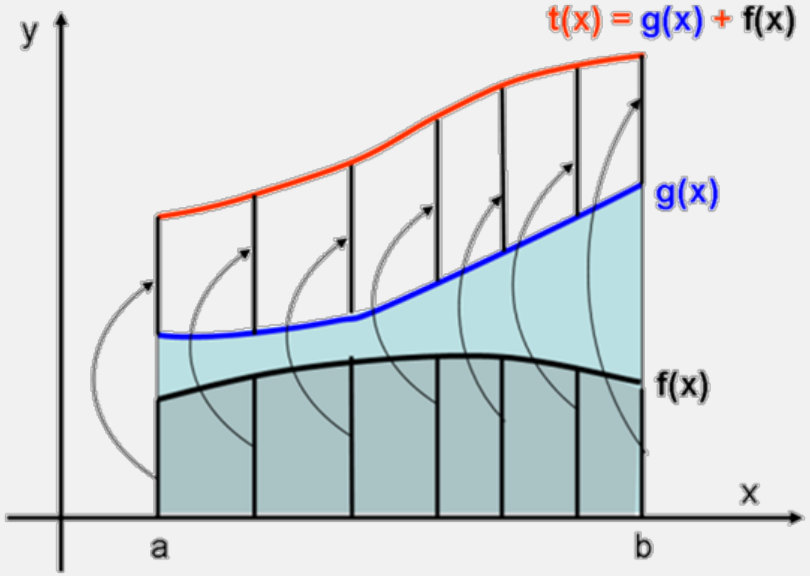
- Linearità $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b \big(\alpha f(x)\big) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$$

$$\Longrightarrow \int_a^b -f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$$

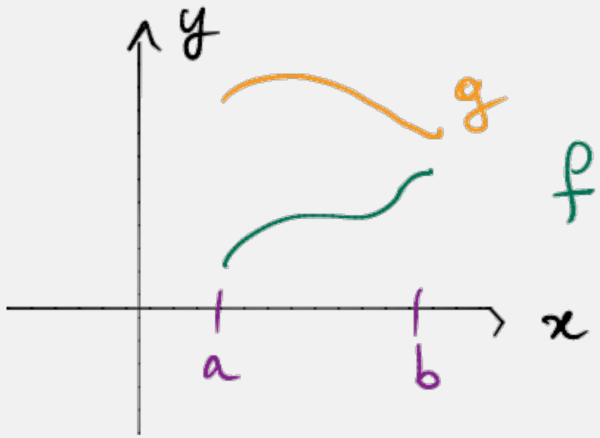
- Integrale della somma:

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$



- Proprietà di confronto: se $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a,b]$

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

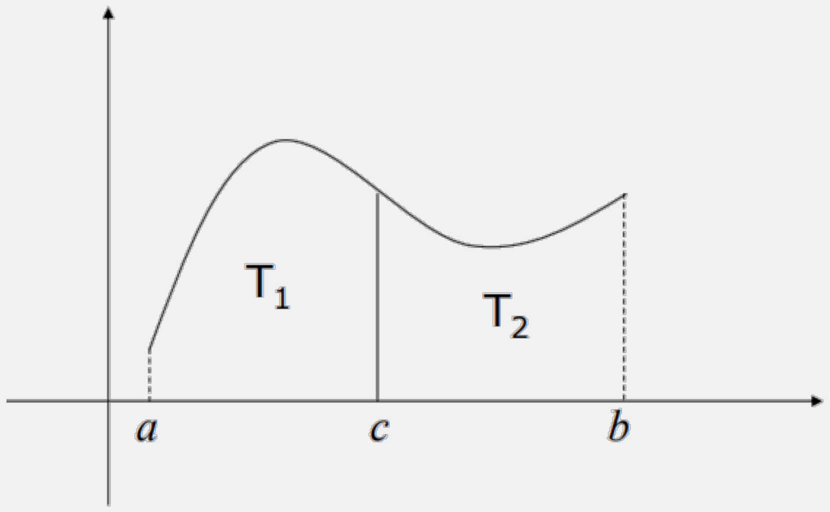


- Confronto con il modulo:

$$\left|\int_a^b f(x)\right| dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

- Proprietà additiva: $\forall c \in (a, b) : a < c < b$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$



Chiaro significato geometrico nel caso di funzioni positive:

$$Area\ R = Area\ T_1 + Area\ T_2$$

Primo teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia $f(x)$ una funzione continua e positiva in $[a, b]$.
Fissato x in $[a, b]$, definiamo

$$\frac{d}{dx}\int_{a}^{x} f(t)dt = f(x)$$

In altre parole, l'integrale ci fornisce un modo per costruire una funzione di derivata assegnata. In altre parole ancora, la funzione

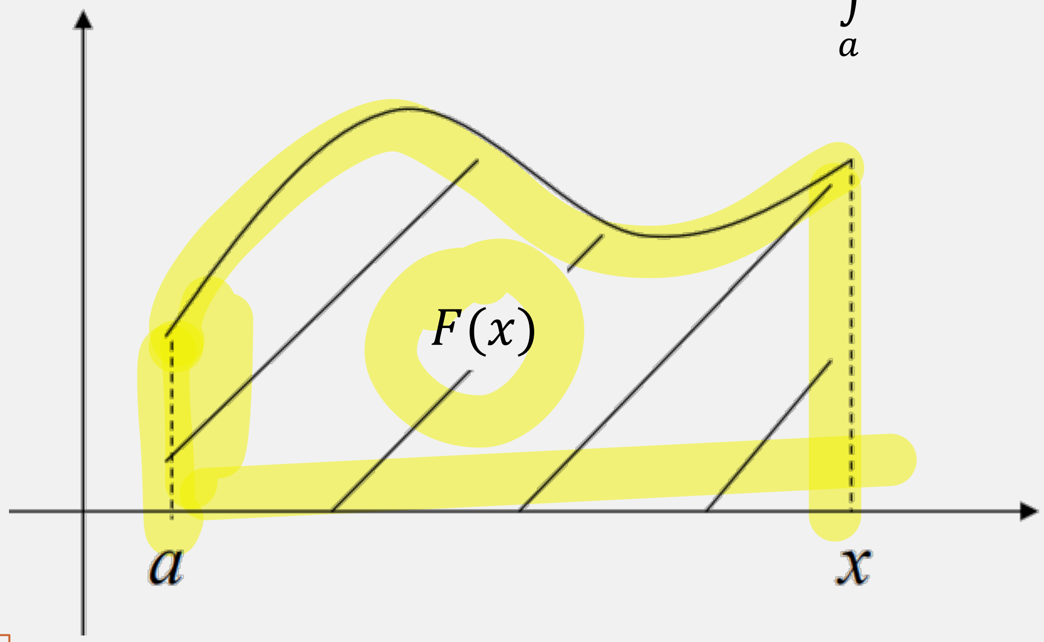
$$F(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt$$

è una soluzione dell'equazione

$$\frac{dF}{dx} = f$$

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Ricordando che due funzioni con la stessa derivata differiscono solo per una costante additiva, ricaviamo che:



Le soluzioni di $\frac{dF}{dx} = f$ sono tutte e sole nella forma:

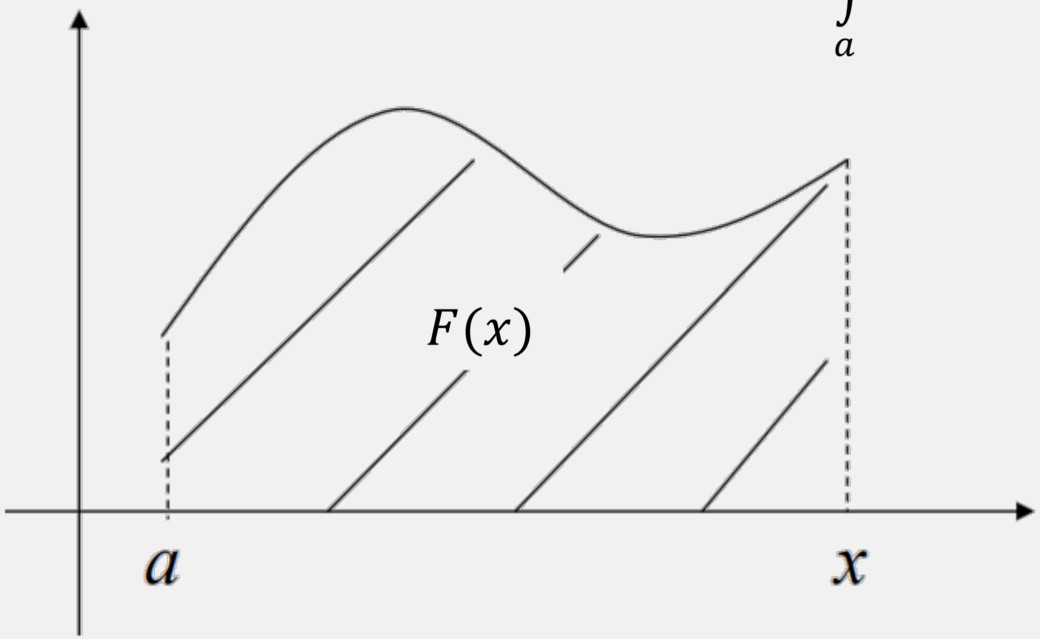
$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + c$$

con $c \in \mathbb{R}$

Esempio pratico:

Nell'intervallo $[0, x]$, l'integrale della funzione $2t$ è x^2:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$



$$F(x) = \int_0^x 2t\,dt = x^2$$

La **funzione integranda** $f(x)$ è $f(x) = 2x$

La **funzione integrale** $F(x)$ è $F(x) = x^2$

La derivata della funzione integrale è $F'(x) = \frac{d}{dx}x^2 = 2x$

Quindi, la derivata della funzione integrale $F'(x)$ è uguale alla funzione integranda $f(t)$ calcolata per $t = x$:

$$F'(x) = f(x)$$

Secondo Teorema fondamentale del calcolo integrale (Teorema di Torricelli-Barrow)

Sia $f(x) : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile, per ogni $x \in [x_0, x_1]$ si ha:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{d}{dt} f(t) dt = f(x) - f(x_0)$$

Si può usare la seguente forma abbreviata per indicare questa differenza:

$$f(x) - f(x_0) = f(t)|_{x_0}^{x}$$

Sia F la funzione integrale di f e G una generica primitiva.

Essendo F una primitiva di f, si ha:

$$G(x) = F(x) + c$$

Cioè, posto $x = x_0$:

$$G(x_0) = F(x_0) + c$$

Ma, vista la definizione di $F(x)$ fornita prima, si ha:

$$F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0} f(t)dt = 0$$

Di conseguenza, siamo arrivati alla conclusione che:

$$c = G(x_0)$$

Portando c al primo membro:

$$G(x) - G(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

Il secondo teorema fondamentale del calcolo fornisce un primo metodo per calcolare qualche forma di integrale.
Partiamo dalla definizione:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Dalla formula $\frac{d}{dx}x^{n+1} = (n+1)x^n$ deduciamo che $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right) = x^n$.

Quindi:

$$\int_a^b x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}|_a^b = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$$

In questo modo, posso calcolare l'integrale di qualsiasi polinomio:

$$\int_1^2 (6x^2 + 2x - 3)dx = 6\int_1^2 x^2 dx + 2\int_1^2 xdx - 3\int_1^2 dx =$$

$$= 6\frac{1}{3}x^3|_1^2 + 2\frac{1}{2}x^2|_1^2 - 3(2-1) = 14$$

Integrale indefinito – Funzione primitiva

Se f è la derivata della funzione F, si dice che F è un **integrale indefinito** (o una **primitiva**) di f e si scrive:

$$\int f(t)dt = F(t) + c$$

Il motivo di questa scrittura è che due integrali indefiniti di f differiscono per una costante additiva (in quanto hanno uguale derivata): quindi, al variare della costante $c \in \mathbb{R}$ il secondo membro dell'equazione descrive tutti i possibili integrali indefiniti (o tutte le primitive) di f.

Inoltre:

$$\int f(t)dt = F(t) + c \iff \int_a^b f(t)dt = F(t)|_a^b$$

Nella definizione fornita, non compaiono gli estremi di integrazione: la formula è valida su ogni intervallo $[a, b]$ ove f è la derivata di F.

Funzione primitiva

Una funzione $F(x)$ definita e derivabile in $[a, b]$, si definisce **primitiva** della funzione $f(x)$, definita e continua in $[a, b]$, se risulta che:

$$F'(x) = f(x), \qquad \forall x \in [a, b]$$

Osservazione.
Se $F(x)$ è una primitiva della funzione $f(x)$ (cioè $F'(x) = f(x)$), allora $F(x) + c$ è ancora una prmitiva di $f(x), \forall c \in \mathbb{R}$ e viceversa (infatti: $(F(x) + c)' = f(x), \forall c \in \mathbb{R}$)

$$\Downarrow$$

Se $F(x)$ è una primitiva di f, tutte le primitive di f si ottengono da F aggiungendovi una costante

Caratterizzazione delle primitive di una funzione

Se $F(x)$ e $G(x)$ sono due primitive di una stessa funzione f in un intervallo $[a, b]$

$$\Downarrow$$

Allora $F(x)$ e $G(x)$ differiscono per una costante, cioè:

$$F(x) = G(x) + c, \qquad \forall c \in \mathbb{R}$$

<u>Teorema: sommando una costante a una primitiva, si ha ancora una primitiva</u>

Sulla base di questo, deriva che se una funzione f ammette una primitiva, allora ne ha infinite

Se $F(x)$ e $G(x)$ sono per ipotesi due primitive di una stessa funzione f vuol dire che per ipotesi vale che:

$$F'(x) = f(x), \forall x \in [a, b]$$

$$G'(x) = f(x), \forall x \in [a, b]$$

Da ciò segue immediatamente che la derivata della differenza fra F e G è:

$$D\big(F(x) - G(x)\big) = F' - G' = f(x) - f(x) = 0, \forall x \in [a, b]$$

$$\Rightarrow \quad \big(F(x) - G(x)\big) = costante$$

Esempio. Calcolare la primitiva delle seguenti funzioni

$f(x) = x$

$F(x) = \frac{x^2}{2}$, infatti $F'(x) = \frac{1}{2}2x = x = f(x)$

D'altra parte, anche $F(x) = \frac{x^2}{2} + 1$ è una primitiva della funzione $f(x) = x$

Dato il teorema sulla somma di una costante a una funzione primitiva, scriveremo:

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + c$$

$f(x) = e^x$

$F(x) = e^x + c \rightarrow$ infatti $F'(x) = e^x = f(x)$

$f(x) = \frac{1}{x}$

$F(x) = \ln x + c \rightarrow$ infatti $F'(x) = \frac{1}{x} = f(x)$

$f(x) = x^3$

$F(x) = \frac{1}{4}x^4 + c$, infatti $F'(x) = \frac{1}{4}4x^{4-1} = x^3 = f(x)$

$f(x) = \frac{1}{x^2}$

$F(x) = -\frac{1}{x} + c$, infatti $F'(x) = +x^{-1-1} = x^{-2} = f(x)$

$$F(x) = G(x) + c, \qquad \forall c \in \mathbb{R}$$

<u>Teorema: sommando una costante a una primitiva, si ha ancora una primitiva</u>

Sulla base di questo, deriva che se una funzione f ammette una primitiva, allora ne ha infinite

L'insieme delle funzioni $G(x) + c, \forall c \in \mathbb{R}$ rappresenta tutte e sole le funzioni la cui derivata è $f(x)$ e prende il nome di integrale indefinito di f, che si rappresenta con il seguente simbolo:

$$\int f(x)\, dx$$

Per definizione:

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c \iff F'(x) = f(x)$$

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c \;\Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

Gli integrali indefiniti hanno proprietà che derivano dal fatto che la derivata è un operatore lineare, ovvero che $D[c_1 \cdot f_1(x) + c_2 \cdot f_2(x)] = c_1 \cdot f_1'(x) + c_2 \cdot f_2'(x)$.

Ciò si riflette sugli integrali indefiniti nelle seguenti proprietà:

- L'integrale del prodotto di una costante per una funzione è uguale al prodotto fra la costante e l'integrale della funzione. Una costante moltiplicativa $k \in \mathbb{R}$ si può quindi portare dentro o fuori il segno di integrale:

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$$

- L'integrale della somma di due o più funzioni è uguale alla somma degli integrali di ogni funzione:

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$$

- Mettendo insieme le due proprietà precedenti vediamo che l'integrale indefinito è un operatore lineare → l'integrale di una combinazione lineare di funzioni è la combinazione lineare dei loro integrali: per ogni k_1 e k_2 costanti reali e per ogni funzione f_1 ed f_2 vale:

$$\int [k_1 \cdot f_1(x) + k_2 \cdot f_2(x)]dx = k_1 \int f_1(x)dx + k_2 \int f_2(x)dx$$

Esempio: calcolo dell'integrale di un polinomio

$$f(x) = 10x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 3$$

$$\int f(x)dx = \int [10x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 3]dx = 10\int x^4 dx + 4\int x^3 dx + 5\int x^2 dx + 3\int dx$$

$10 \int x^4 dx = 10 \cdot \left[\frac{x^5}{5} + c_1\right] = 2x^5 + c_1$

$4 \int x^3 dx = 4 \cdot \left[\frac{x^4}{4} + c_2\right] = x^4 + c_2$

$5 \int x^2 dx = 5 \cdot \left[\frac{x^3}{3} + c_3\right] = \frac{5}{3}x^3 + c_3$

$3 \int dx = 3 \int x^0 dx = 3 \cdot \left[\frac{x^1}{1} + c_4\right] = 3x + c_4$

Sommando i termini (e indicando con una generica c tutte le costanti):

$$\int f(x)dx = \int [10x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 3]dx = 2x^5 + x^4 + \frac{5}{3}x^3 + 3x + c$$

L'integrale indefinito di una funzione $f(x)$ è costituito da tutte le sue primitive, ovvero da tutte quelle funzioni che, derivate, restituiscono proprio f.

Tabella riassuntiva delle primitive più comuni:

1. Primitive di funzioni: costante, potenza, radice
2. Primitive di funzioni trigonometriche
3. Primitive di funzioni esponenziali e logaritmiche

Funzioni costanti, potenze (con esponente naturale o reale) e radici

Funzione $f(x)$	**Integrale indefinito $\int f(x)dx$**
$k\ (funzione\ costante)$	$\int dx = \int kdx = kx + c$
x	$\int xdx = \frac{1}{2}x^2 + c$
$x^\alpha, \quad con\ \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$	$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + c$
$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + c$

L'integrale indefinito di una funzione $f(x)$ è costituito da tutte le sue primitive, ovvero da tutte quelle fuzioni che, derivate, restituiscono proprio f.

Tabella riassuntiva delle primitive più comuni:

1. Primitive di funzioni: costante, potenza, radice
2. Primitive di funzioni trigonometriche
3. Primitive di funzioni esponenziali e logaritmiche

Funzioni irrazionali (del tipo $f(x) = \sqrt[n]{x}$)

Possono essere trasformate in potenze a esponente frazionario: $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, ricadendo così nel caso precedente delle potenze (la formula fornita vale per α numero reale).

Esempi:

$$\int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$$

$$x^{\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{1}{\frac{1}{2}+1} \cdot x^{\frac{1}{2}+1}$$

$$\frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} x^{3/2}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = 2\sqrt{x} + c$$

L'integrale indefinito di una funzione $f(x)$ è costituito da tutte le sue primitive, ovvero da tutte quelle fuzioni che, derivate, restituiscono proprio f.

Tabella riassuntiva delle primitive più comuni:

1. Primitive di funzioni: costante, potenza, radice
2. Primitive di funzioni trigonometriche
3. Primitive di funzioni esponenziali e logaritmiche

Funzioni trigonometriche

Funzione $\boldsymbol{f(x)}$	**Integrale indefinito $\boldsymbol{\int f(x)dx}$**
$\sin x$	$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$
$\cos x$	$\int \cos x \, dx = \sin x + c$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} = \cot x + c$
$\tan x$	$\int \tan x \, dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + c$
$\cot x$	$\int \cot x \, dx = -\ln\lvert\sin x\rvert + c$

L'integrale indefinito di una funzione $f(x)$ è costituito da tutte le sue primitive, ovvero da tutte quelle fuzioni che, derivate, restituiscono proprio f.
Tabella riassuntiva delle primitive più comuni:

1. Primitive di funzioni: costante, potenza, radice
2. Primitive di funzioni trigonometriche
3. Primitive di funzioni esponenziali e logaritmiche

Funzioni esponenziali e logaritmiche

Funzione $\boldsymbol{f(x)}$	**Integrale indefinito $\boldsymbol{\int f(x)dx}$**
e^x	$\int e^x dx = e^x + c$
$a^x, con\ a \in \mathbb{R}, a \neq 1$	$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + c = a^x \log_a e + c$

Integrazione per parti

$$\int_a^x \frac{d}{dx} f\, dx = f(x) - f(a) = f\Big|_a^x$$

I teoremi fondamentali del calcolo integrale ci dicono che da formule di derivazione si possono dedurre formule di integrazione.
Ricordiamo la regola per la derivata del prodotto:

$$\frac{d(fg)}{dt} = \frac{df}{dt} g + f \frac{dg}{dt}$$

Se integriamo questa formula sull'intervallo $[a, x]$ e ricordiamo il secondo teorema fondamentale del calcolo, otteniamo:

$$fg|_a^x = \int_a^x \frac{df}{dt}(t) g(t) dt + \int_a^x f(t) \frac{dg}{dt}(t) dt$$

O anche:

$$\int_a^x f(t) \frac{dg}{dt}(t) dt = fg|_a^x - \int_a^x \frac{df}{dt}(t) g(t) dt$$

$$\int \underset{f}{x^4} \cdot \underset{g'}{\frac{1}{x}} = x^4 \cdot \ln(x) - \int 4x^3 \cdot \ln(x)$$

$$\int_a^x f(t)\frac{dg}{dt}(t)dt = fg|_a^x - \int_a^x \frac{df}{dt}(t)g(t)dt$$

Usando la notazione di integrale indefinito, possiamo esprimere questa formula nel modo seguente:

$$\int fg'dt = fg - \int f'gdt$$

[possiamo tralasciare la costante arbitraria c *perché abbiamo un integrale indefinito in entrambi i membri dell'uguaglianza]*

Questa formula prende il nome di **integrazione per parti**: permette di ricondurre l'integrale di fg' all'integrale di $f'g$, nel caso questo sia più semplice da calcolare.

$\int f g' dt = fg - \int f' g \, dt$ $\int t \cdot \sin t \, dt$ $\int f \cdot g' dt$

Esempio.
Calcolare l'integrale di $t \cdot \sin t$. Dal momento che la derivata di t è particolarmente semplice, poniamo:

$$f(t) = t, \qquad g'(t) = \sin t \;\Rightarrow f'(t) = 1, \qquad g(t) = -\cos t$$

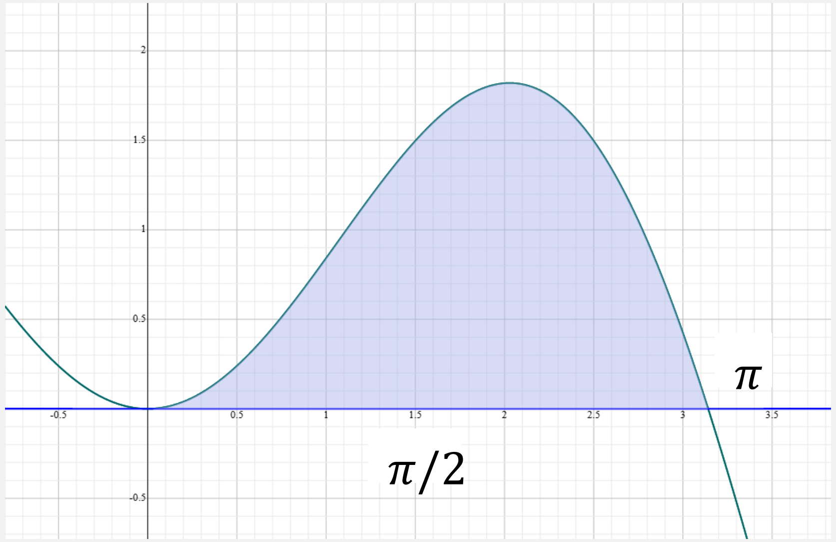
Quindi la formula di integrazione per parti ci dà:

$t \cdot (-\cos t)$ $1 \cdot$

$$\int t \sin t \;\, dt = -t \cos t - \int (-\cos t) = -t \cos t + \sin t + c$$

Per esempio:

$$\int_0^{\pi} t \sin t \, dt = (-t \cos t + \sin t)|_0^{\pi}$$
$$= -\pi \cos \pi + \sin \pi - (-0 \cos 0 + \sin 0) = \pi$$



$$\int f g' dt = fg - \int f' g dt$$

Integrazione per parti – alcuni casi

$$\int fg'dt = fg - \int f'gdt$$

Prodotto di un polinomio per una funzione trigonometrica.

Sia $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione polinomiale e sia $\alpha \neq 0$:

$$\int_a^b P(x)\sin(\alpha x)\,dx \quad \text{oppure} \quad \int_a^b P(x)\cos(\alpha x)\,dx$$

Applichiamo la formula di integrazione per parti con le scelte:

$$\begin{cases} f' \leftrightarrow \sin(\alpha x) \quad oppure \quad f' \leftrightarrow \cos(\alpha x) \\ \qquad\qquad g \leftrightarrow P(x) \end{cases}$$

Cioè <u>integriamo la funzione trigonometrica e deriviamo il polinomio</u>

Integrazione per parti – alcuni casi

$$\int fg'dt = fg - \int f'gdt$$

Prodotto di un polinomio per una funzione esponenziale.

Sia $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione polinomiale e sia $\alpha \neq 0$:

$$\int_a^b P(x)\, e^{\alpha x} dx$$

Applichiamo la formula di integrazione per parti con le scelte:

$$\begin{cases} f' \leftrightarrow e^{\alpha x} \\ g \leftrightarrow P(x) \end{cases}$$

Cioè <u>integriamo la funzione esponenziale e deriviamo il polinomio</u>

Integrazione per parti – alcuni casi

$$\int fg'dt = fg - \int f'gdt$$

Prodotto di un polinomio per una funzione logaritmica.

Sia $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione polinomiale e sia $\alpha \neq 0$, siano $0 < a < b$:

$$\int_a^b P(x) \ln(\alpha x)\, dx$$

Applichiamo la formula di integrazione per parti con le scelte:

$$\begin{cases} f' \leftrightarrow P(x) \\ g \leftrightarrow \ln(\alpha x) \end{cases}$$

Cioè <u>integriamo il polinomio e deriviamo la funzione logaritmica</u>

$$\int x \ln(x) dx$$

si risolve con il metodo di integrazione per parti.

Osserviamo che l'integranda è prodotto di due funzioni che sono rispettivamente la funzione identità $y = x$ e la funzione logaritmica $y = \ln(x)$.

Per utilizzare la formula di integrazione per parti

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

dobbiamo intuire quale termine svolge il ruolo di fattore finito $f(x)$ e quale il ruolo di fattore differenziale $g'(x)$.

Una buona regola per comprendere in che modo scegliere $f(x)$ e $g'(x)$ consiste nel ragionare come segue: $f(x)$ deve essere una funzione facile da derivare, mentre $g'(x)$ deve essere facile da integrare.

Calcoliamo la derivata del logaritmo e l'integrale di x

$$f(x) = \ln(x) \implies f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = x \implies g(x) = \frac{x^2}{2} \rightarrow \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

e sostituiamo ordinatamente le funzioni ottenute nella formula di integrazione per parti

$$\int x \ln(x) dx = \frac{x^2}{2} \ln(x) - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{1}{2} \int x dx =$$

$\int x dx$ è un integrale immediato pertanto la precedente espressione diventa

$$= \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + c =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{1}{4} x^2 + c$$

$$\int xe^x dx$$

Notiamo subito che l'integranda è il prodotto di due funzioni: la funzione identità $y = x$ e la funzione esponenziale $y = e^x$ e quando compare un prodotto, l'integrazione per parti si candida subito come metodo risolutivo.

Sia la funzione esponenziale che la funzione identità sono ottimi candidati per diventare $f(x)$, in tal caso però è opportuno scegliere $f(x) = x$ e $g'(x) = e^x$.

Osserviamo infatti che

$$\int fg'\,dx = fg - \int f'g\,dx$$

$$f(x) = x \implies f'(x) = 1$$

$$g'(x) = e^x \implies g(x) = e^x$$

e grazie alla formula di integrazione per parti

$$\int \overset{f\cdot g'}{xe^x}\,dx = \overset{fg}{xe^x} - \int \overset{f'g}{1\,e^x}\,dx =$$

$$= xe^x - e^x + c$$

dove c è una costante reale.

$$\int 2xe^{-x}\ \mathrm{d}x \ = 2\int xe^{-x}\ \mathrm{d}x$$

conviene scegliere $\begin{cases} f'(x) = e^{-x} \\ g(x) = x \end{cases} \implies \begin{cases} f(x) = -e^{-x} \\ g'(x) = 1 \end{cases}$

Dunque:

$$2\int xe^{-x}\ \mathrm{d}x \ = 2\left(\overset{x\cdot(-e^{-x})}{-x\cdot e^{-x}} - \overset{1\cdot}{\int}(-e^{-x})\ \mathrm{d}x\right) = 2(-x\cdot e^{-x} - e^{-x}) + c = -2e^{-x}(x+1) + c.$$

$$\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx.$$

$f = x^2 \to f' = 2x$

$g' = \sin x \to g \to -\cos x$

$$\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx = \underbrace{x^2}_{f}(\underbrace{-\cos x}_{g}) - \int \underbrace{2x}_{f'}(\underbrace{-\cos x}_{g}) \, dx$$

Integriamo per parti l'ultimo integrale ottenuto.

$$\int \underbrace{2x}_{u} \underbrace{\cos x}_{v'} \, dx = \underbrace{2x}_{u} \underbrace{\operatorname{sen} x}_{v} - \int \underbrace{2}_{u'} \underbrace{\operatorname{sen} x}_{v} \, dx = 2x \operatorname{sen} x - 2(-\cos x) + c$$

Infine, tornando all'espressione di partenza possiamo scrivere:

$$\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx = -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + c$$

$$(f\cdot g)' = f'g + fg'$$

Integrazione per sostituzione

Siano $f(x)$ una funzione integrabile e $g(x)$ una funzione derivabile e strettamente monotona su uno stesso intervallo. Allora:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(y)dy\,|_{y=g(x)} = F(g(x)) + c$$

Dimostrazione. Indichiamo con $F(x)$ una primitiva di $f(x)$ (cioè $F' = f$). Basta verificare che:

$$\left(F(g(x))\right)' = f(g(x))g'(x)$$

Ma questo è già certo per la regola della derivazione di funzioni composte:

$$\left(F(g(x))\right)' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$$

$$(f\circ g)' = f'(g)\cdot g'$$

$$\left(\left(\underbrace{x^2+1}_{y}\right)^3\right)' = 3(x^2+1)^2\cdot 2x$$

$$3y^2\cdot 2x, \quad y = x^2+1$$

Integrazione per sostituzione

Integrale per sostituzione per integrali indefiniti:

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)dx = \int f(y)dy\,|_{y=g(x)}$$

Integrale per sostituzione per integrali definiti:
Siano $f(x)$ una funzione integrabile e $g(x)$ una funzione derivabile e strettamente monotona su (a,b).
Allora:

$$\int_a^b f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy \quad , \; y=g(x)$$

$f(g)\cdot g'$

Esempio.

$$\int 2x \sin(x^2)\, dx$$

La funzione sin è composta con x^2.
Effettuando la sostituzione $g(x) = x^2$, si ha $g'(x) = 2x$. Dunque la formula di integrazione per sostituzione afferma che:

$$\int 2x \sin(x^2)\, dx = \int \sin y \, dy\big|_{y=x^2} = -\cos y\,\big|_{y=x^2} + c = -\cos(x^2) + c$$

$f'(g)\cdot g'$

$\sin(x^2)\cdot 2x$

Esempio.

$$\int \cos x \sin^2 x\, dx$$

La funzione y^2 è composta con $\sin x$.
Effettuando la sostituzione $g(x) = \sin x$, si ha $g'(x) = \cos x$. Dunque la formula di integrazione per sostituzione afferma che:

$$\int \cos x \sin^2 x\, dx = \int y^2 dy\big|_{y=\sin x} = \frac{1}{3} y^3\big|_{y=\sin x} + c = \frac{1}{3}\sin^3 x + c$$

Esempio.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+\pi)\,dx$$

Facciamo la sostituzione $\overset{g(x)}{y} = x + \pi$, da cui $dy = (x+\pi)'dx = dx$.
Gli estremi di integrazione diventano:

$$x = -\frac{\pi}{2} \rightarrow y = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2} \qquad x = \frac{\pi}{2} \rightarrow y = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3}{2}\pi$$

Pertanto:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+\pi)\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin(y)\,dy$$

Da cui segue facilmente:

$$= \cos y \,\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} = 0 - 0 = 0$$

Da questo esempio, traiamo un'indicazione generale:

$$\boxed{\int_a^b f(x+c)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(y)\,dy}$$

Esempio.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+4x^2}\,dx$$

Facciamo la sostituzione $y = 2x$, da cui $dy = (2x)'dx = 2dx$.
Gli estremi di integrazione diventano:

$$x = 0 \rightarrow y = 2 \cdot 0 = 0 \qquad x = \frac{1}{2} \rightarrow y = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Pertanto:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+4x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+4x^2}\,2dx = \frac{1}{2}\int_0^{1} \frac{1}{1+y^2}\,dy$$

Da cui segue facilmente:

$$= \frac{1}{2}\arctan y\,|_0^1 = \frac{1}{2}(\arctan 1 - \arctan 0) = \frac{\pi}{8}$$

Da questo esempio, traiamo un'indicazione generale:

$$\boxed{\int_a^b f(\lambda x)\,dx = \frac{1}{\lambda}\int_{\lambda a}^{\lambda b} f(y)\,dy}$$

Importanza dell'integrale in Fisica: cinematica

In un moto rettilineo sappiamo che, se $s(t)$ è la posizione, cioè l'ascissa di un punto materiale all'istante t, allora la velocità el'accelerazione del punto in quell'istante sono:

$$v(t) = s'(t) \quad \text{velocità;}$$

$$a(t) = v'(t) = s''(t) \quad \text{accelerazione.}$$

Quindi possiamo dedurre che la velocità $v(t)$ è una primitiva dell'accelerazione $a(t)$ e che la posizione $s(t)$ è una primitiva della velocità $v(t)$. Pertanto, notal'accelerazione in funzione del tempo t, per determinare la velocità e la legge del moto, basta integrare successivamente $a(t)$ applicando il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$v(t) - v(t_0) = \int_{t_0}^{t} a(z)dz \quad \rightarrow \quad v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(z)dz$$

$$s(t) - s(t_0) = \int_{t_0}^{t} v(z)dz \quad \rightarrow s(t) = s(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(z)dz$$

Importanza dell'integrale in Fisica: lavoro di una forza

- In generale il lavoro *dipende dalla traiettoria* seguita dal punto

- Matematicamente il lavoro è è un *integrale di linea*, ovvero il limite della somma di tanti contributi $\Delta L = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$ piccoli, calcolati lungo la traiettoria.

- Nell'esempio accanto, il calcolo e l'interpretazione geometrica del lavoro $L = \int_{x_i}^{x_f} F(x)dx$ per una forza $F(x)$ in un caso unidimensionale.