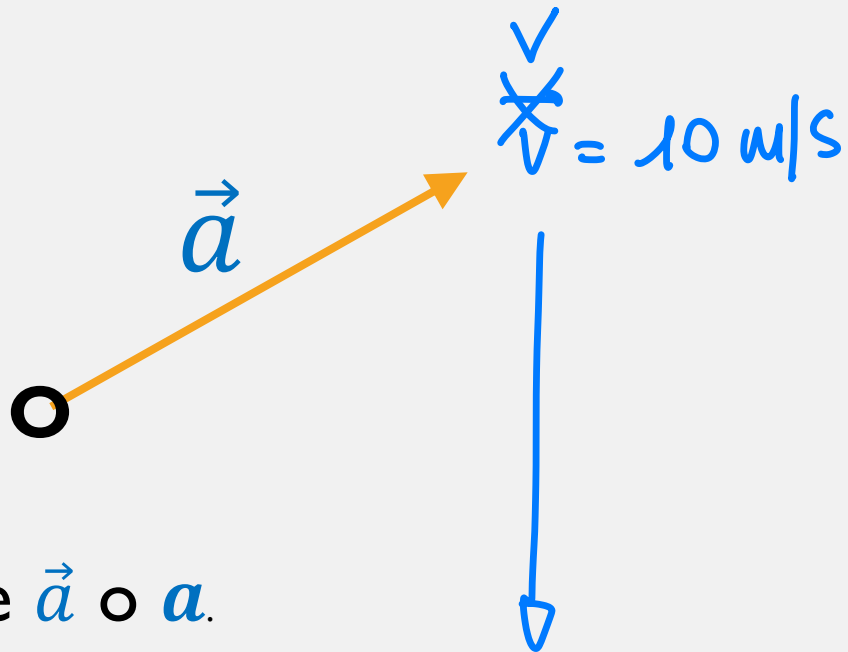


# CINEMATICA pt. I

- Vettori
- Vettori posizione, spostamento, velocità e accelerazione
- Relazioni grafiche: posizione-velocità e velocità-accelerazione
- Esempi



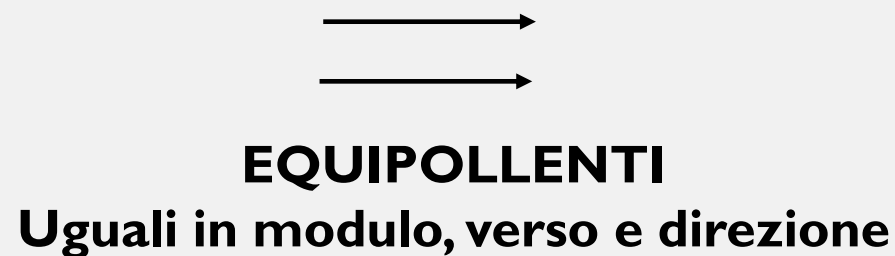
# I VETTORI



Vettore  $\vec{a}$  o  $a$ .

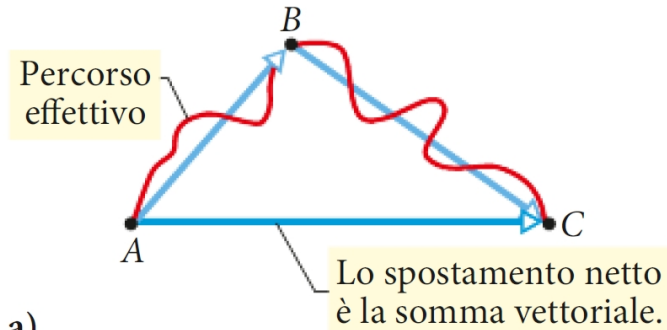
Il modulo del vettore è  $|\vec{a}| = a$  e graficamente corrisponde alla lunghezza della freccia.

L'origine del vettore è il punto ○.

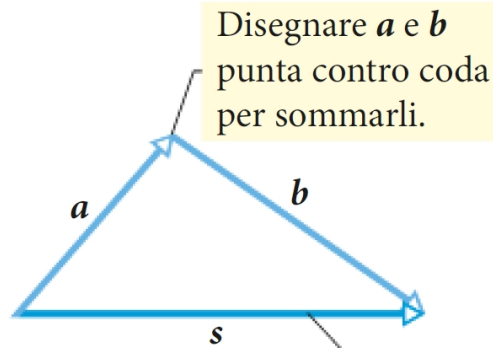


# OPERAZIONI TRA VETTORI

## Somma tra vettori

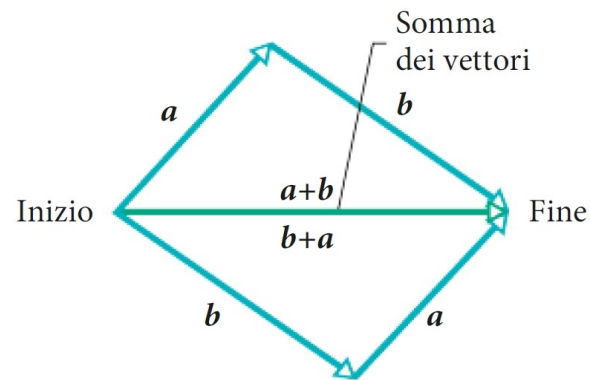


a)

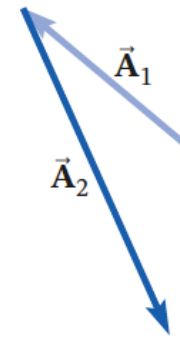


Il vettore risultante va dalla coda di  $a$  alla punta di  $b$ .

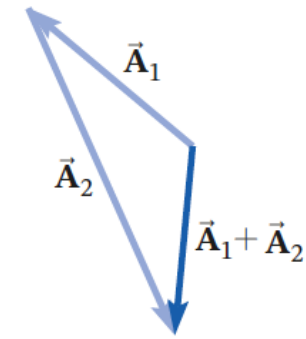
b)



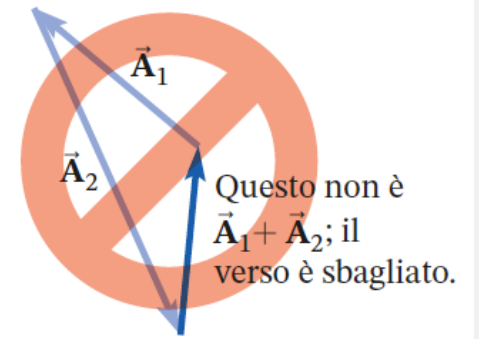
Il vettore risultante dalla somma non dipende dall'ordine dei vettori addendi.



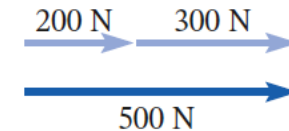
(b)



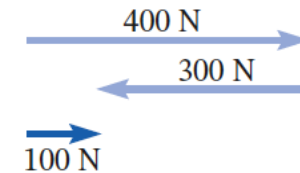
(c)



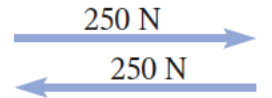
(d)



(a)



(b)



La somma è nulla

(c)

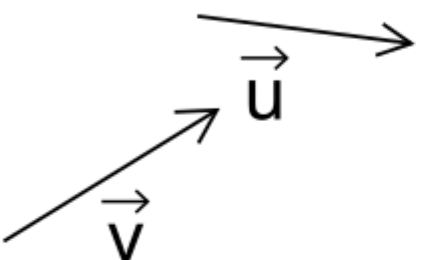
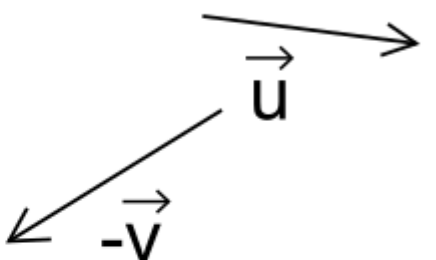
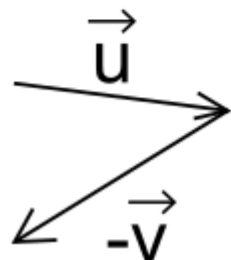
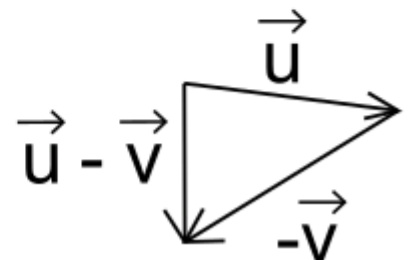
$$400 - 300$$

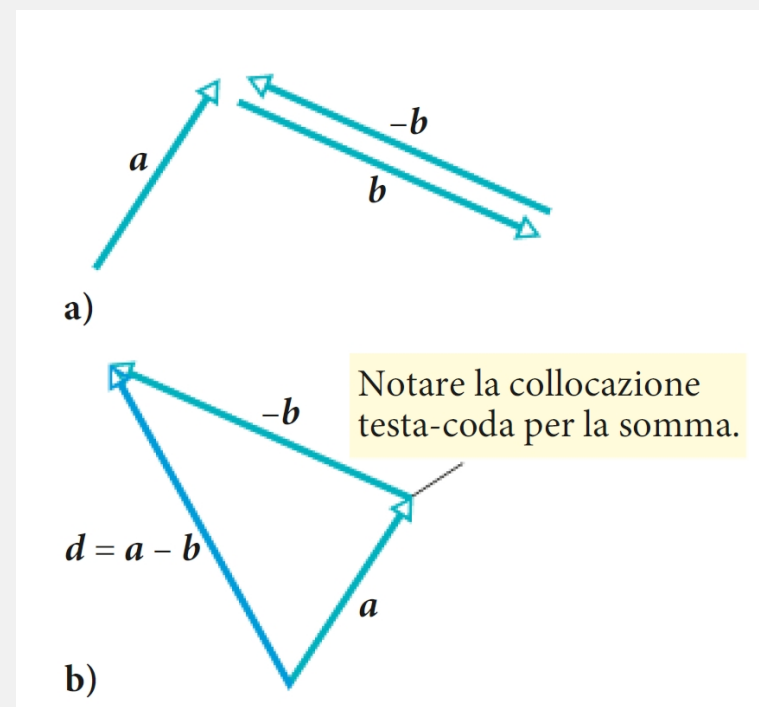
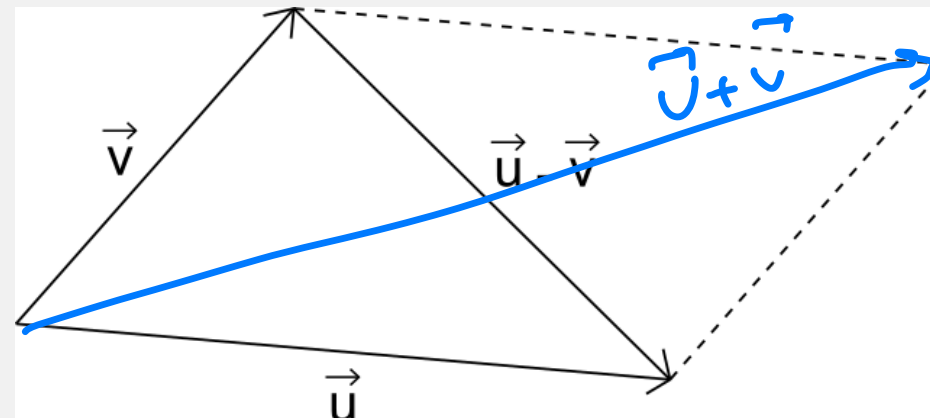
$$250 - 250$$

# OPERAZIONI TRA VETTORI

$$\vec{u} - \vec{v}$$

## Differenza tra vettori

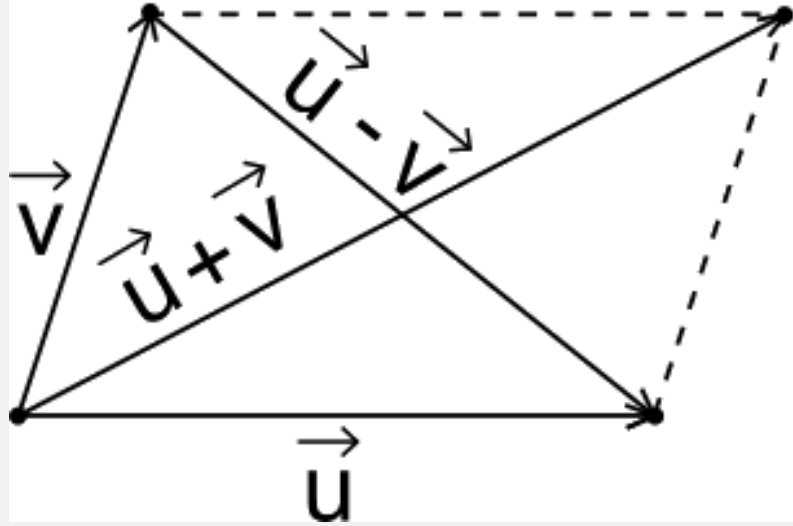
<p>Vettori da sottrarre</p> 	<p>Opposto del vettore <math>\vec{v}</math></p> 
<p>Traslazione del vettore <math>-\vec{v}</math></p> 	<p>Metodo punta coda</p> 



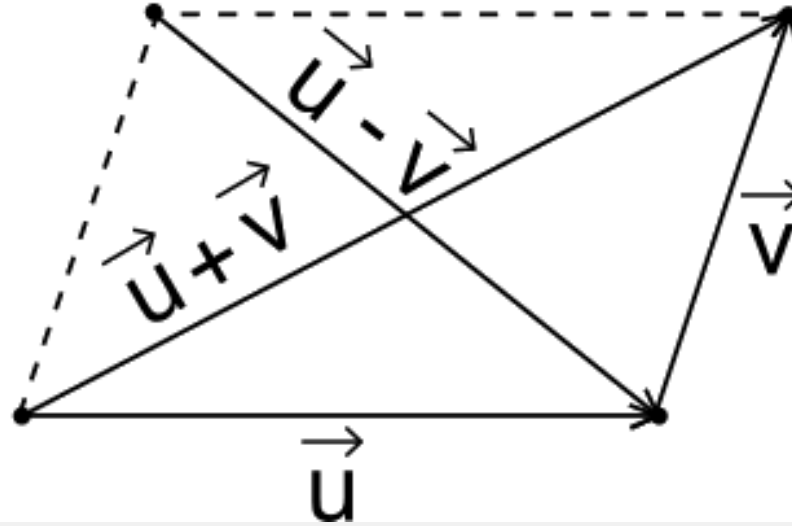
# OPERAZIONI TRA VETTORI

## Differenza tra vettori

Prima variante

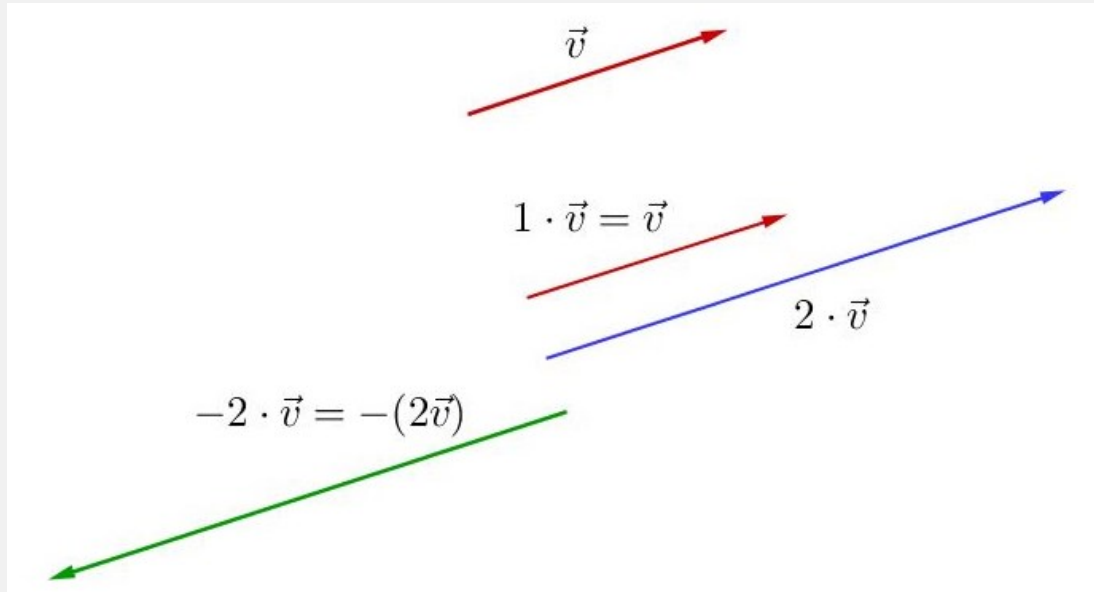


Seconda variante



# OPERAZIONI TRA VETTORI

## Prodotto tra vettore e scalare



Il vettore  $\vec{v}$  ha

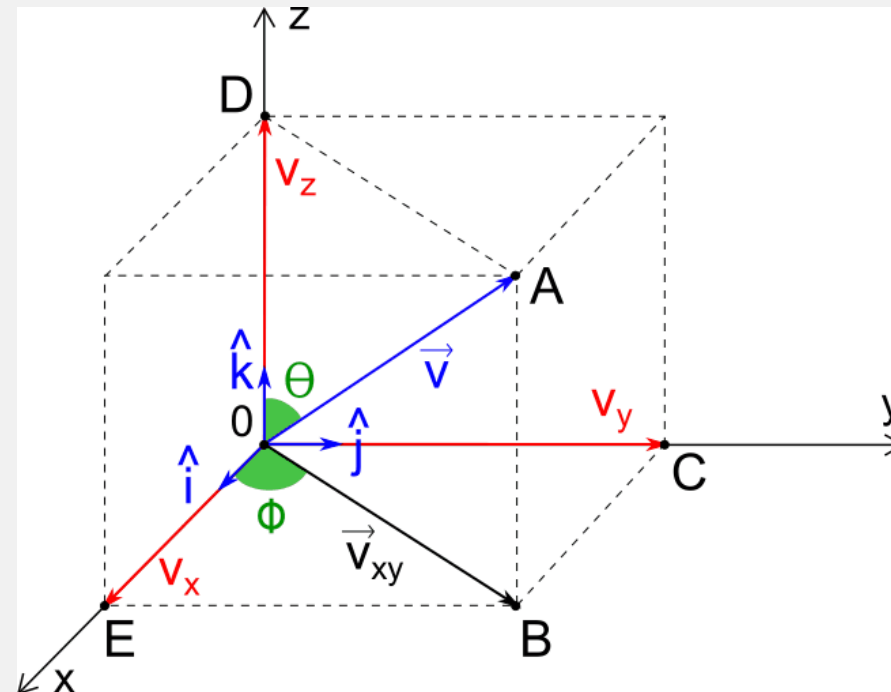
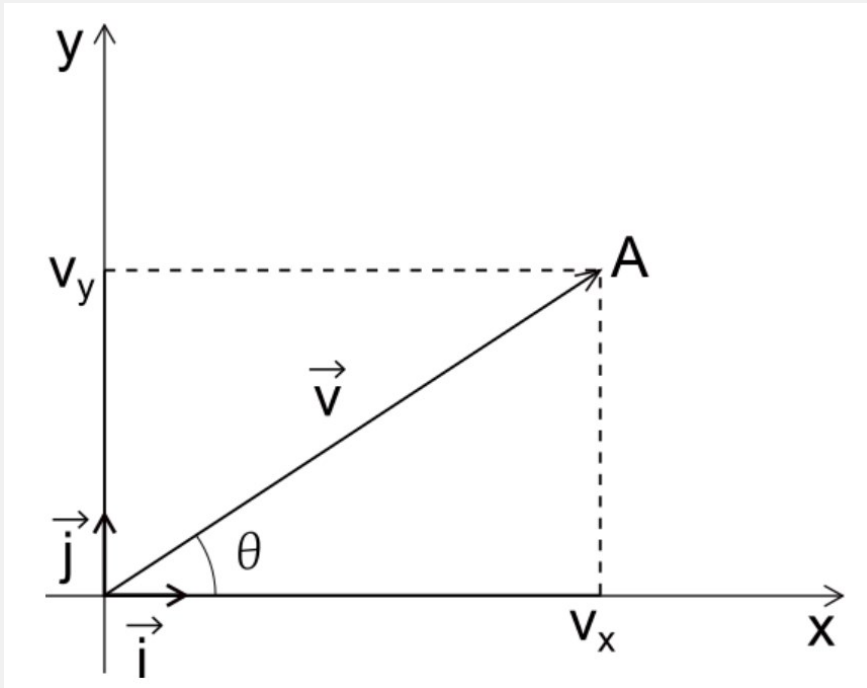
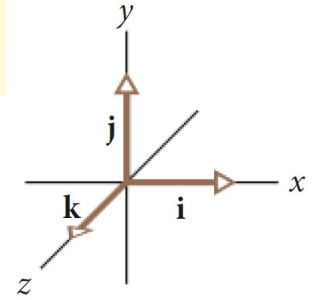
- la **stessa direzione** di  $\vec{u}$
- lo **stesso verso** di  $\vec{u}$  se  $k > 0$ , **verso opposto** se  $k < 0$
- modulo  $k|\vec{u}| = ku$

# OPERAZIONI TRA VETTORI

## Vettori componenti / Proiezioni su x e y

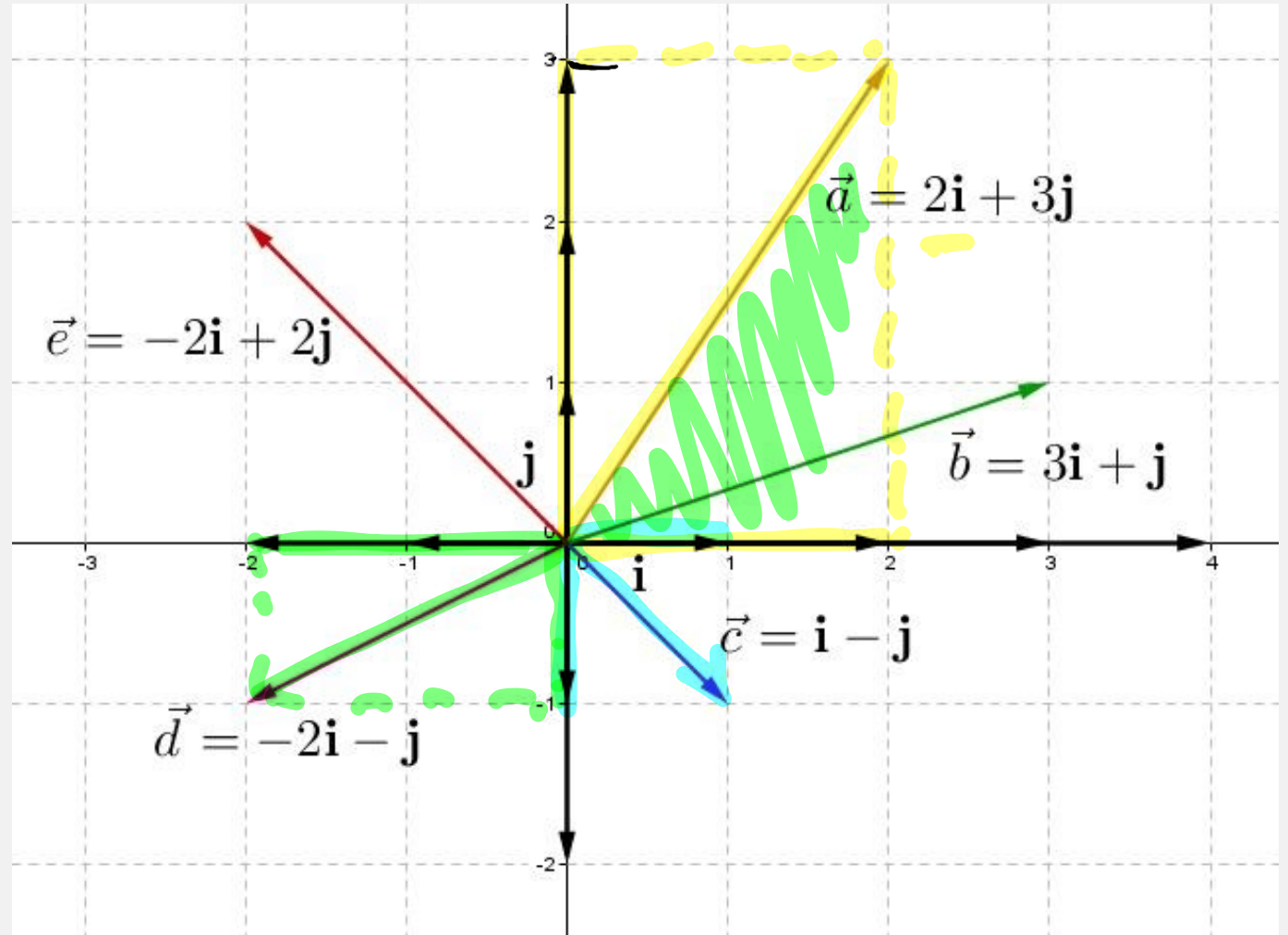
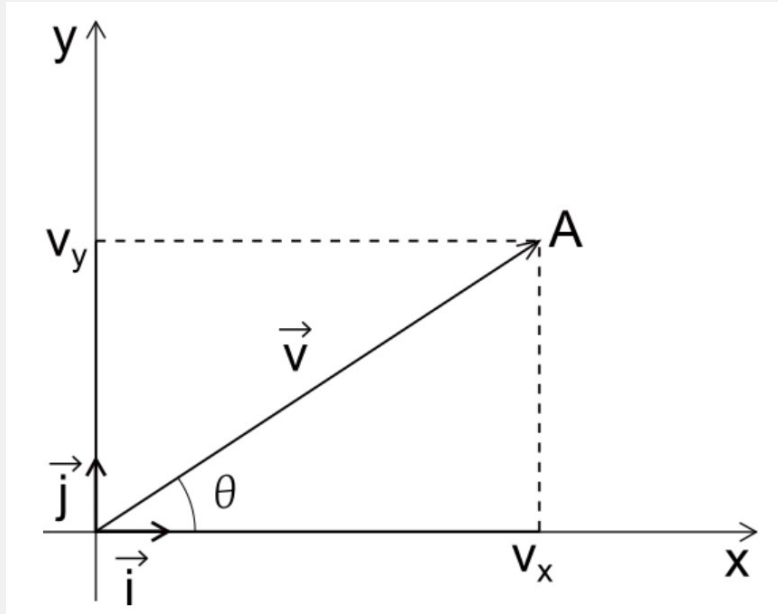
VERSORI  $\hat{i}$   $\hat{j}$

I versori sono diretti come gli assi.



# OPERAZIONI TRA VETTORI

## Vettori componenti / Proiezioni su x e y

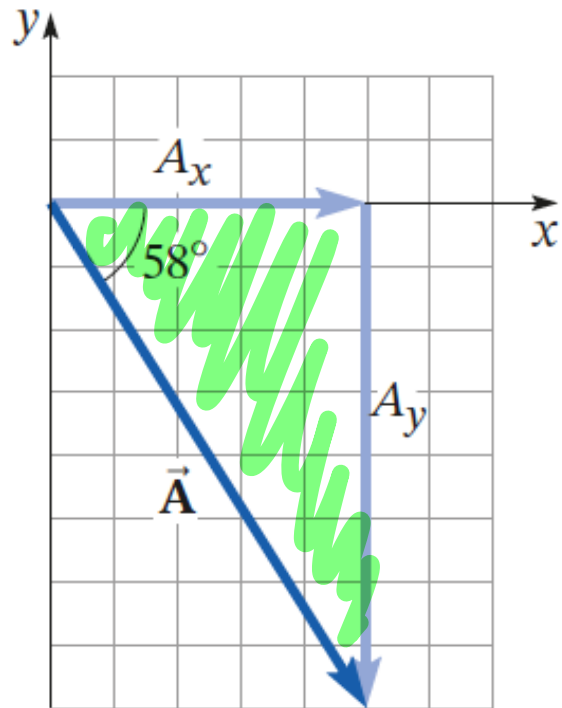




# OPERAZIONI TRA VETTORI

## Vettori componenti / Proiezioni su x e y

Pitagora



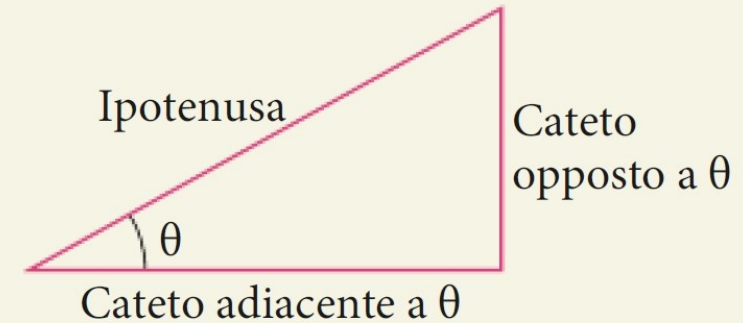
$$c. opp. = \text{ipot.} \cdot \sin \theta$$

$$c. ad. = \text{ipot.} \cdot \cos \theta$$

$$\sin \theta = \frac{\text{cateto opposto a } \theta}{\text{ipotenusa}}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{cateto adiacente a } \theta}{\text{ipotenusa}}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{cateto opposto a } \theta}{\text{cateto adiacente a } \theta}$$



$$\theta = \arctan \left( \frac{c. opp.}{c. ad.} \right)$$

# OPERAZIONI TRA VETTORI

## Algebra con le componenti

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$$

$$r_x = a_x + b_x$$

$$r_y = a_y + b_y$$

$$r_z = a_z + b_z$$

$\mathbf{r}$  è uguale al vettore  $(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ : se questo è vero, ogni componente di  $\mathbf{r}$  deve coincidere con la corrispondente componente di  $(\mathbf{a}+\mathbf{b})$

Due vettori sono uguali se le rispettive componenti sono tutte uguali fra loro

$$\mathbf{d} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) \longrightarrow d_x = a_x - b_x \quad d_y = a_y - b_y \quad d_z = a_z - b_z$$

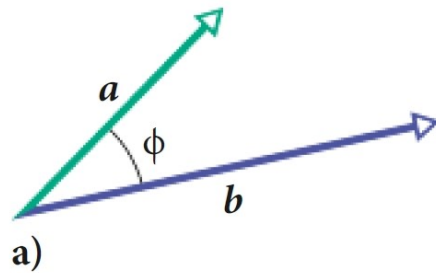
$$\mathbf{d} = d_x + d_y + d_z$$

dove

$$\vec{\mathbf{d}} = \underbrace{d_x}_{\vec{i}} + \underbrace{d_y}_{\vec{j}} + \underbrace{d_z}_{\vec{k}}$$

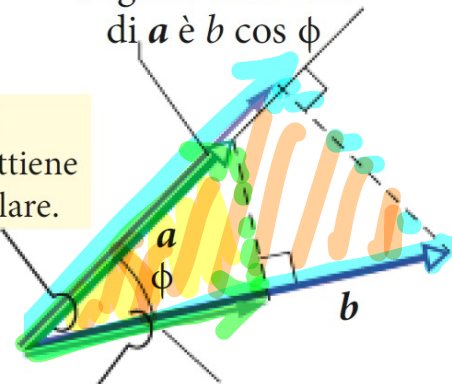
# OPERAZIONI TRA VETTORI

## Prodotto scalare



La componente di  $b$  lungo la direzione di  $a$  è  $b \cos \phi$

Moltiplicando questi due si ottiene il prodotto scalare.



La componente di  $a$  lungo la direzione di  $b$  è  $a \cos \phi$

Moltiplicando questi altri due si ottiene lo stesso prodotto.

b)

Prodotto scalare dei vettori  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  (« $\mathbf{a}$  scalare  $\mathbf{b}$ »):

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \phi$$

Tutti i termini a destra sono scalari, quindi il prodotto  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  è uno scalare!

Notazione dei versori:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \cdot (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k})$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

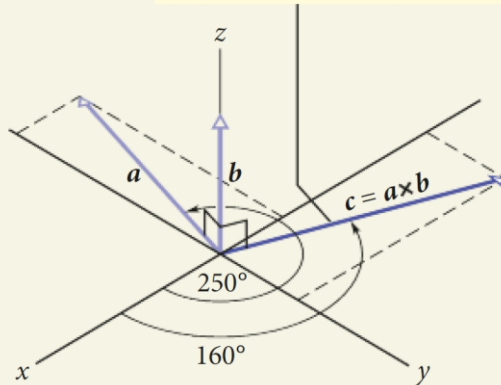
[proprietà distributiva]

# OPERAZIONI TRA VETTORI

## Prodotto vettoriale

$$\vec{a} \times \vec{b}$$

Questo è il vettore risultante, perpendicolare sia ad  $a$  sia a  $b$ .



Prodotto vettoriale dei vettori  $a$  e  $b$  (« $a$  vettore  $b$ »)  $\rightarrow$  vettore  $c$  il cui modulo è:

$$c = ab \sin \varphi$$

No proprietà commutativa:

$$a \times b \neq b \times a$$

Sì proprietà distributiva:

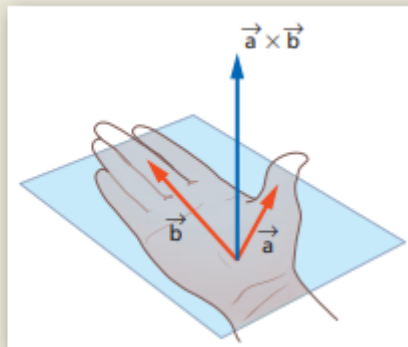
$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

### Prodotto vettoriale

Il prodotto vettoriale di due vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  è il vettore  $\vec{c}$  che ha:

- **modulo** uguale ad  $ab \sin \alpha$ ;
- **direzione** perpendicolare al piano individuato dai due vettori;
- **verso** dato dalla regola della mano destra, illustrata nella figura.

Si indica con  $\vec{a} \times \vec{b}$ .

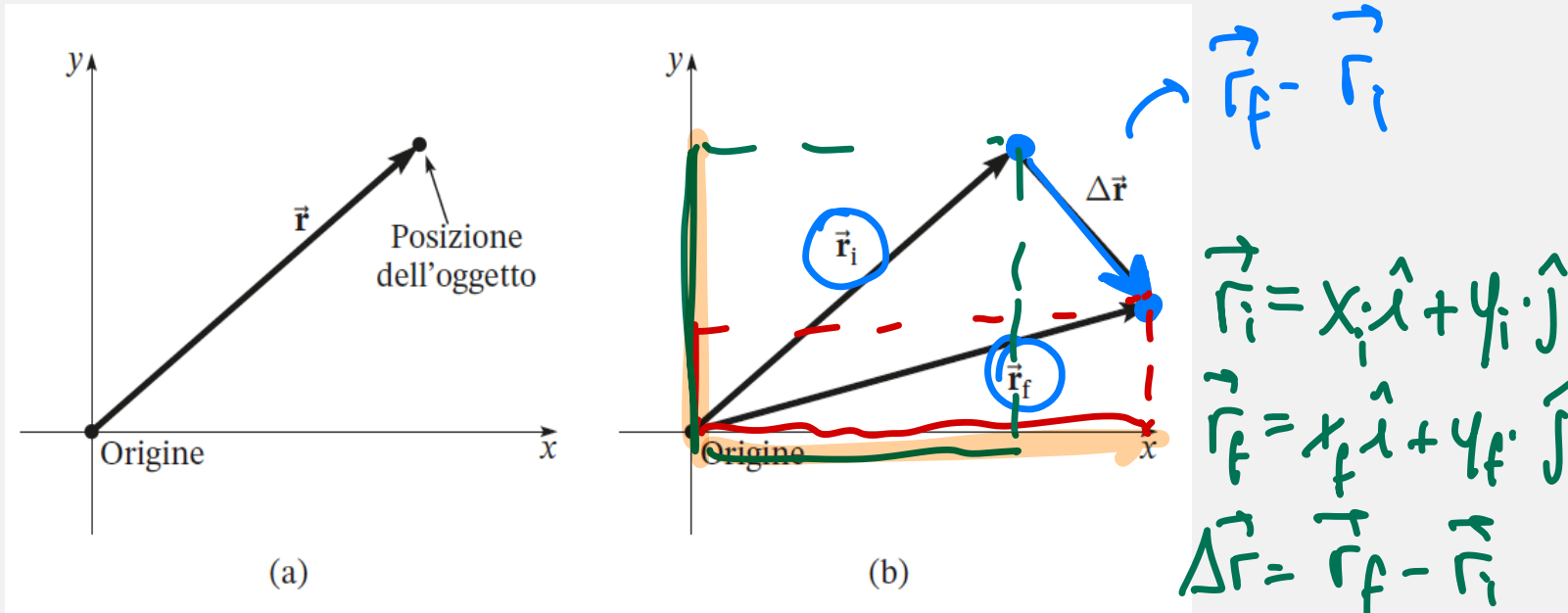


$$\text{Con } a \parallel b \rightarrow a \times b = 0$$

$$\text{Con } a \perp b \rightarrow |a \times b| = \max$$

# VETTORI POSIZIONE SPOSTAMENTO, VELOCITÀ E ACCELERAZIONE

## Vettore posizione – Vettore spostamento

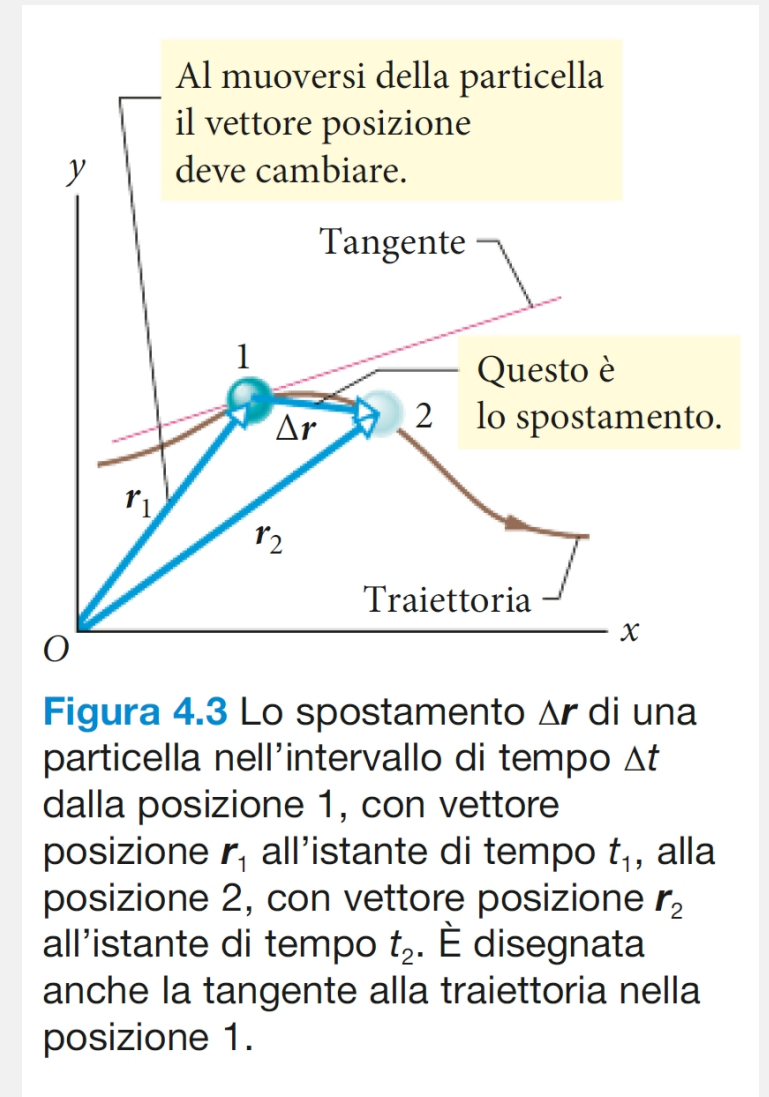


$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

Vettore posizione

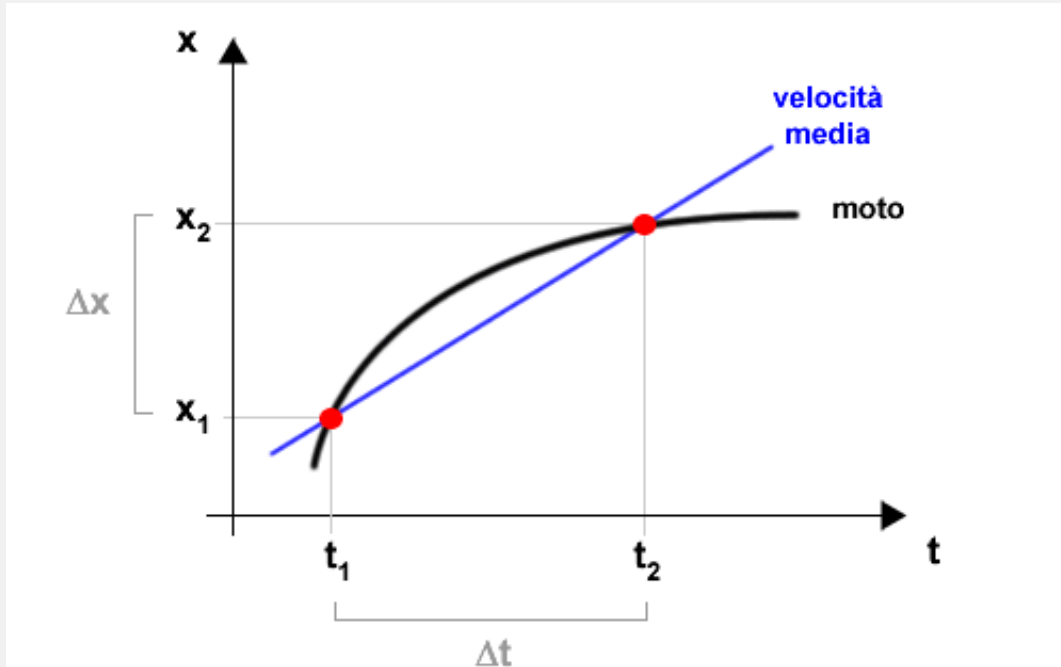
$$\Delta \vec{r} = (x_f - x_i) \cdot \hat{i} + (y_f - y_i) \cdot \hat{j} = \Delta x \cdot \hat{i} + \Delta y \cdot \hat{j}$$

Vettore spostamento



# VETTORI POSIZIONE SPOSTAMENTO, VELOCITÀ E ACCELERAZIONE

## Vettore velocità media



↑  
intervals

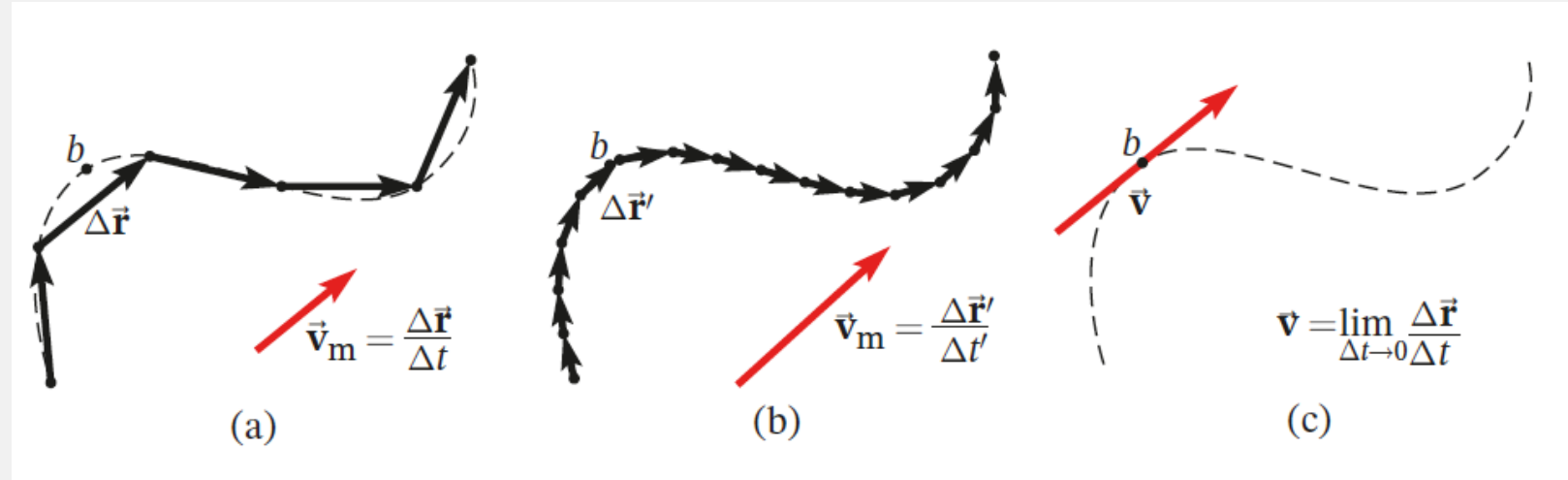
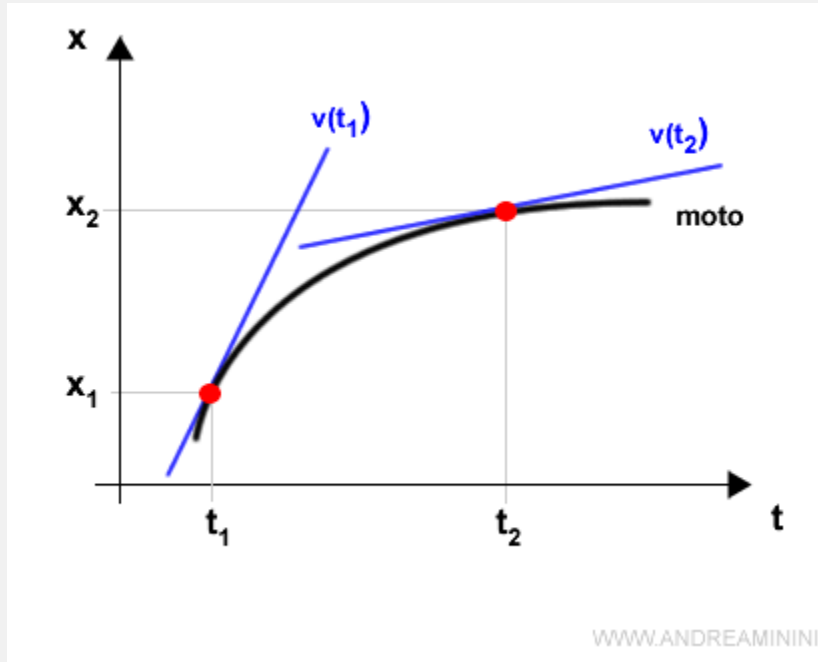
$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_f - \vec{r}_i}{t_f - t_i} \quad [L]/[t] = [Lt^{-1}]$$

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta x \mathbf{i} + \Delta y \mathbf{j} + \Delta z \mathbf{k}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \mathbf{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \mathbf{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t} \mathbf{k}$$

$$v_{m,x} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad , \quad v_{m,y} = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

# VETTORI POSIZIONE SPOSTAMENTO, VELOCITÀ E ACCELERAZIONE

## Vettore velocità istantanea



In forma scalare:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad v_y = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

Stessa direzione e stesso verso dello spostamento in quell'istante

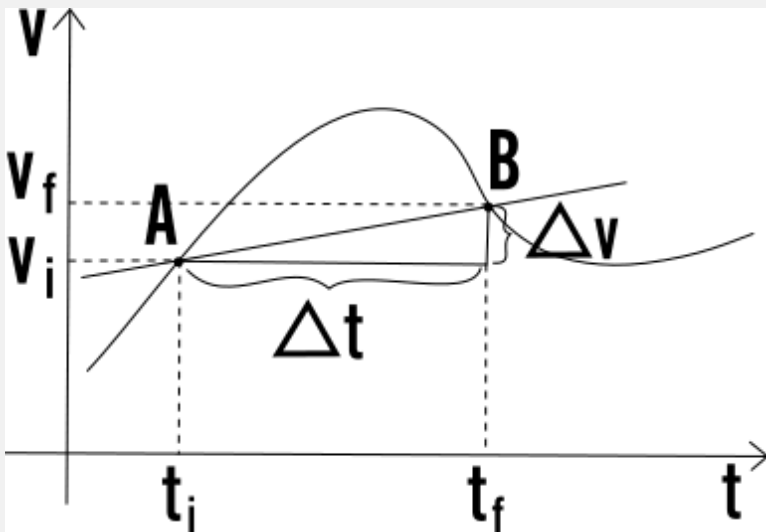
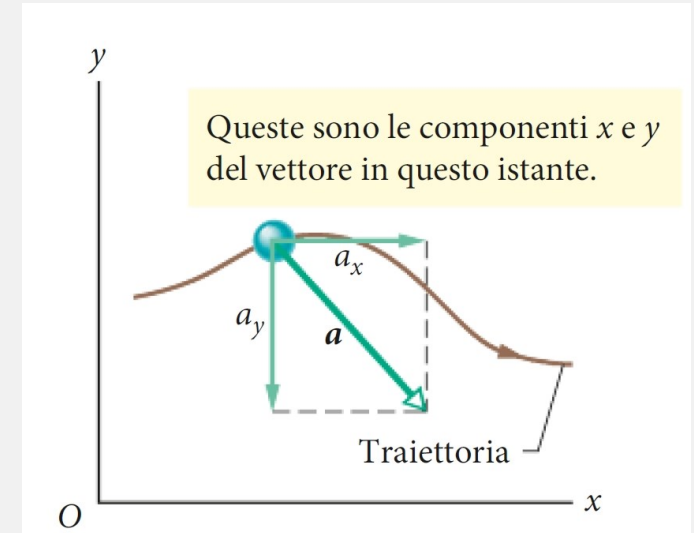
# VETTORI POSIZIONE SPOSTAMENTO, VELOCITÀ E ACCELERAZIONE

## Vettore accelerazione media

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

$$a_{m,x} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}, a_{m,y} = \frac{\Delta v_y}{\Delta t}$$

Stessa direzione e stesso verso di  $\Delta \vec{v}$       $[Lt^{-1}]/[t] = [Lt^{-2}]$



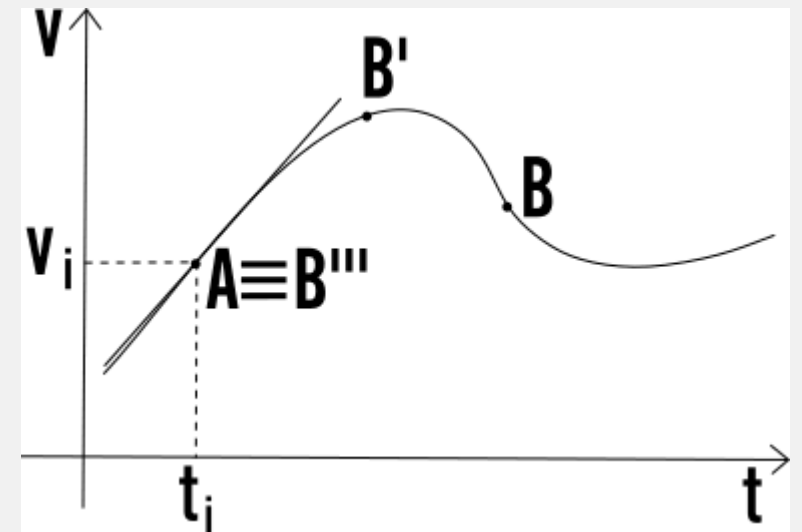
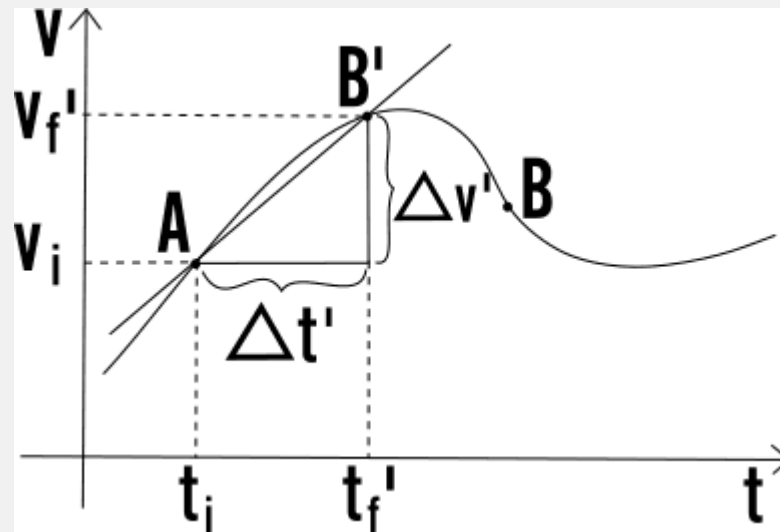
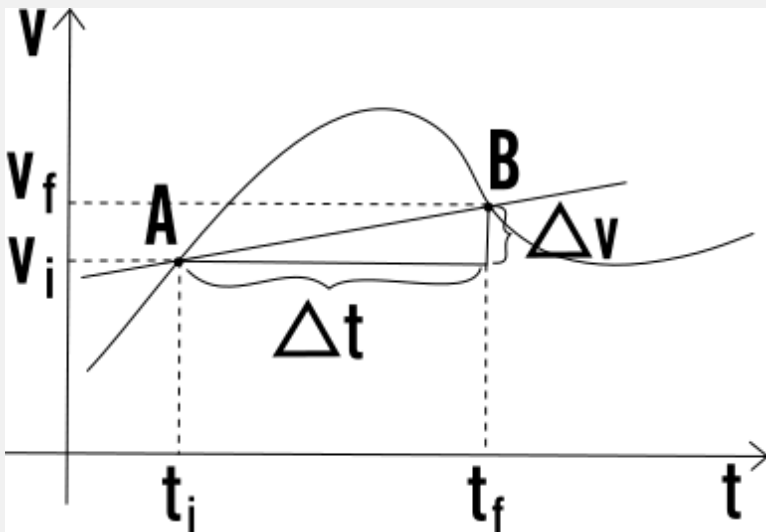


# VETTORI POSIZIONE SPOSTAMENTO, VELOCITÀ E ACCELERAZIONE

## Vettore accelerazione istantanea

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

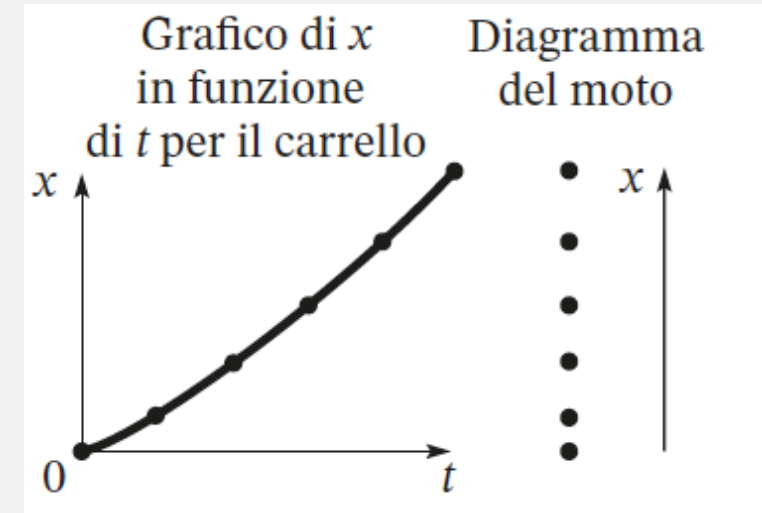
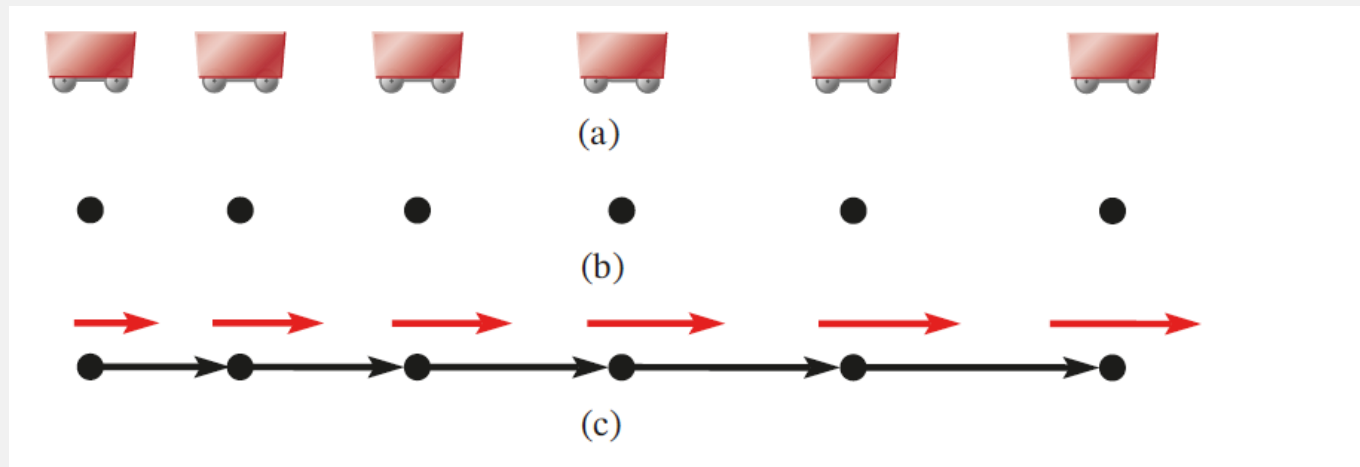
$$a_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \quad , \quad a_y = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta t}$$



# VETTORI POSIZIONE SPOSTAMENTO, VELOCITÀ E ACCELERAZIONE

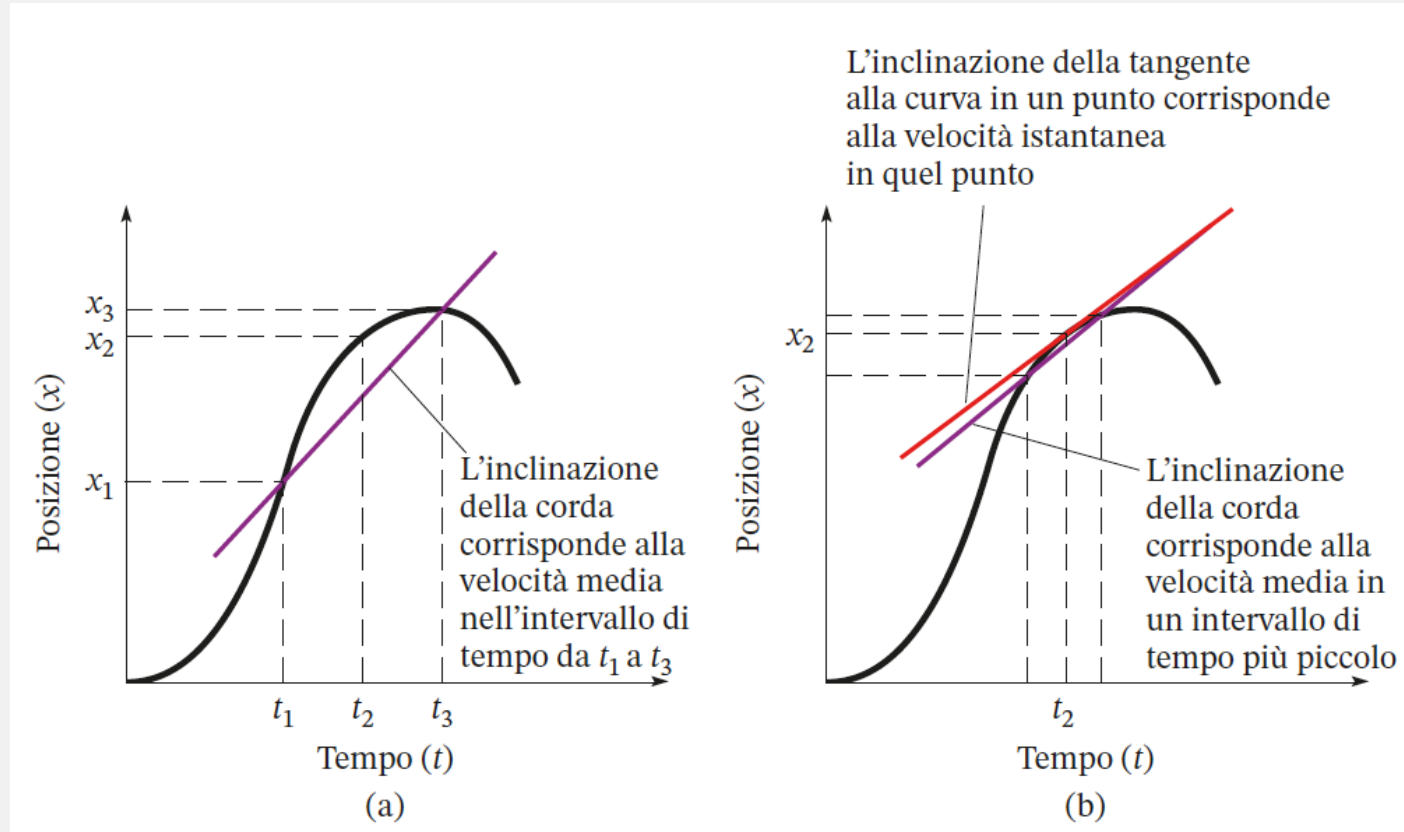
## Diagramma del moto

Un diagramma del moto mostra la posizione dell'oggetto in funzione del tempo



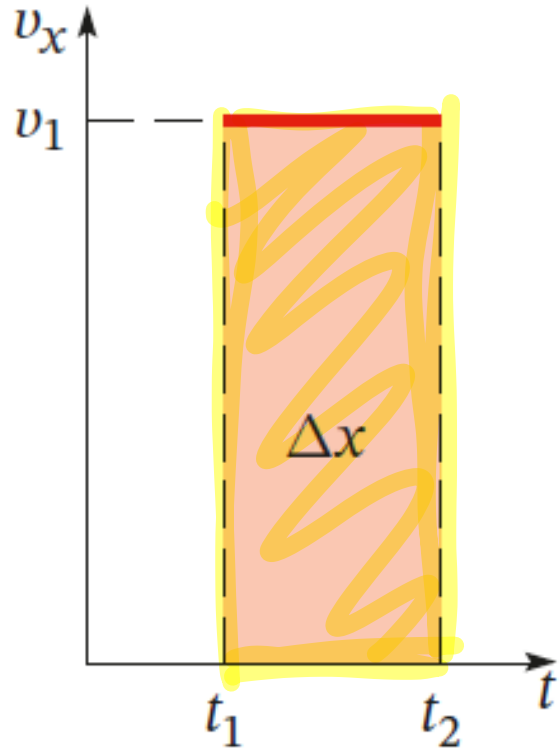
# VETTORI POSIZIONE SPOSTAMENTO, VELOCITÀ E ACCELERAZIONE

## Relazione grafica tra posizione e velocità



# VETTORI POSIZIONE SPOSTAMENTO, VELOCITÀ E ACCELERAZIONE

## Relazione grafica tra posizione, tempo e velocità

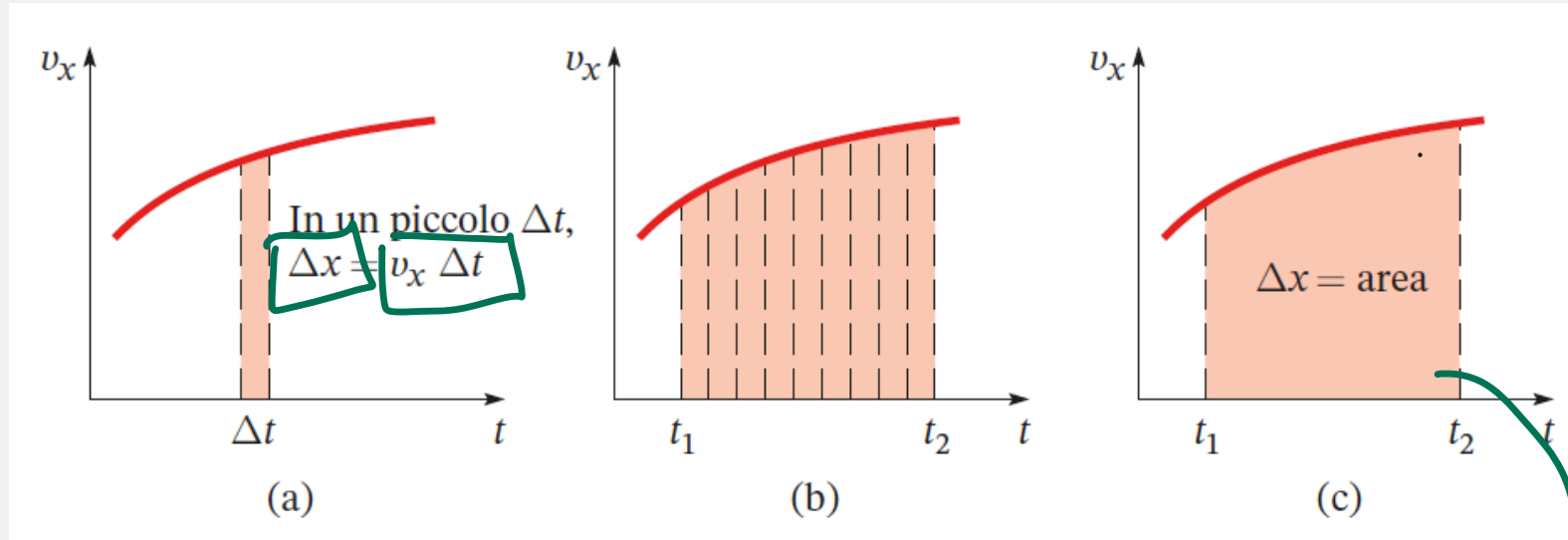


$$v_x = v_{m,x} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$\Delta x = v_x \Delta t$  (per  $v_x$  costante)

# VETTORI POSIZIONE SPOSTAMENTO, VELOCITÀ E ACCELERAZIONE

## Relazione grafica tra posizione, tempo e velocità



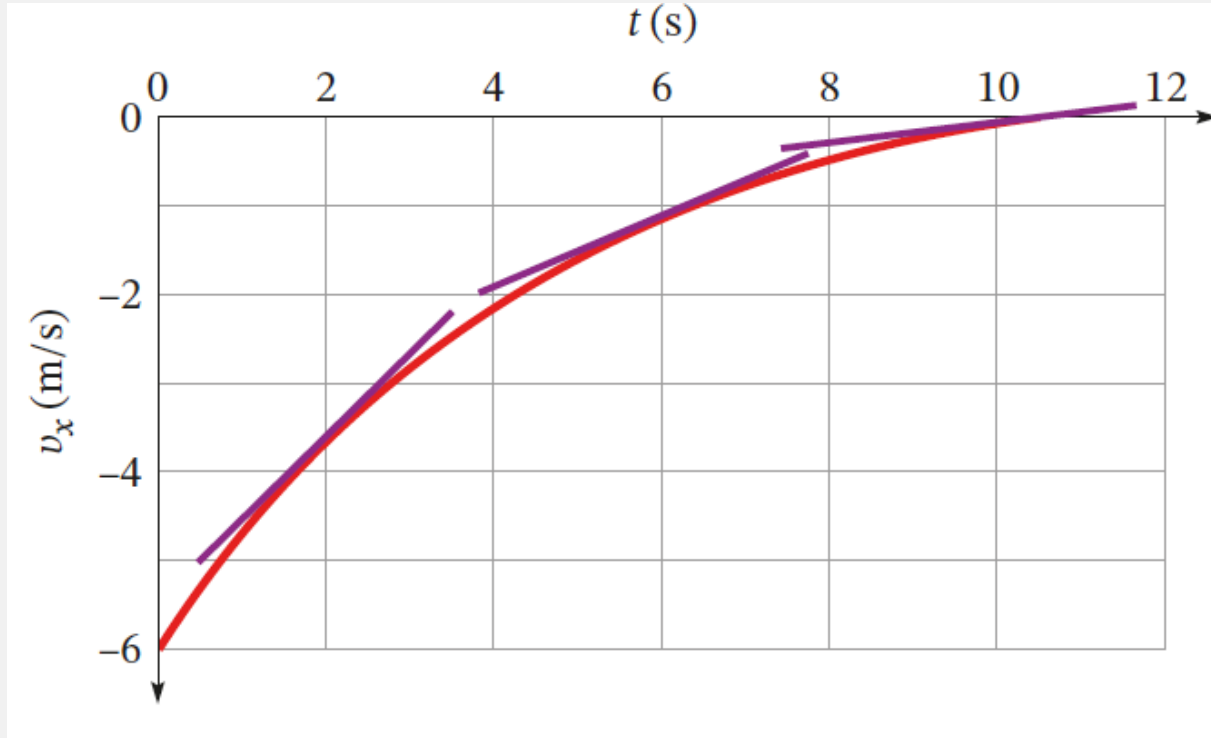
*per  $v_x$  non costante*

$$\Delta x = v_x \cdot \Delta t \rightarrow$$

$$\int v_x dt$$

# VETTORI POSIZIONE SPOSTAMENTO, VELOCITÀ E ACCELERAZIONE

## Relazione grafica tra velocità e accelerazione



Stessa relazione grafica vista per spostamento e velocità:

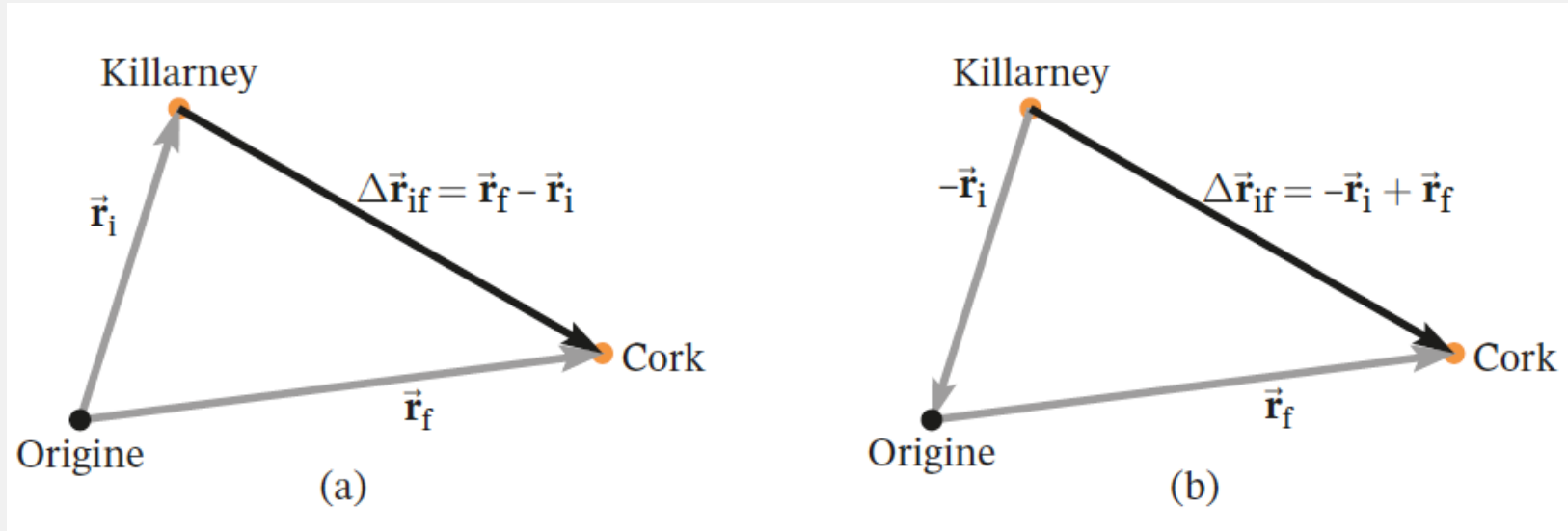
- ✓  $a_x$  è l'inclinazione della tangente in un punto dato della curva  $v_x(t)$
- ✓  $\Delta v_x$  è l'area sottesa alla curva  $a_x(t)$  in un certo intervallo di tempo

# VETTORI POSIZIONE SPOSTAMENTO, VELOCITÀ E ACCELERAZIONE



## Esempio

Due amiche stanno viaggiando in Irlanda e si muovono da Killarney a Cork.

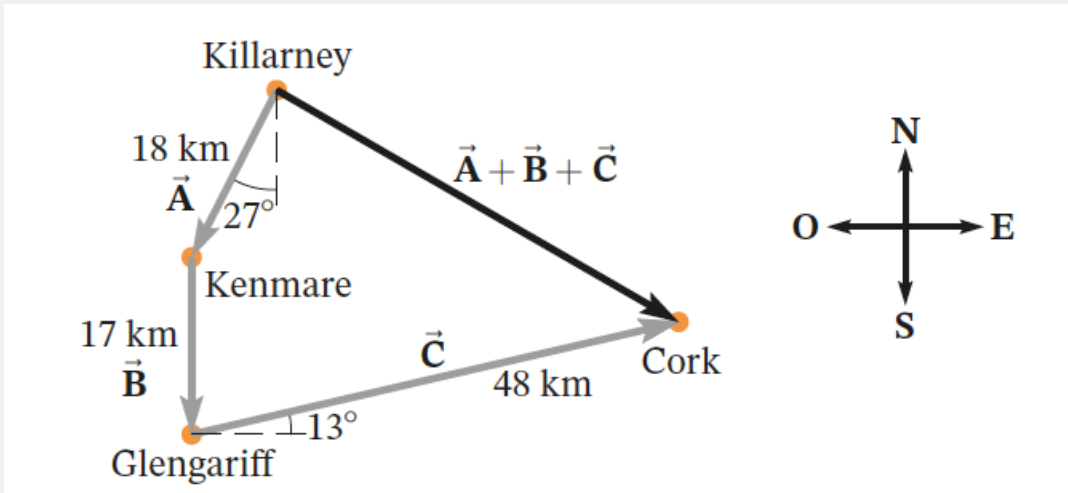


# VETTORI POSIZIONE SPOSTAMENTO, VELOCITÀ E ACCELERAZIONE



## Esempio

Durante il viaggio da Killarney a Cork, le due amiche si muovono per 18 km lungo una direzione a  $27^\circ$  ovest da sud fino a Kenmare, quindi verso sud per 17 km fino a Glengariff e, infine, per 48 km lungo una direzione a  $13^\circ$  nord da est fino a Cork. Qual è lo spostamento totale (in termini di intensità, direzione e verso) delle due ragazze?

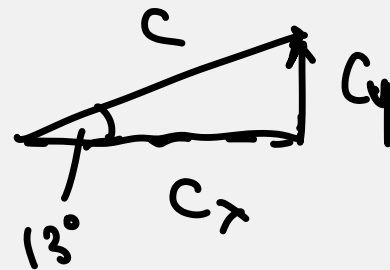
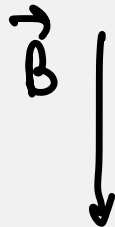
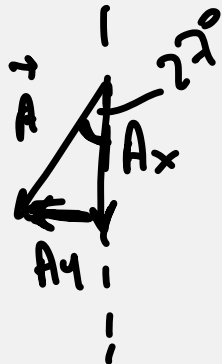
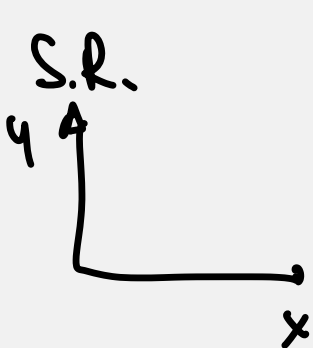


$$\left. \begin{array}{l} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \\ \vec{r}_3 \\ \vec{r}_4 \end{array} \right\} \Delta \vec{r}_{1,4} = \vec{r}_4 - \vec{r}_1$$

$$\vec{A} = \Delta \vec{r}_{1,2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \rightarrow A = 18 \text{ km}$$

$$\vec{B} = \Delta \vec{r}_{2,3} = \vec{r}_3 - \vec{r}_2 \rightarrow B = 17 \text{ km}$$

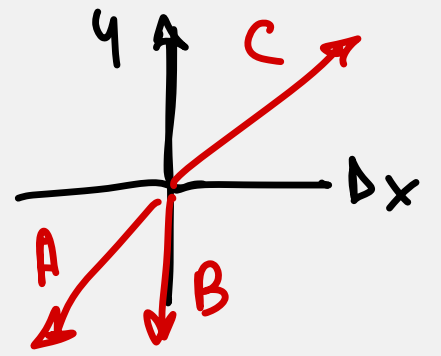
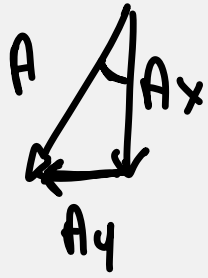
$$\vec{C} = \Delta \vec{r}_{3,4} = \vec{r}_4 - \vec{r}_3 \rightarrow C = 48 \text{ km}$$



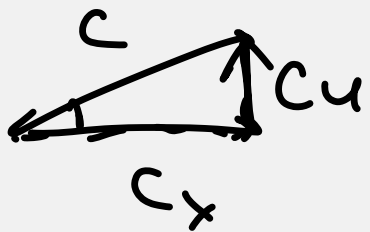


$$A_x = -A \sin 27^\circ = -18 \text{ kN} \cdot 0.454 = -8.17 \text{ kN}$$

$$A_y = -A \cos 27^\circ = -18 \text{ kN} \cdot 0.891 = -16 \text{ kN}$$



$$B_x = 0, B_y = -17 \text{ kN}$$

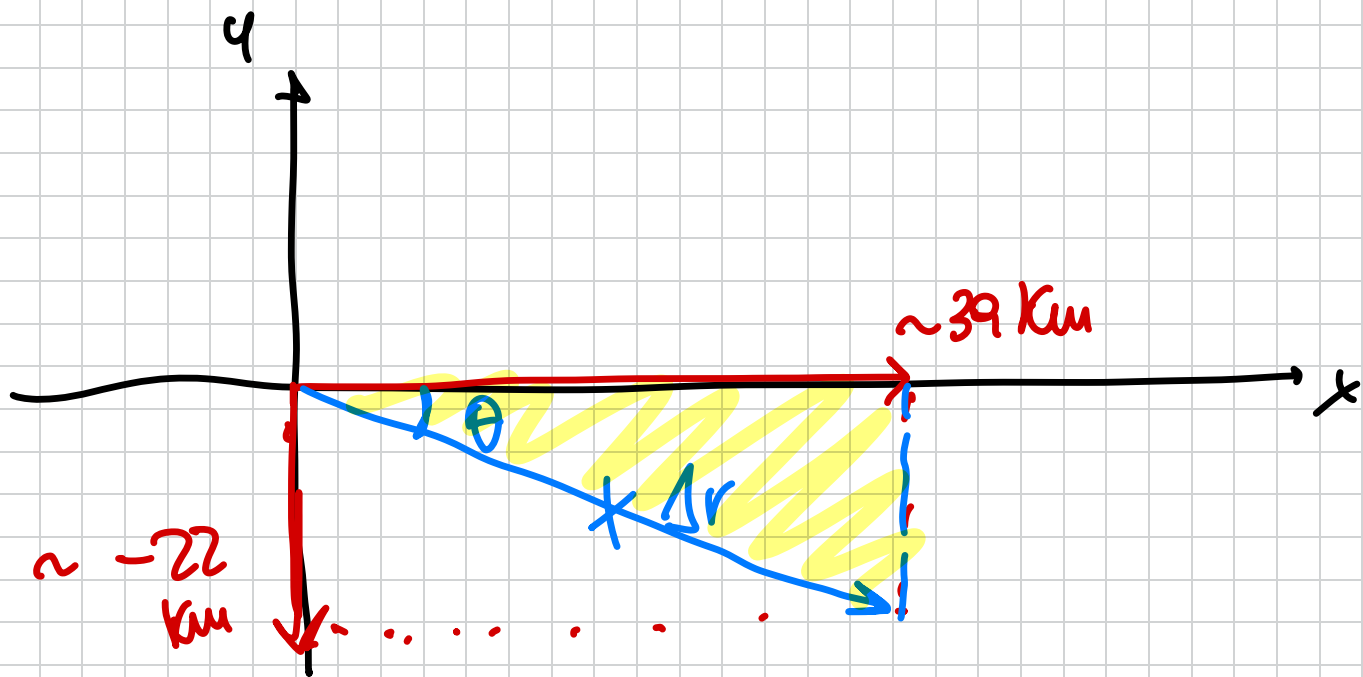


$$C_x = +C \cos 13^\circ = +48 \text{ kN} \cdot 0.974 = +46.8 \text{ kN}$$

$$C_y = +C \sin 13^\circ = +48 \text{ kN} \cdot 0.225 = +10.8 \text{ kN}$$

$$\Delta x = C_x + B_x + A_x = 46.8 \text{ kN} + 0 \text{ kN} + (-8.17 \text{ kN}) = +38.63 \text{ kN}$$

$$\Delta y = C_y + B_y + A_y = 10.8 \text{ kN} + (-17 \text{ kN}) + (-16 \text{ kN}) = -22.2 \text{ kN}$$



$$\Delta x = 38.63 \text{ km}$$

$$\Delta y = -22.2 \text{ km}$$

$$\text{ipotenuse} = \Delta r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(38.63)^2 + (-22.2)^2} = 45 \text{ km}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{22.2 \text{ km}}{38.63 \text{ km}} = 30^\circ$$

# VETTORI POSIZIONE SPOSTAMENTO, VELOCITÀ E ACCELERAZIONE

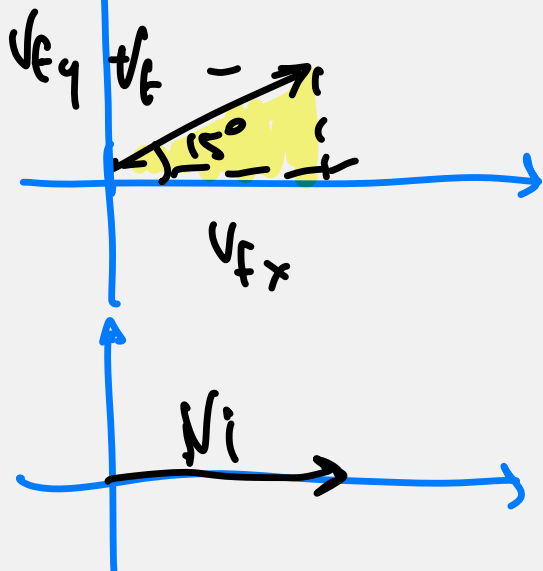
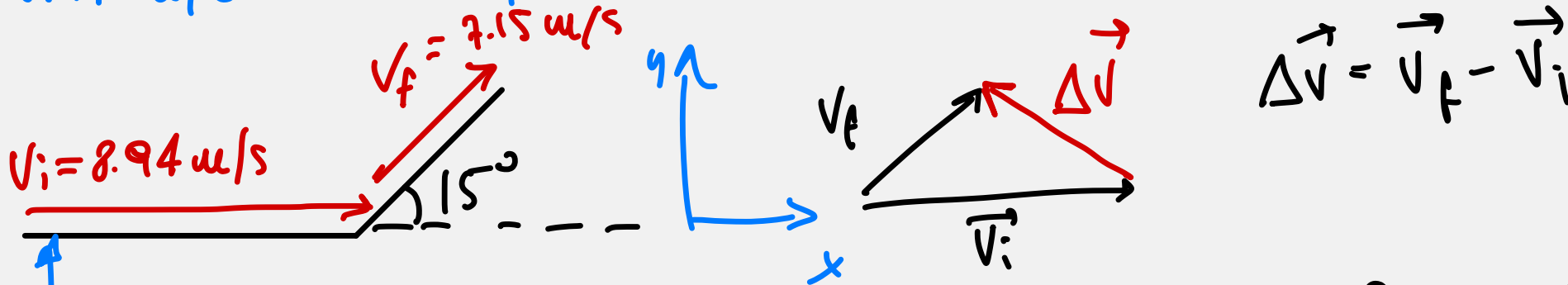


## Esempio

Una pattinatrice si sta muovendo su una strada pianeggiante con una velocità di 8.94 m/s; dopo 120.0 s la strada comincia a salire (con un angolo di inclinazione di  $15^\circ$ ) e la ragazza mantiene una velocità di 7.15 m/s.

- (a) Qual è la variazione di velocità della pattinatrice?  
(b) Qual è l'accelerazione media della ragazza nell'intervallo di tempo di 120 s?

$$8.94 \text{ m/s} - 7.15 \text{ m/s} = 1.79 \text{ m/s} \rightarrow \text{variaz. modulo}$$



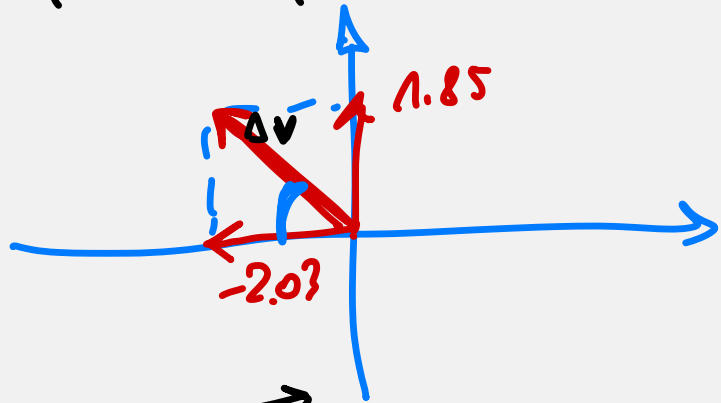
$$v_{fx} = v_f \cos \theta = 7.15 \text{ m/s} \cdot 0.97 = 6.91 \text{ m/s}$$
$$v_{fy} = v_f \cdot \sin \theta = 7.15 \text{ m/s} \cdot 0.26 = 1.85 \text{ m/s}$$

$$v_{ix} = v_x = 8.94 \text{ m/s}$$

$$v_{iy} = 0$$

$$v_x = v_{fx} - v_{ix} = (6.91 - 8.94) \text{ m/s} = -2.03 \text{ m/s}$$

$$v_y = v_{fy} - v_{iy} = (1.85 - 0) \text{ m/s} = +1.85 \text{ m/s}$$



$$\Delta v = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2} \rightarrow 2.74 \text{ m/s}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{v_y}{v_x} = \tan^{-1} \frac{1.85 \text{ m/s}}{2.03 \text{ m/s}} = 42.3^\circ$$

$$\vec{a}_m = \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t} = \frac{2.74 \text{ m/s}}{120 \text{ s}} = 0.023 \text{ m/s}^2$$

direzione di  $\vec{a}_m =$  direzione di  $\Delta \vec{v} \rightarrow 42.3^\circ$  rispetto all'asse orizzontale.

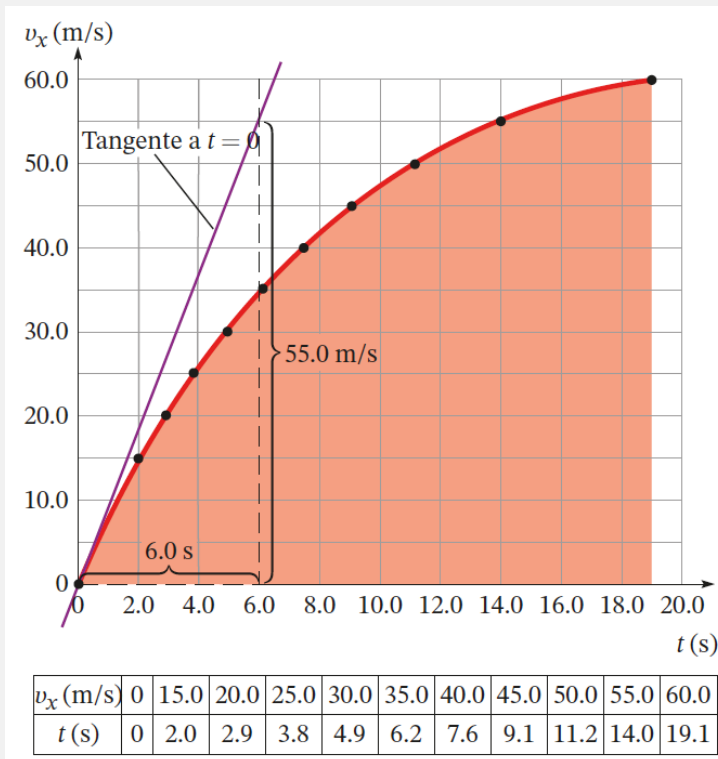
# VETTORI POSIZIONE SPOSTAMENTO, VELOCITÀ E ACCELERAZIONE



## Esempio

Una vettura, partendo da ferma, può raggiungere la velocità di 30 m/s in 4.9 s.

- Qual è l'accelerazione media dell'auto quando passa da 0 a 30 m/s?
- Qual è la sua massima accelerazione?
- A quanto ammonta lo spostamento della vettura nei primi 19 secondi (cioè quando raggiunge i 60 m/s)?
- Qual è la sua velocità media in quest'intervallo di tempo?

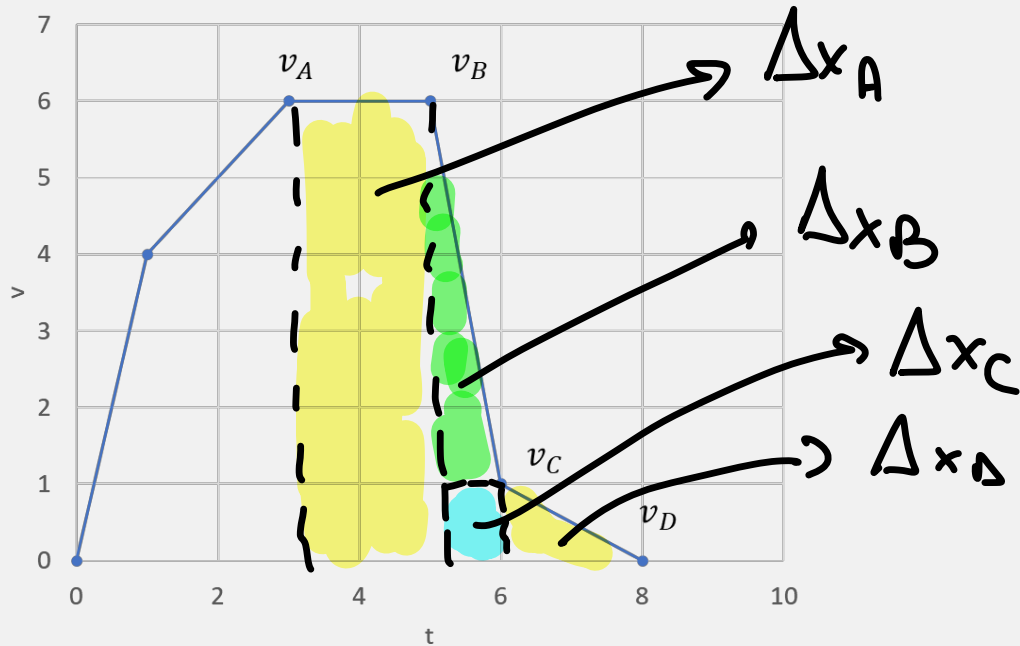


# VETTORI POSIZIONE SPOSTAMENTO, VELOCITÀ E ACCELERAZIONE



## Esempio

Il grafico mostra sull'asse verticale la velocità (m/s) di uno skateboard mentre si muove su un rettilineo. Qual è la distanza percorsa dallo skateboard tra  $t=3.0s$  e  $t=8.0s$ ?



$$\Delta x = \sum_{i=1}^n v_i \cdot \Delta t$$

$$\Delta x = \Delta x_A + \Delta x_B + \Delta x_C + \Delta x_D$$

$$\Delta x_A = v_A \cdot (t_B - t_A) = 6 \text{ m/s} \cdot (5 \text{ s} - 3 \text{ s}) = 12 \text{ m}$$

$$\Delta x_B = \frac{(t_C - t_B) \cdot (v_B - v_C)}{2} = \frac{(6 \text{ s} - 5 \text{ s}) \cdot (6 \text{ m/s} - 1 \text{ m/s})}{2} = 2.5 \text{ m}$$

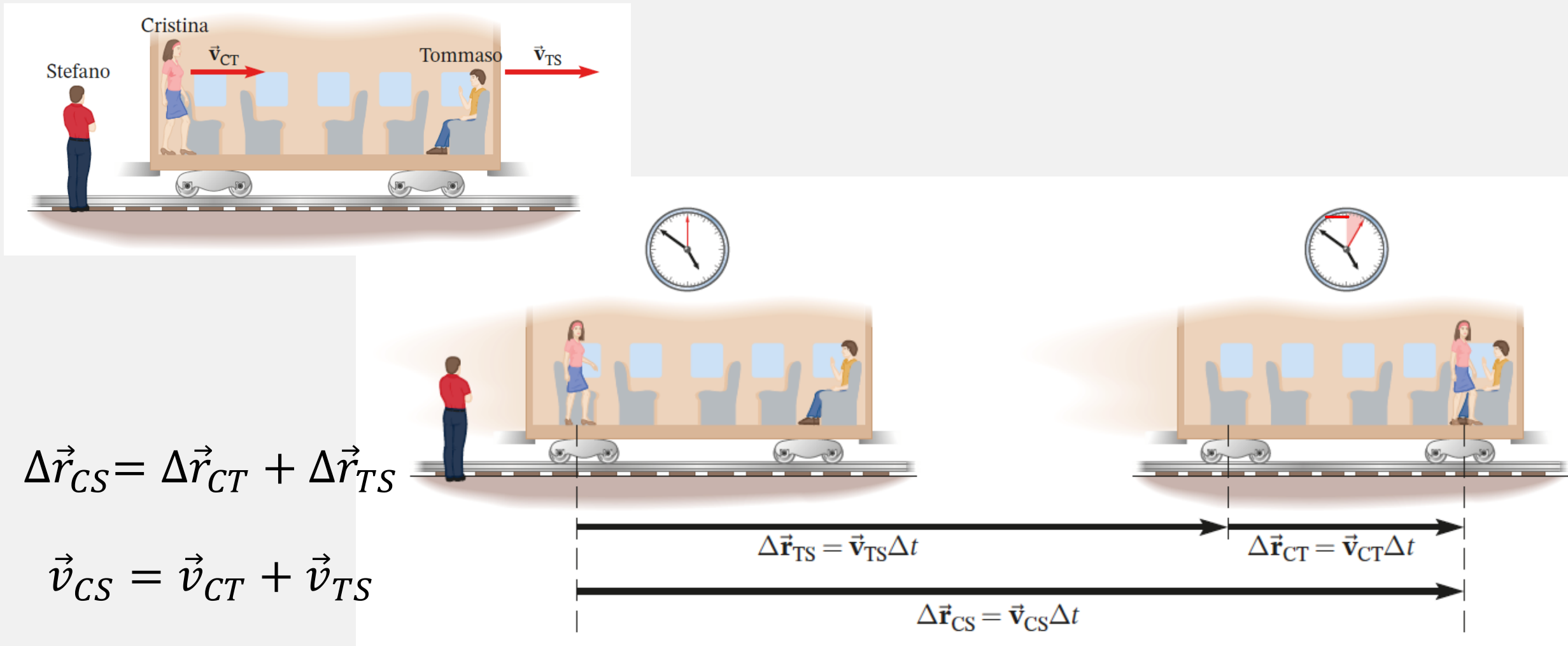
$$\Delta x_C = (v_C - v_B) \cdot (t_C - t_B) = 1 \text{ m}$$

$$\Delta x_D = \frac{(t_D - t_C) \cdot (v_C - v_D)}{2} = 1 \text{ m}$$

$$\Delta x = 12 \text{ m} + 2.5 \text{ m} + 1 \text{ m} + 1 \text{ m} = 16.5 \text{ m}$$

# VETTORI POSIZIONE SPOSTAMENTO, VELOCITÀ E ACCELERAZIONE

## Velocità relativa e sistemi di riferimento



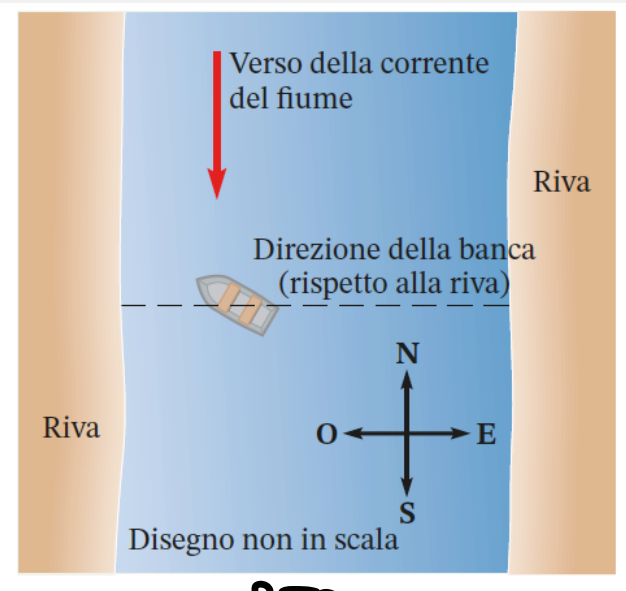
# VETTORI POSIZIONE SPOSTAMENTO, VELOCITÀ E ACCELERAZIONE



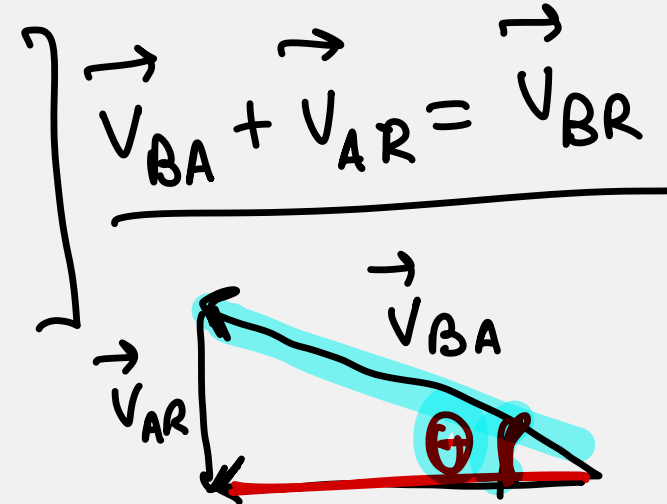
## Esempio

Giacomo vuole attraversare un fiume dalla riva est a quella ovest. La larghezza del fiume è di 250 m e l'acqua del fiume scorre da nord verso sud alla velocità di 0.61 m/s. Giacomo impiega 4.2 min per arrivare sull'altra riva. Affinché possa seguire la rotta voluta (cioè perpendicolare alla costa, da est a ovest), in che direzione avrà dovuto dirigere la sua barca?

A quale velocità (rispetto l'acqua) si muove l'imbarcazione?



$$\begin{aligned} \vec{v}_{AR} &= 0.61 \text{ m/s} \downarrow \\ \vec{v}_{BR} & \leftarrow \\ \vec{v}_{BA} & \text{ (modulo, verso, dir.)} \end{aligned}$$



$$v_{BR} = \frac{250 \text{ m}}{4.2 \text{ min} \cdot 60 \text{ s/min}} = 0.992 \text{ m/s}$$

$$v_{BA} = \sqrt{v_{AR}^2 + v_{BR}^2} = \sqrt{0.61^2 + 0.992^2} = 1.16 \text{ m/s}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{v_{AR}}{v_{BR}} = \tan^{-1} \frac{0.61 \text{ m/s}}{0.992 \text{ m/s}} = 32^\circ$$