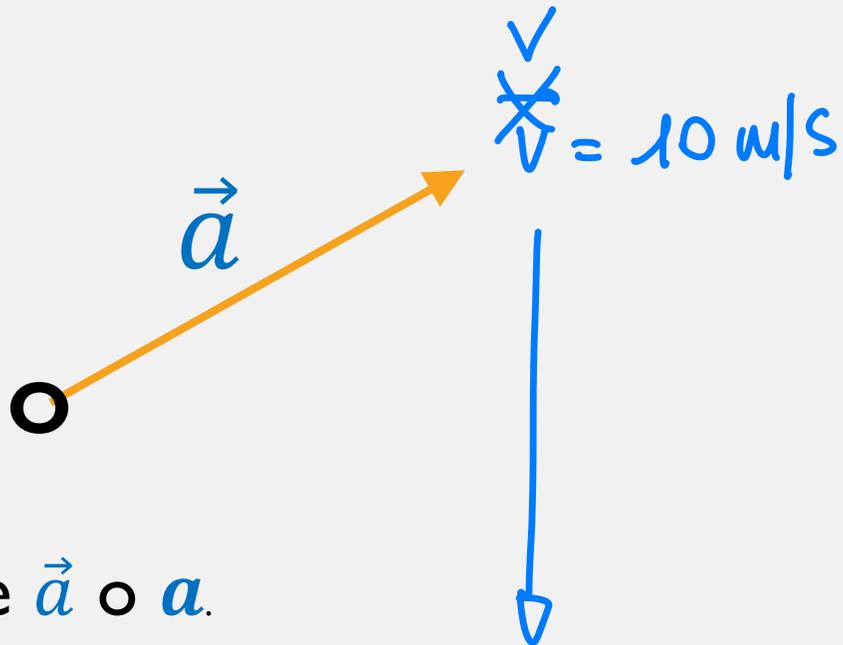


CINEMATICA pt. I

- Vettori
- Vettori posizione, spostamento, velocità e accelerazione
- Relazioni grafiche: posizione-velocità e velocità-accelerazione
- Esempi



I VETTORI



Vettore \vec{a} o a .

Il modulo del vettore è $|\vec{a}| = a$ e graficamente corrisponde alla lunghezza della freccia.

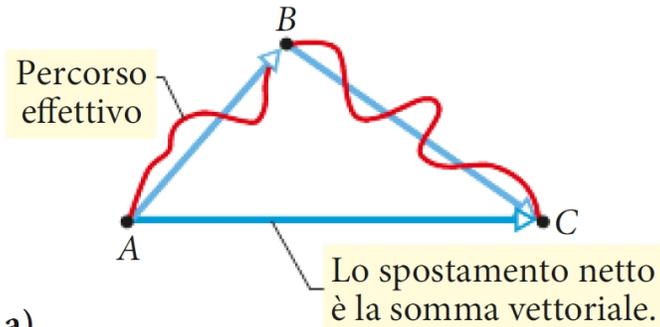
L'origine del vettore è il punto \bigcirc .



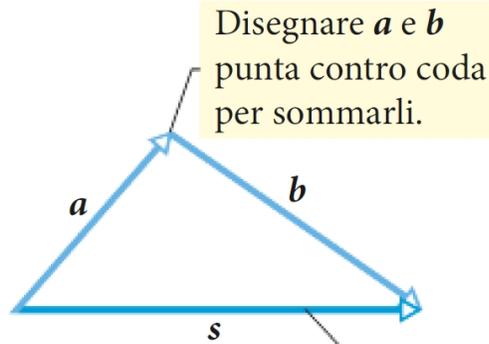
EQUIPOLLENTI
Uguali in modulo, verso e direzione

OPERAZIONI TRA VETTORI

Somma tra vettori

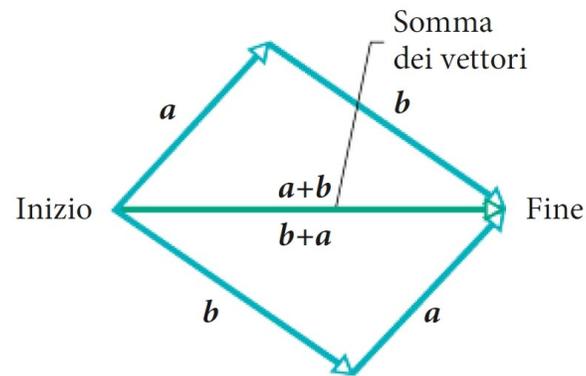


a)

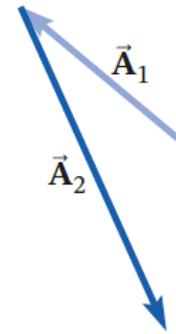


b)

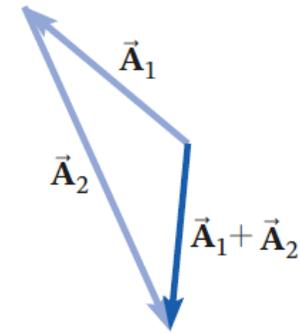
Il vettore risultante va dalla coda di a alla punta di b .



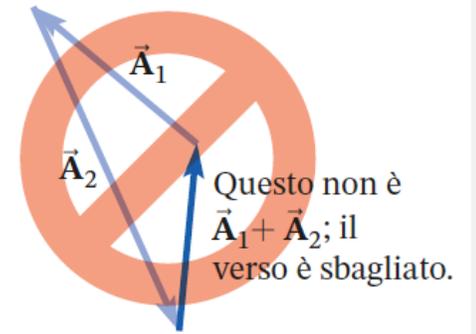
Il vettore risultante dalla somma non dipende dall'ordine dei vettori addendi.



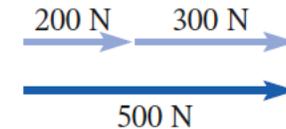
(b)



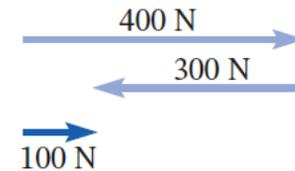
(c)



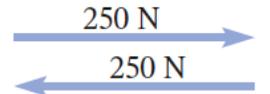
(d)



(a)



(b)



La somma è nulla

(c)

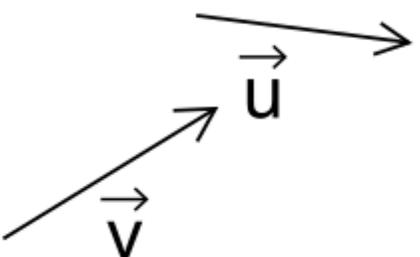
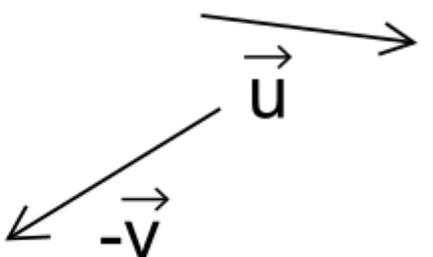
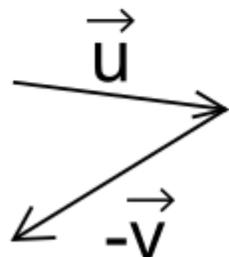
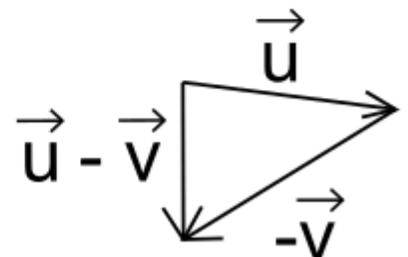
$400 - 300$

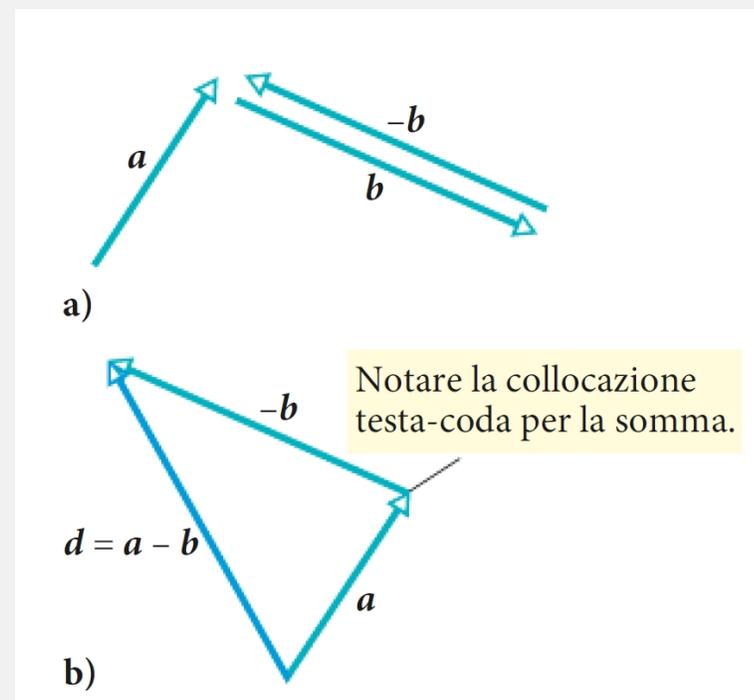
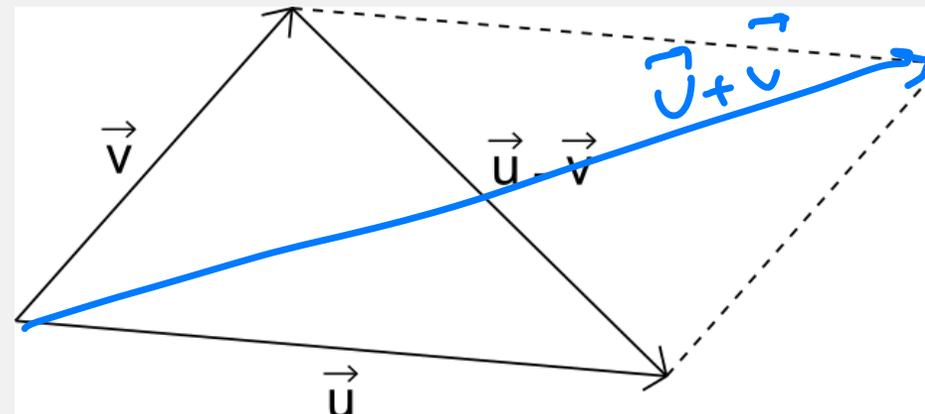
$250 - 250$

OPERAZIONI TRA VETTORI

$$\vec{u} - \vec{v}$$

Differenza tra vettori

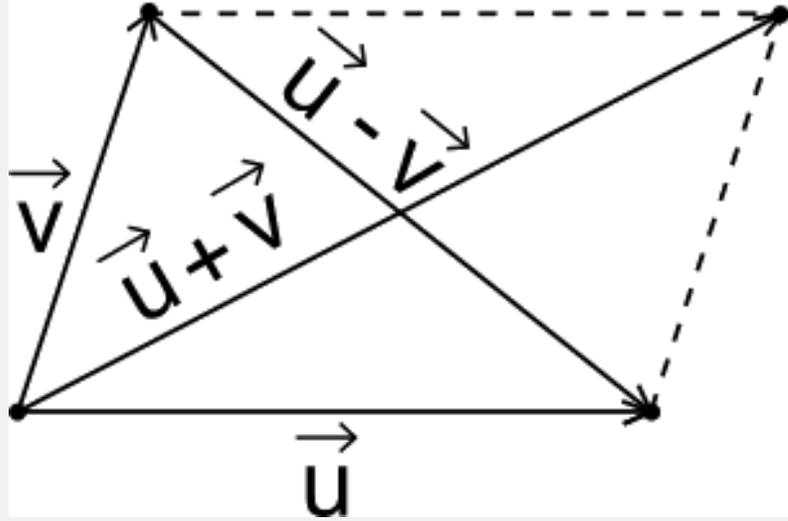
<p>Vettori da sottrarre</p> 	<p>Opposto del vettore \vec{v}</p> 
<p>Traslazione del vettore $-\vec{v}$</p> 	<p>Metodo punta coda</p> 



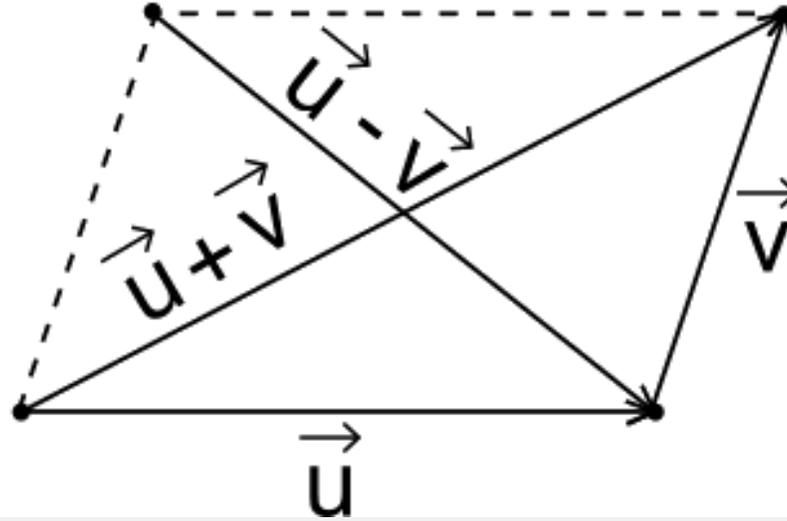
OPERAZIONI TRA VETTORI

Differenza tra vettori

Prima variante

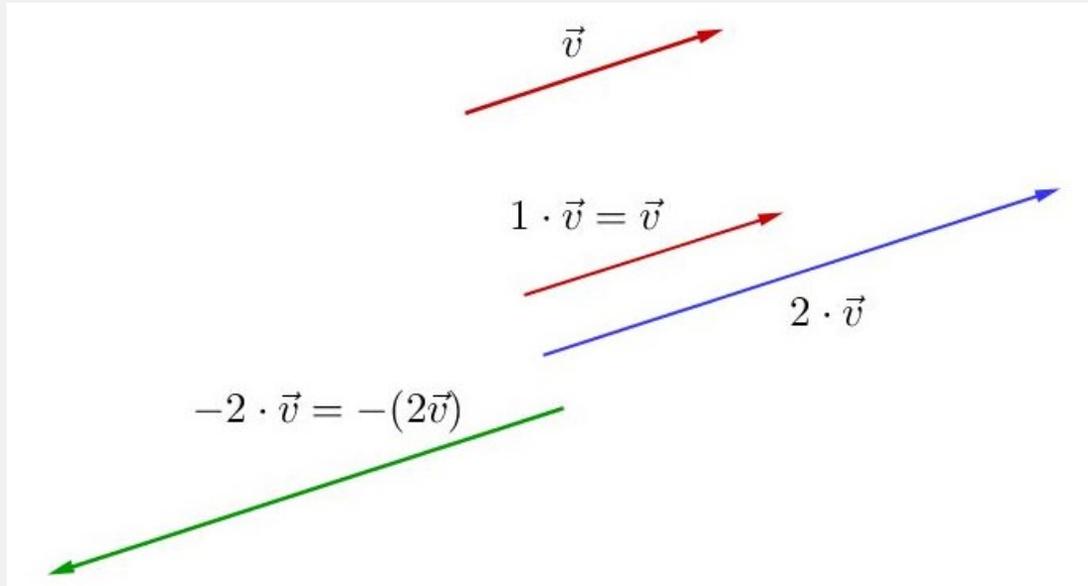


Seconda variante



OPERAZIONI TRA VETTORI

Prodotto tra vettore e scalare



Il vettore \vec{v} ha

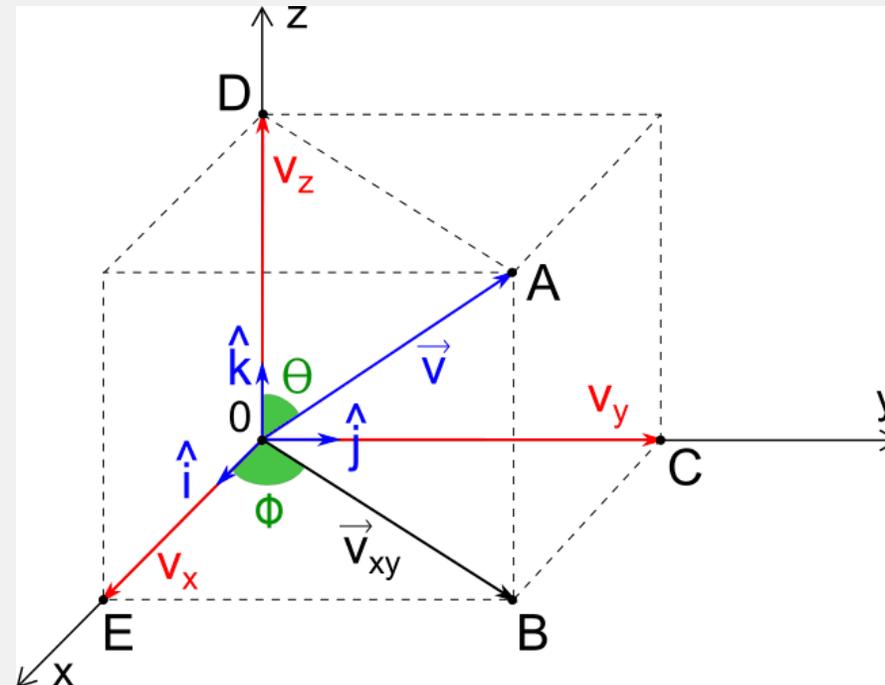
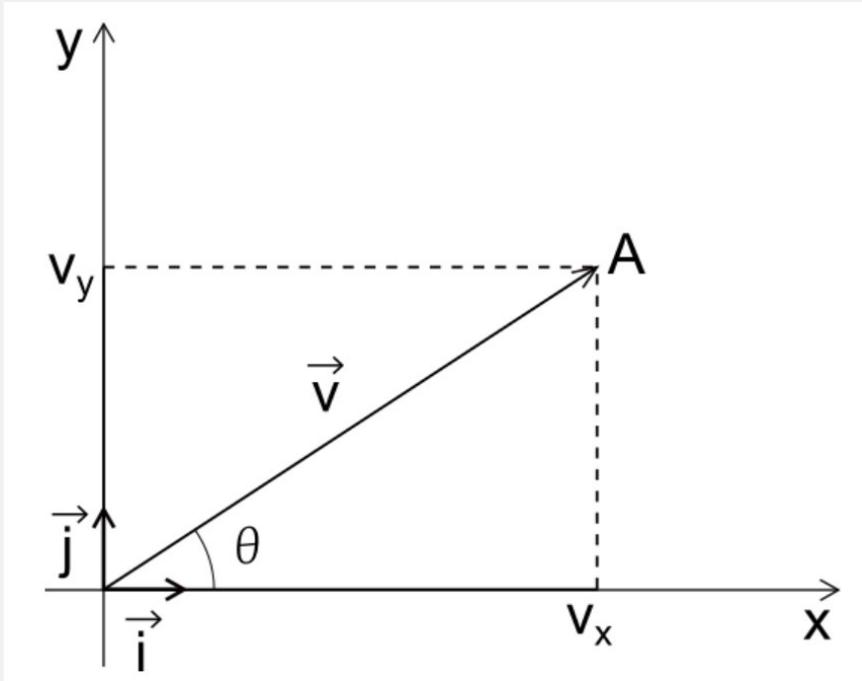
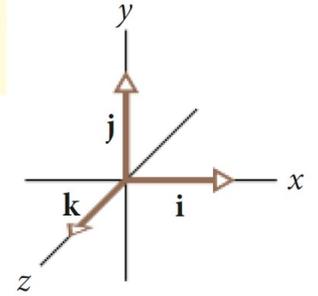
- la **stessa direzione** di \vec{u}
- lo **stesso verso** di \vec{u} se $k > 0$, **verso opposto** se $k < 0$
- modulo $k|\vec{u}| = ku$

OPERAZIONI TRA VETTORI

Vettori componenti / Proiezioni su x e y

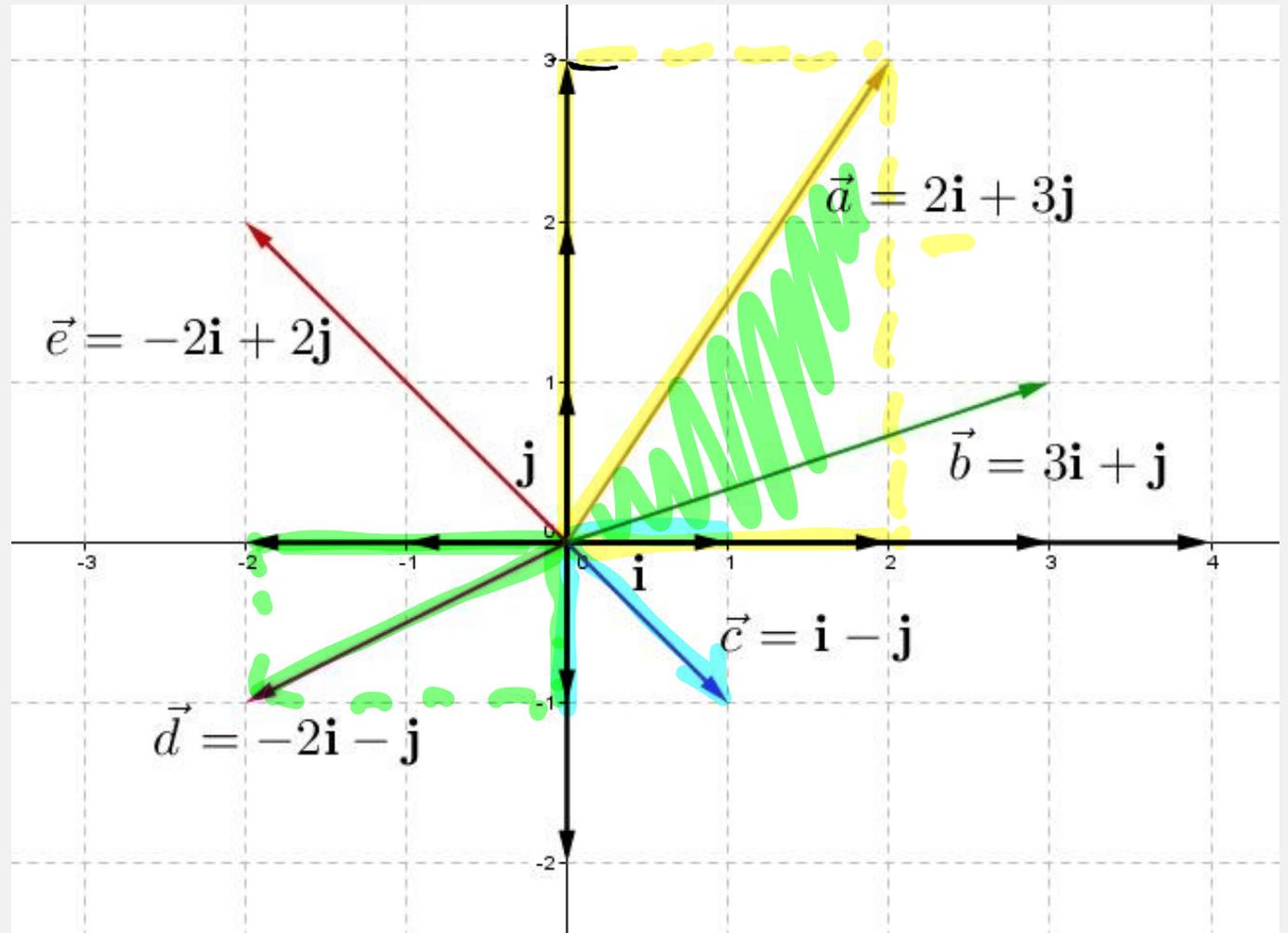
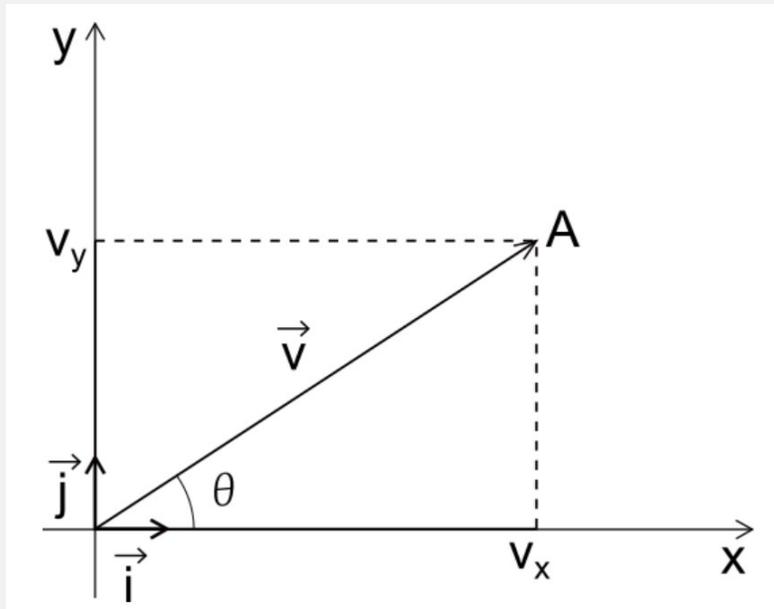
VERSORI \hat{i} \hat{j}

I versori sono diretti come gli assi.



OPERAZIONI TRA VETTORI

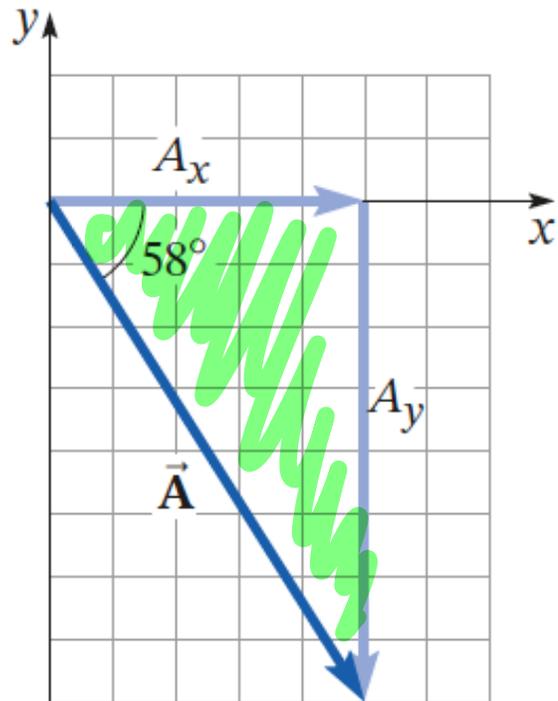
Vettori componenti / Proiezioni su x e y



OPERAZIONI TRA VETTORI

Vettori componenti / Proiezioni su x e y

Pitagora



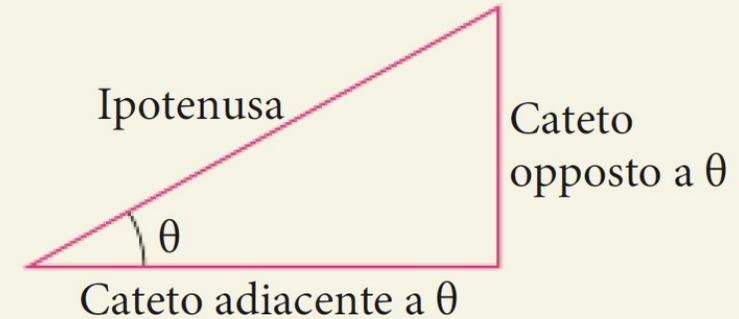
$$c. opp. = \text{ipot.} \cdot \sin \theta$$

$$c. ad. = \text{ipot.} \cdot \cos \theta$$

$$\sin \theta = \frac{\text{cateto opposto a } \theta}{\text{ipotenusa}}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{cateto adiacente a } \theta}{\text{ipotenusa}}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{cateto opposto a } \theta}{\text{cateto adiacente a } \theta}$$



$$\theta = \arctan \left(\frac{c. opp.}{c. ad.} \right)$$

OPERAZIONI TRA VETTORI

Algebra con le componenti

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$$

$$r_x = a_x + b_x$$

$$r_y = a_y + b_y$$

$$r_z = a_z + b_z$$

\mathbf{r} è uguale al vettore $(\mathbf{a}+\mathbf{b})$: se questo è vero, ogni componente di \mathbf{r} deve coincidere con la corrispondente componente di $(\mathbf{a}+\mathbf{b})$

Due vettori sono uguali se le rispettive componenti sono tutte uguali fra loro

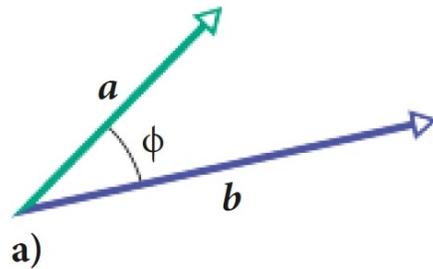
$$\mathbf{d} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) \longrightarrow d_x = a_x - b_x \quad d_y = a_y - b_y \quad d_z = a_z - b_z$$

dove

$$\mathbf{d} = d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k}$$

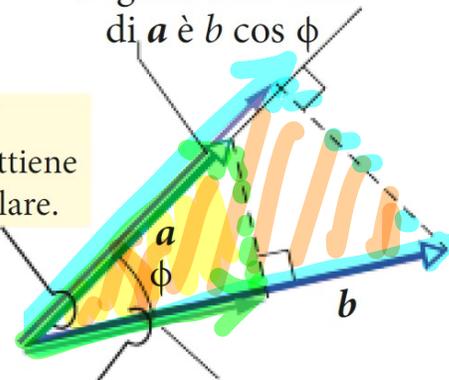
OPERAZIONI TRA VETTORI

Prodotto scalare



La componente di \mathbf{b} lungo la direzione di \mathbf{a} è $b \cos \phi$

Moltiplicando questi due si ottiene il prodotto scalare.



La componente di \mathbf{a} lungo la direzione di \mathbf{b} è $a \cos \phi$

Moltiplicando questi altri due si ottiene lo stesso prodotto.

b)

Prodotto scalare dei vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} (« \mathbf{a} scalare \mathbf{b} »):

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \phi$$

Tutti i termini a destra sono scalari, quindi il prodotto $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ è uno scalare!

Notazione dei versori:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \cdot (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k})$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

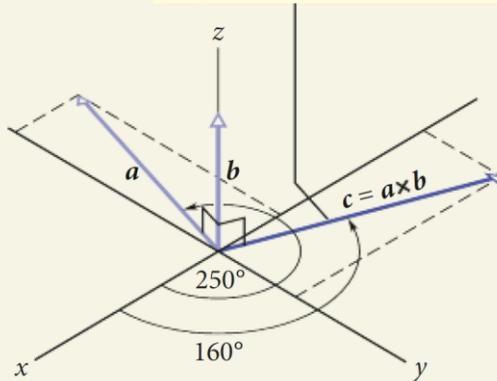
[proprietà distributiva]

OPERAZIONI TRA VETTORI

Prodotto vettoriale

$$\vec{a} \times \vec{b}$$

Questo è il vettore risultante, perpendicolare sia ad a sia a b .



Prodotto vettoriale dei vettori a e b (« a vettore b ») \rightarrow vettore c il cui modulo è:

$$c = ab \sin \varphi$$

No proprietà commutativa:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

Sì proprietà distributiva:

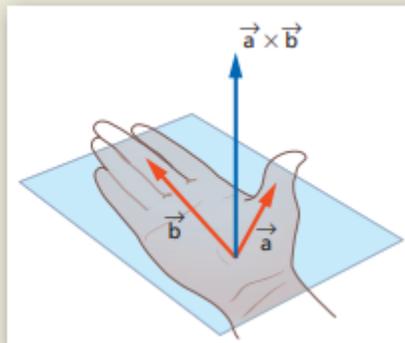
$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$$

Prodotto vettoriale

Il prodotto vettoriale di due vettori \vec{a} e \vec{b} è il vettore \vec{c} che ha:

- **modulo** uguale ad $ab \sin \alpha$;
- **direzione** perpendicolare al piano individuato dai due vettori;
- **verso** dato dalla regola della mano destra, illustrata nella figura.

Si indica con $\vec{a} \times \vec{b}$.

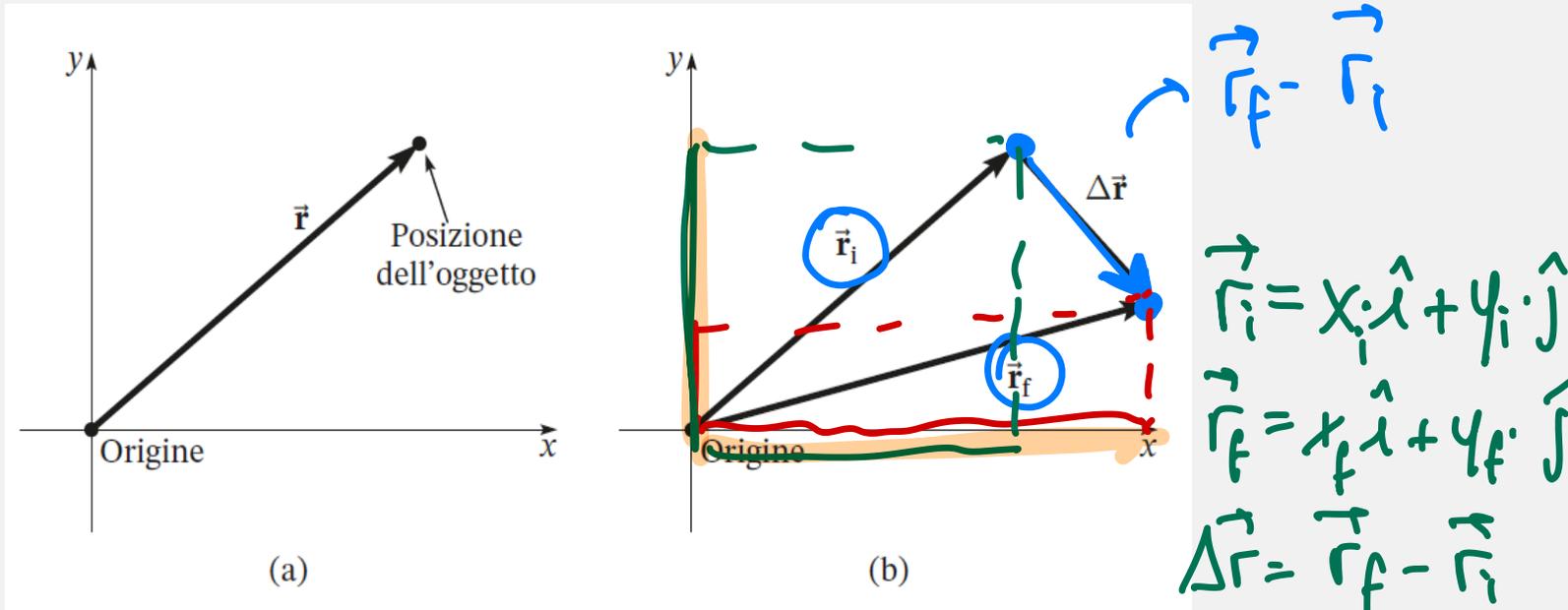


$$\text{Con } \mathbf{a} // \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$$

$$\text{Con } \mathbf{a} \perp \mathbf{b} \rightarrow |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \max$$

VETTORI POSIZIONE SPOSTAMENTO, VELOCITÀ E ACCELERAZIONE

Vettore posizione – Vettore spostamento

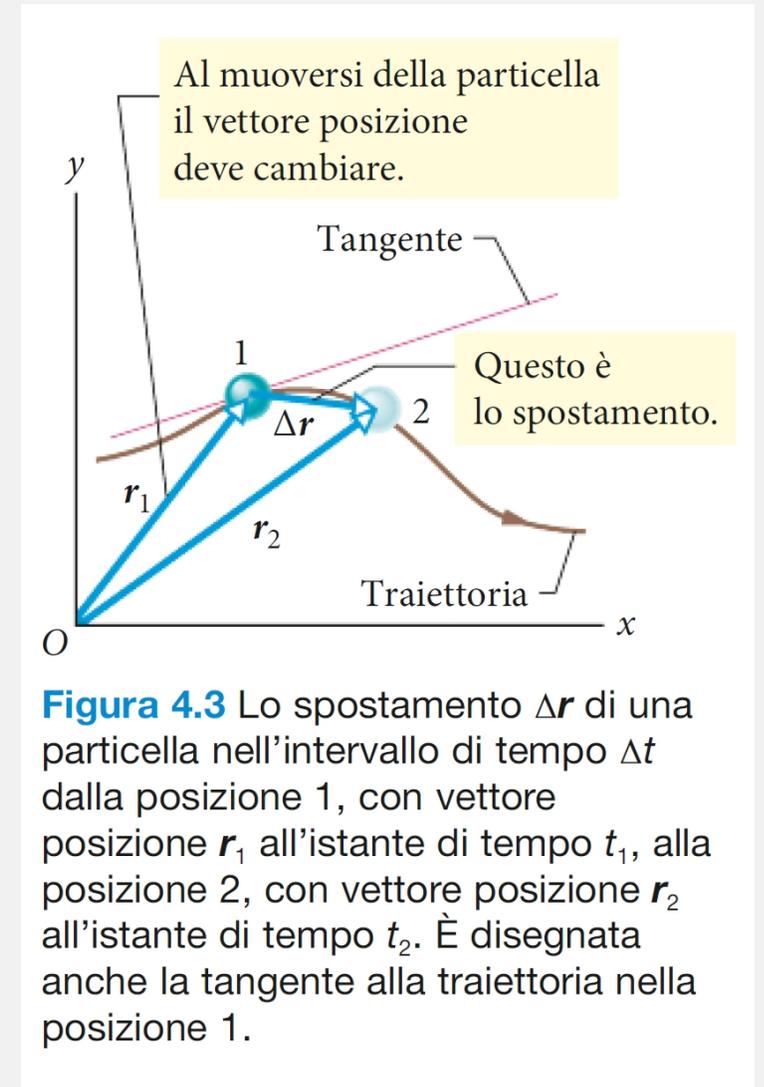


$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

Vettore posizione

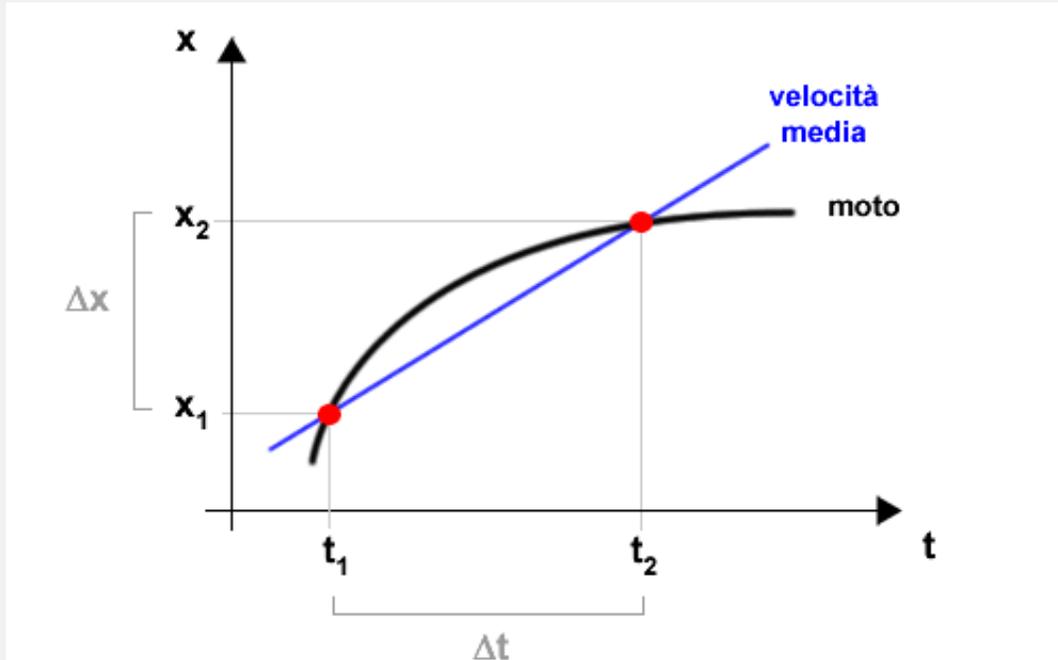
$$\Delta \vec{r} = (x_f - x_i) \cdot \hat{i} + (y_f - y_i) \cdot \hat{j} = \Delta x \cdot \hat{i} + \Delta y \cdot \hat{j}$$

Vettore spostamento



VETTORI POSIZIONE SPOSTAMENTO, VELOCITÀ E ACCELERAZIONE

Vettore velocità media



↑
intervals

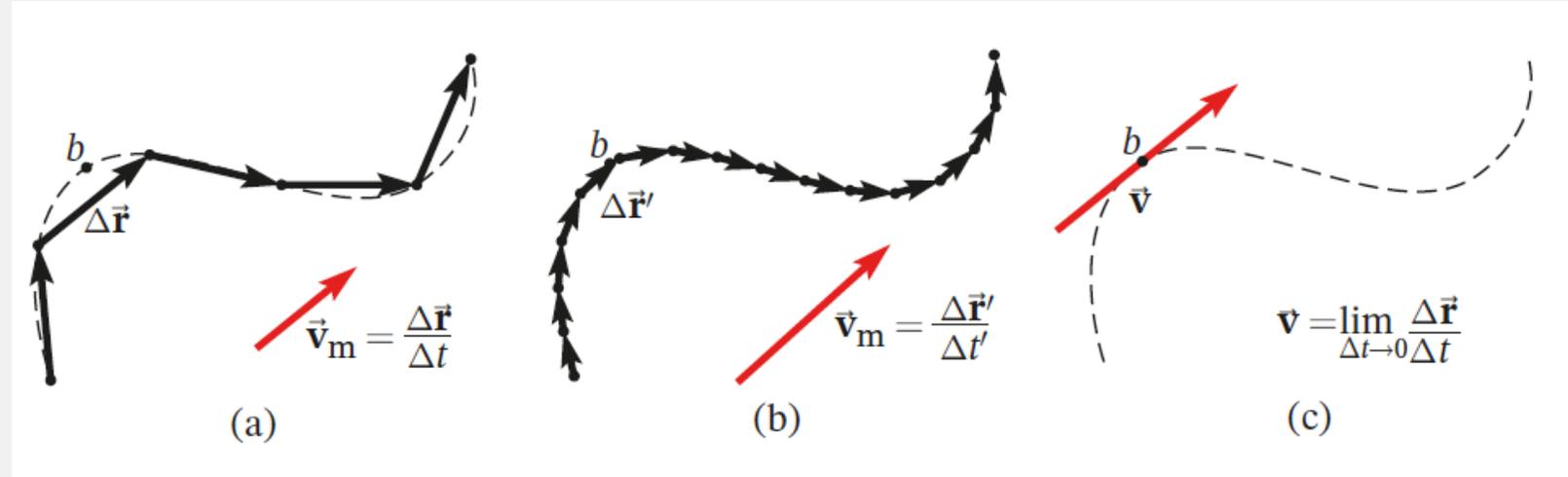
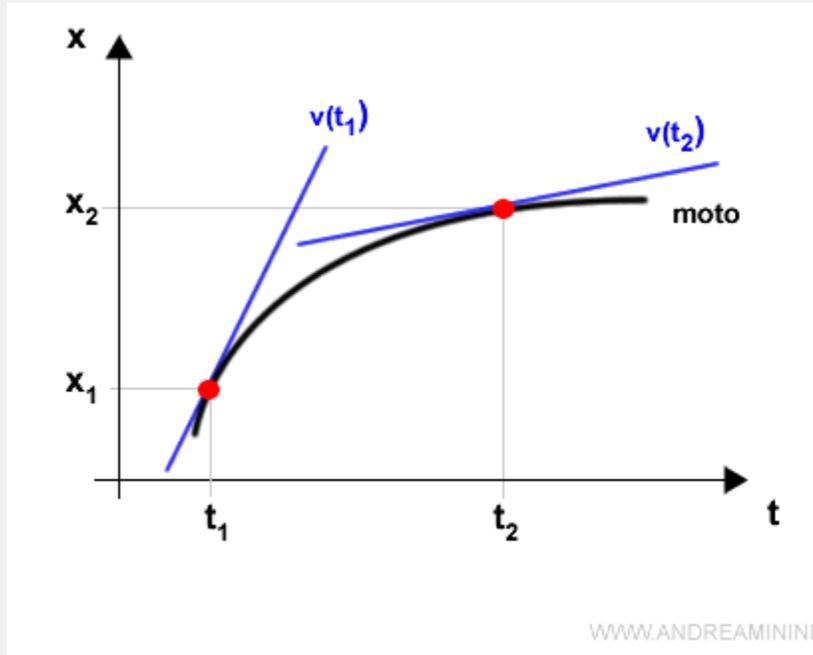
$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_f - \vec{r}_i}{t_f - t_i} \quad [L]/[t] = [Lt^{-1}]$$

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta x \mathbf{i} + \Delta y \mathbf{j} + \Delta z \mathbf{k}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \mathbf{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \mathbf{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t} \mathbf{k}$$

$$v_{m,x} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad , \quad v_{m,y} = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

VETTORI POSIZIONE SPOSTAMENTO, VELOCITÀ E ACCELERAZIONE

Vettore velocità istantanea



In forma scalare:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad v_y = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

Stessa direzione e stesso verso dello spostamento in quell'istante

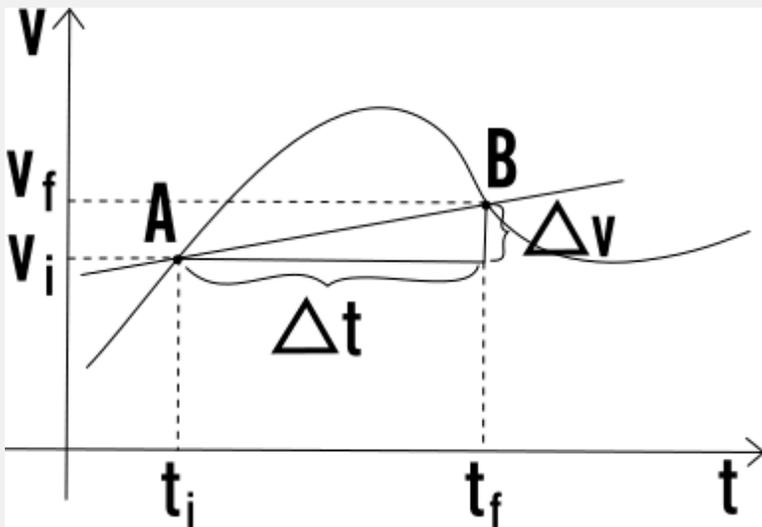
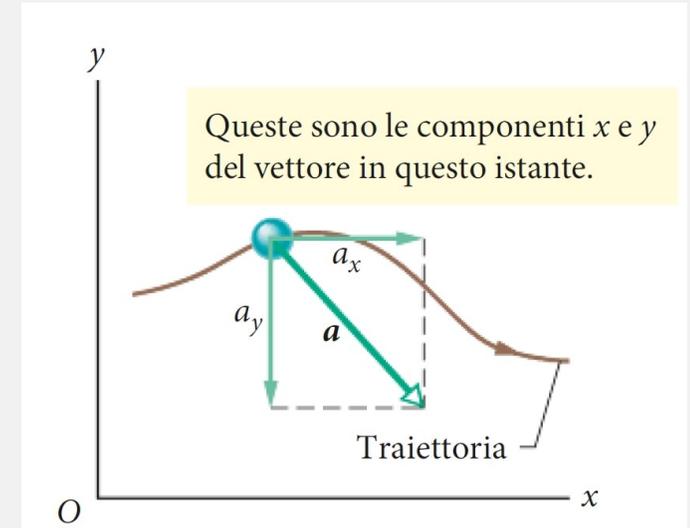
VETTORI POSIZIONE SPOSTAMENTO, VELOCITÀ E ACCELERAZIONE

Vettore accelerazione media

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

$$a_{m,x} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}, a_{m,y} = \frac{\Delta v_y}{\Delta t}$$

Stessa direzione e stesso verso di $\Delta \vec{v}$ $[Lt^{-1}]/[t] = [Lt^{-2}]$

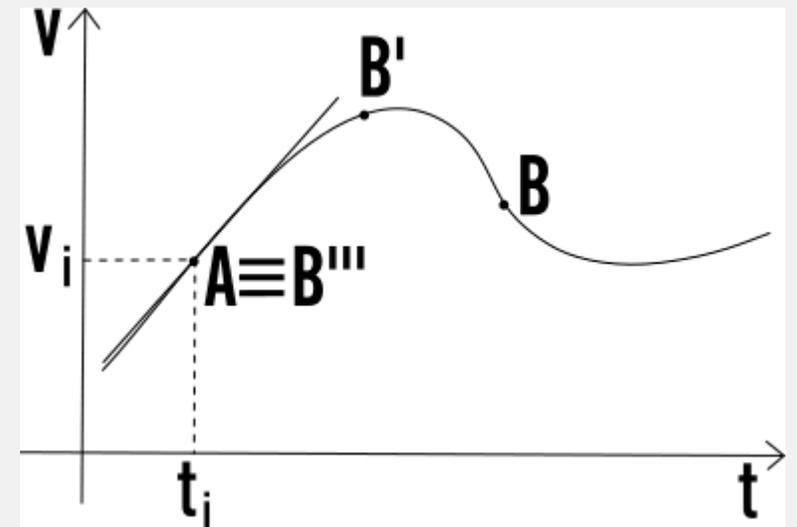
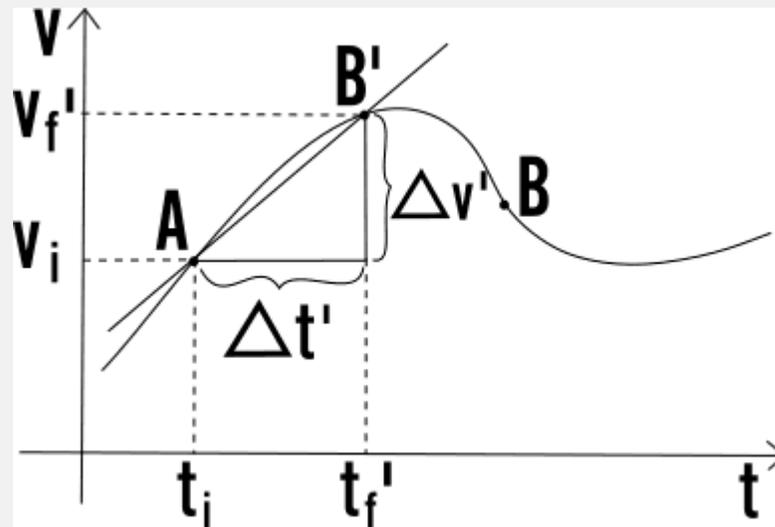
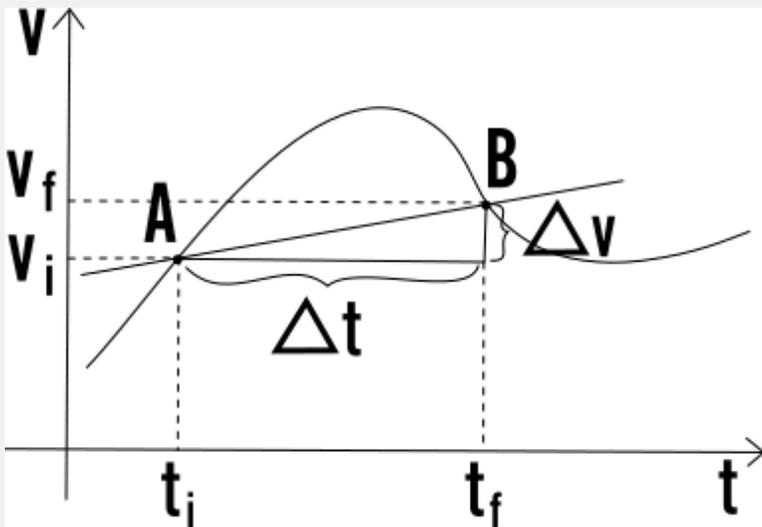


VETTORI POSIZIONE SPOSTAMENTO, VELOCITÀ E ACCELERAZIONE

Vettore accelerazione istantanea

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

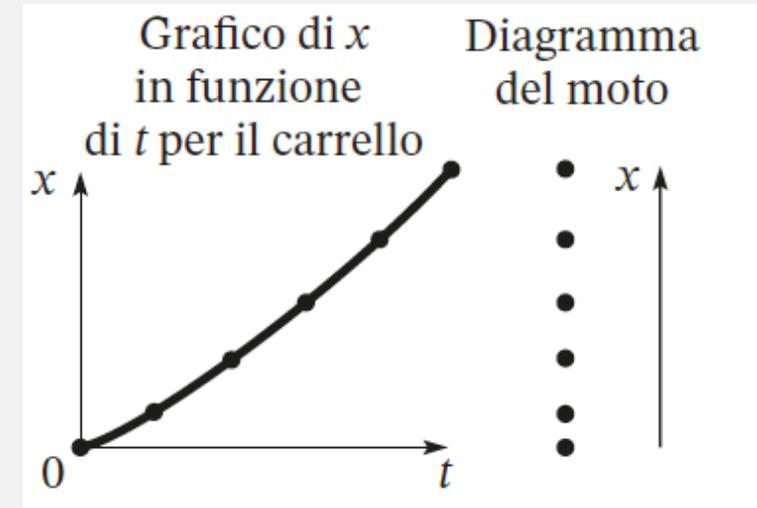
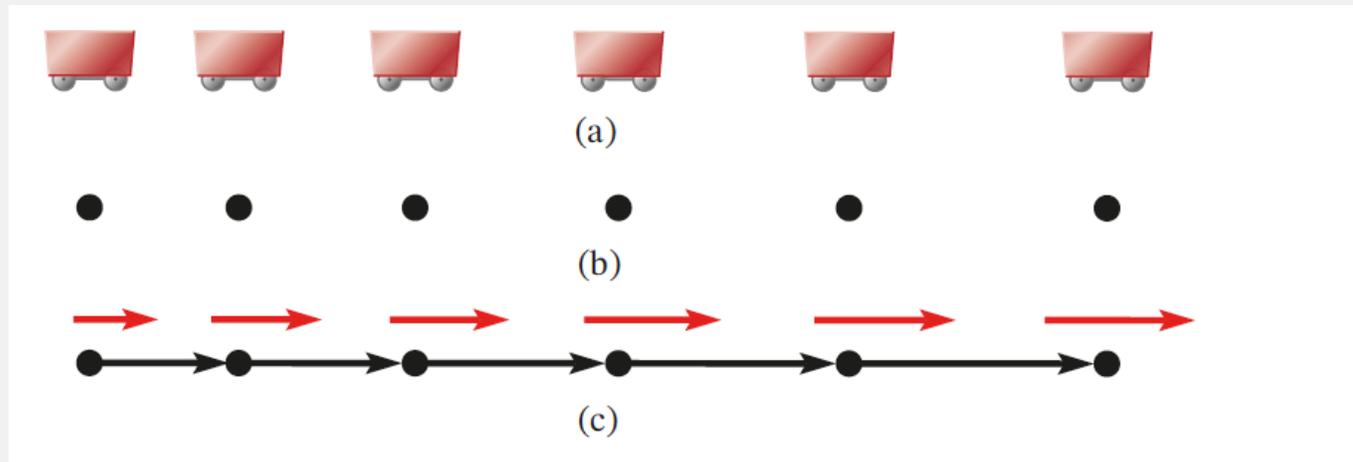
$$a_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \quad , \quad a_y = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta t}$$



VETTORI POSIZIONE SPOSTAMENTO, VELOCITÀ E ACCELERAZIONE

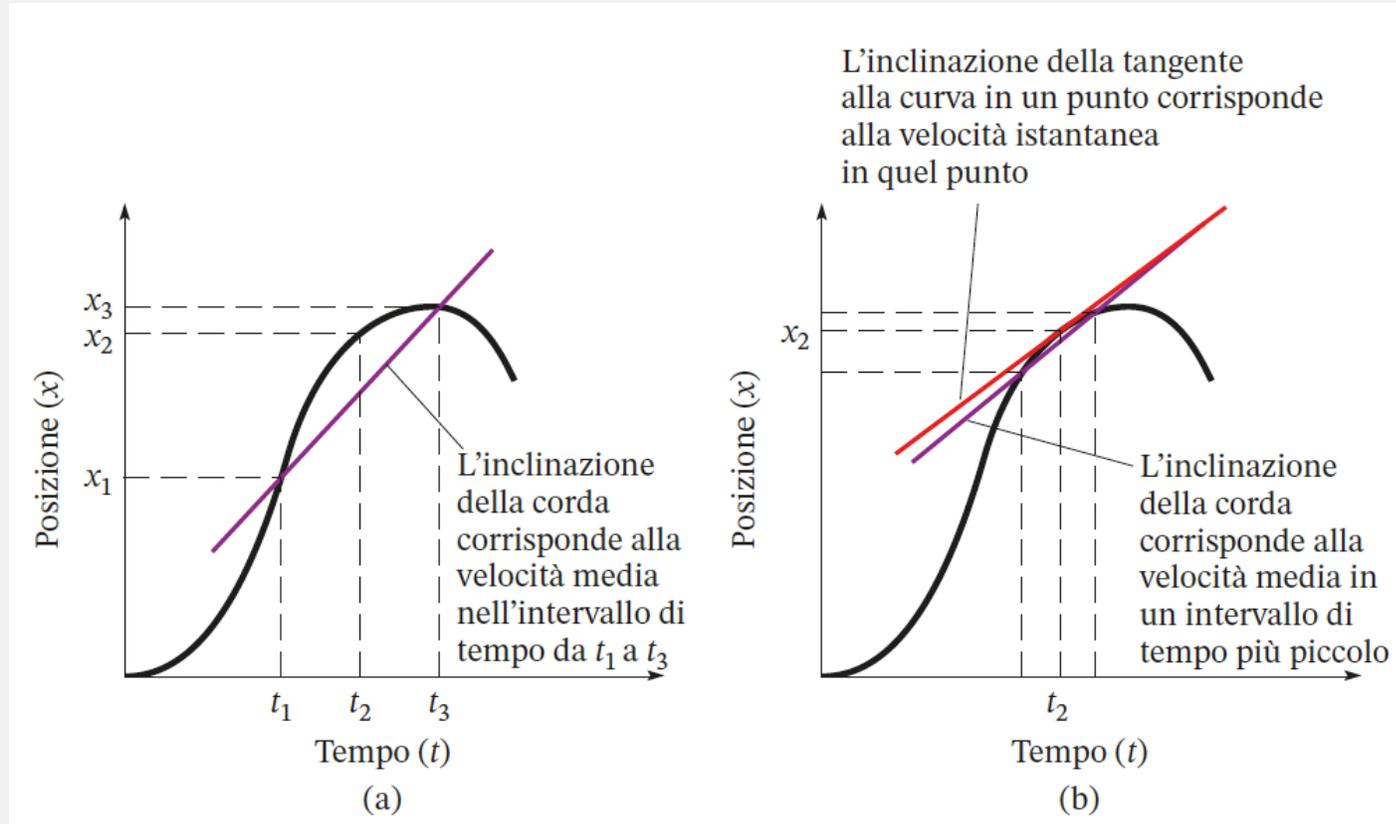
Diagramma del moto

Un diagramma del moto mostra la posizione dell'oggetto in funzione del tempo



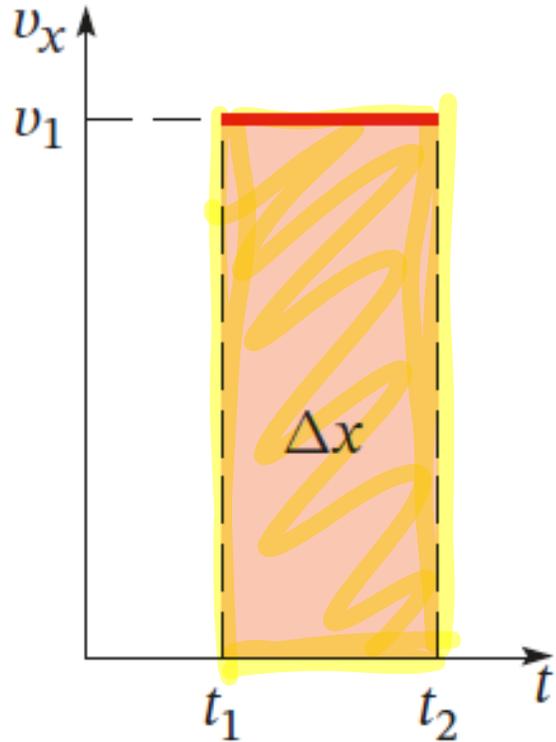
VETTORI POSIZIONE SPOSTAMENTO, VELOCITÀ E ACCELERAZIONE

Relazione grafica tra posizione e velocità



VETTORI POSIZIONE SPOSTAMENTO, VELOCITÀ E ACCELERAZIONE

Relazione grafica tra posizione, tempo e velocità

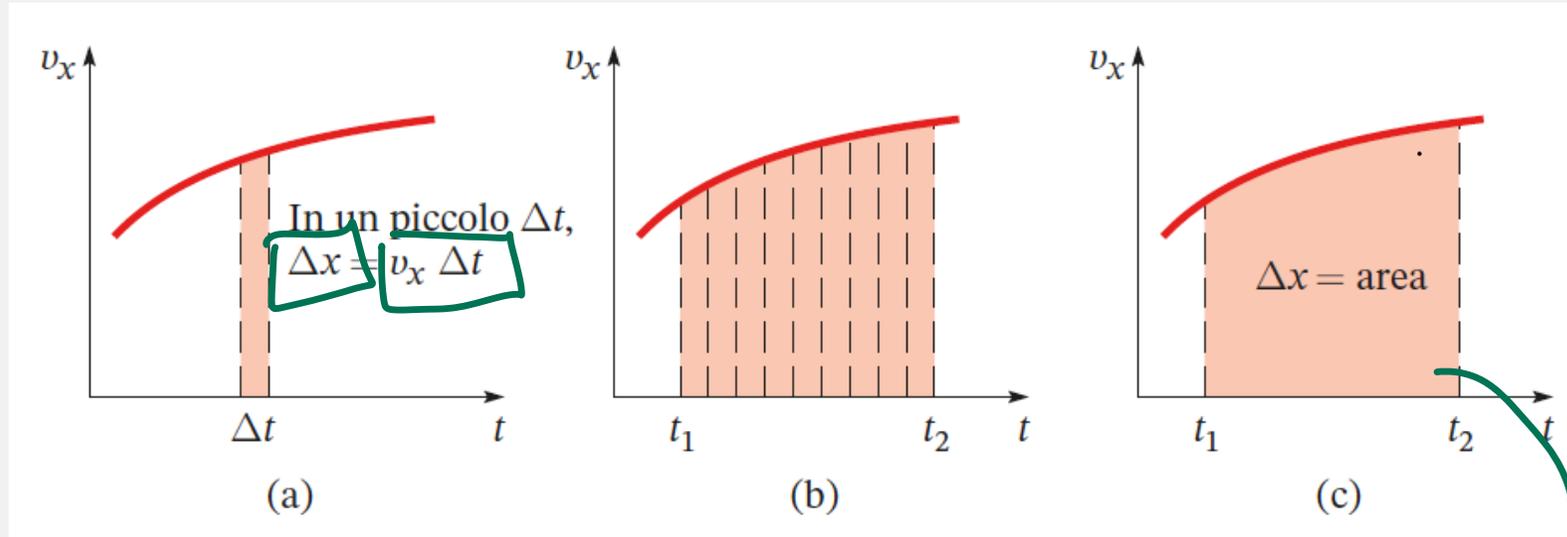


$$v_x = v_{m,x} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$\Delta x = v_x \Delta t$ (per v_x costante)

VETTORI POSIZIONE SPOSTAMENTO, VELOCITÀ E ACCELERAZIONE

Relazione grafica tra posizione, tempo e velocità



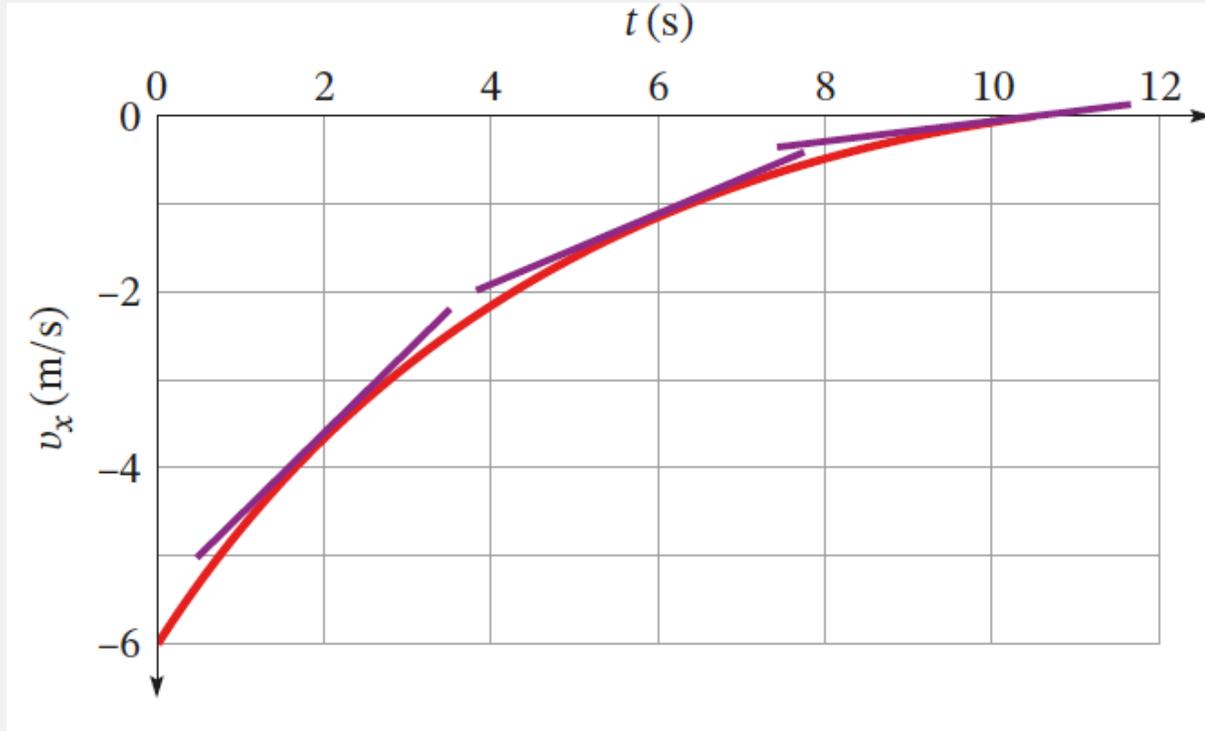
per v_x non costante

$$\Delta x = v_x \cdot \Delta t \rightarrow$$

$$\int v_x dt$$

VETTORI POSIZIONE SPOSTAMENTO, VELOCITÀ E ACCELERAZIONE

Relazione grafica tra velocità e accelerazione



Stessa relazione grafica vista per spostamento e velocità:

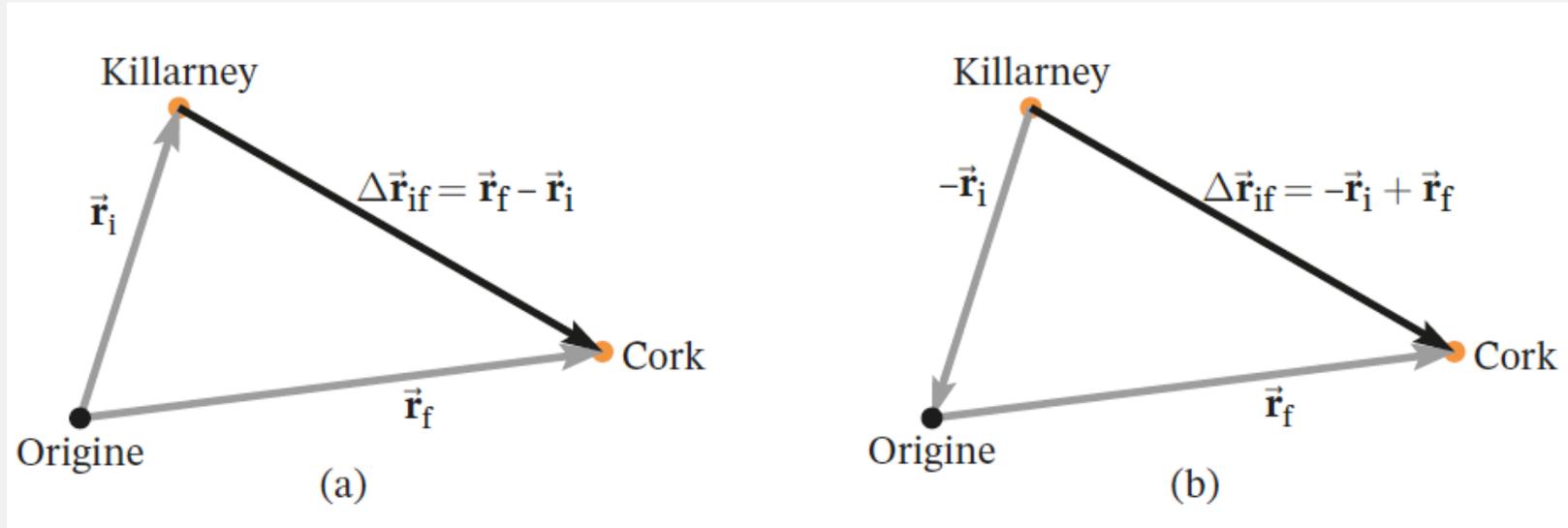
- ✓ a_x è l'inclinazione della tangente in un punto dato della curva $v_x(t)$
- ✓ Δv_x è l'area sottesa alla curva $a_x(t)$ in un certo intervallo di tempo

VETTORI POSIZIONE SPOSTAMENTO, VELOCITÀ E ACCELERAZIONE



Esempio

Due amiche stanno viaggiando in Irlanda e si muovono da Killarney a Cork.

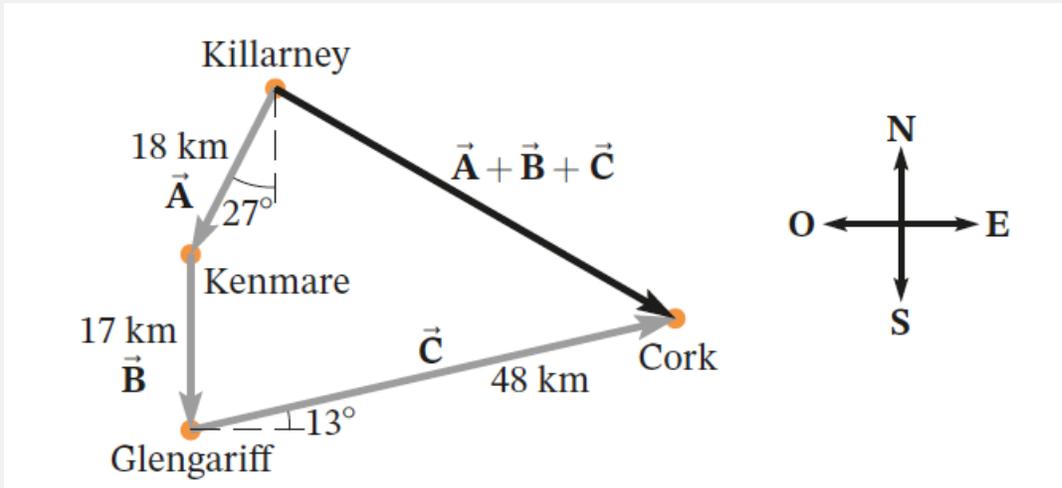


VETTORI POSIZIONE SPOSTAMENTO, VELOCITÀ E ACCELERAZIONE



Esempio

Durante il viaggio da Killarney a Cork, le due amiche si muovono per 18 km lungo una direzione a 27° ovest da sud fino a Kenmare, quindi verso sud per 17 km fino a Glengariff e, infine, per 48 km lungo una direzione a 13° nord da est fino a Cork. Qual è lo spostamento totale (in termini di intensità, direzione e verso) delle due ragazze?

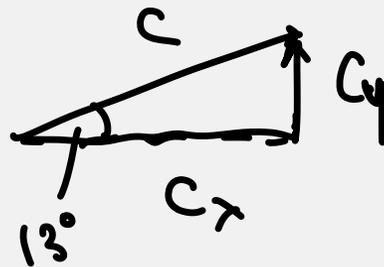
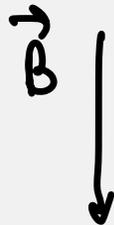
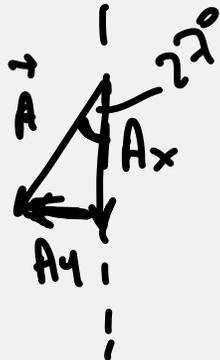
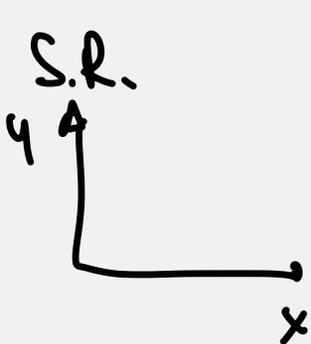


$$\left. \begin{array}{l} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \\ \vec{r}_3 \\ \vec{r}_4 \end{array} \right\} \Delta \vec{r}_{1,4} = \vec{r}_4 - \vec{r}_1$$

$$\vec{A} = \Delta \vec{r}_{1,2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \rightarrow A = 18 \text{ km}$$

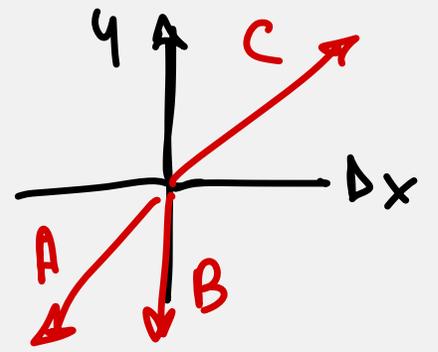
$$\vec{B} = \Delta \vec{r}_{2,3} = \vec{r}_3 - \vec{r}_2 \rightarrow B = 17 \text{ km}$$

$$\vec{C} = \Delta \vec{r}_{3,4} = \vec{r}_4 - \vec{r}_3 \rightarrow C = 48 \text{ km}$$

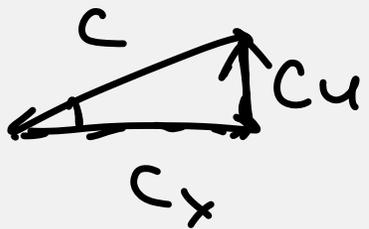


$$A_x = -A \sin 27^\circ = -18 \text{ km} \cdot 0.454 = -8.17 \text{ km}$$

$$A_y = -A \cos 27^\circ = -18 \text{ km} \cdot 0.891 = -16 \text{ km}$$



$$B_x = 0, B_y = -17 \text{ km}$$

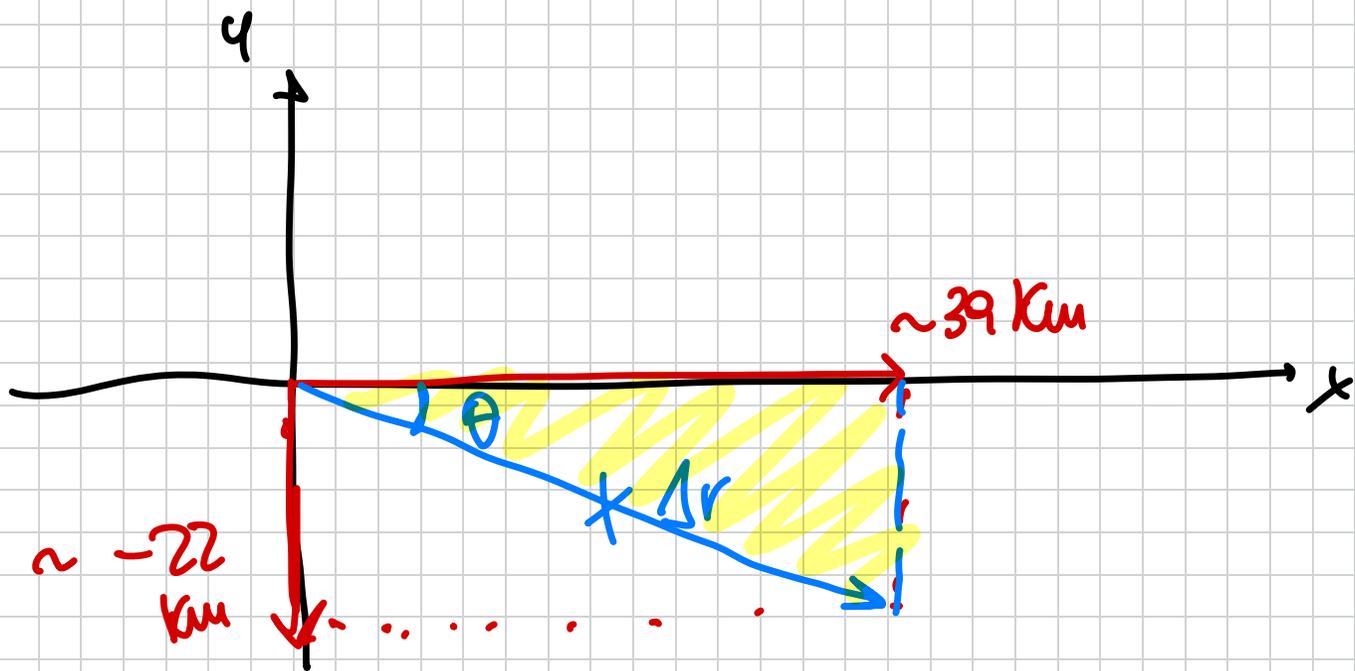


$$C_x = +C \cos 13^\circ = +48 \text{ km} \cdot 0.974 = +46.8 \text{ km}$$

$$C_y = +C \sin 13^\circ = +48 \text{ km} \cdot 0.225 = +10.8 \text{ km}$$

$$\Delta x = C_x + B_x + A_x = 46.8 \text{ km} + 0 \text{ km} + (-8.17 \text{ km}) = +38.63 \text{ km}$$

$$\Delta y = C_y + B_y + A_y = 10.8 \text{ km} + (-17 \text{ km}) + (-16 \text{ km}) = -22.2 \text{ km}$$



$$\Delta x = 38.63 \text{ km}$$

$$\Delta y = -22.2 \text{ km}$$

$$\text{ipotenuse} = \Delta r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(38.63)^2 + (-22.2)^2} = +45 \text{ km}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{22.2 \text{ km}}{38.63 \text{ km}} = 30^\circ$$

VETTORI POSIZIONE SPOSTAMENTO, VELOCITÀ E ACCELERAZIONE

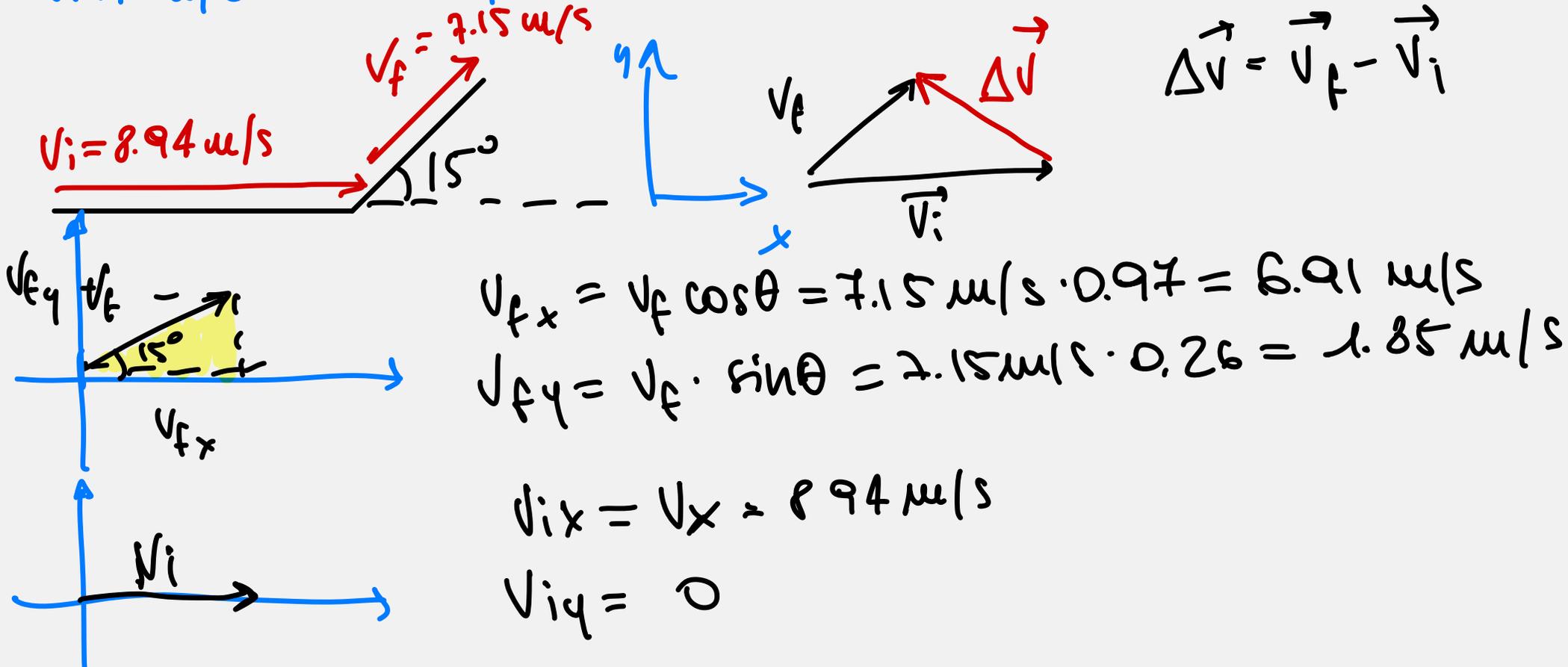


Esempio

Una pattinatrice si sta muovendo su una strada pianeggiante con una velocità di 8.94 m/s; dopo 120.0 s la strada comincia a salire (con un angolo di inclinazione di 15°) e la ragazza mantiene una velocità di 7.15 m/s.

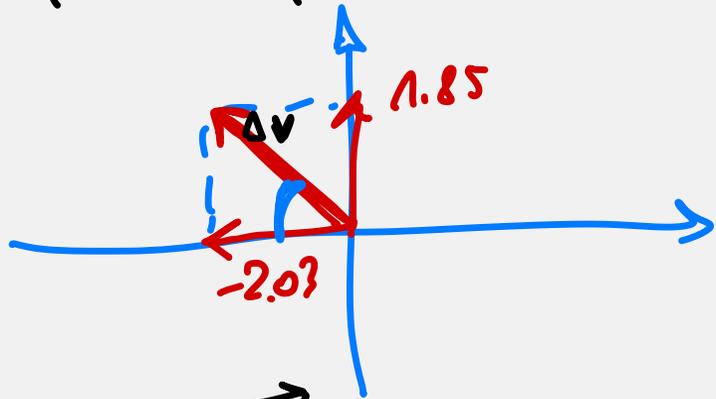
- (a) Qual è la variazione di velocità della pattinatrice?
(b) Qual è l'accelerazione media della ragazza nell'intervallo di tempo di 120 s?

$$8.94 \text{ m/s} - 7.15 \text{ m/s} = 1.79 \text{ m/s} \rightarrow \text{variaz. modulo}$$



$$v_x = v_{fx} - v_{ix} = (6.91 - 8.94) \text{ m/s} = -2.03 \text{ m/s}$$

$$v_y = v_{fy} - v_{iy} = (1.85 - 0) \text{ m/s} = +1.85 \text{ m/s}$$



$$\Delta v = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2} \rightarrow 2.74 \text{ m/s}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{v_y}{v_x} = \tan^{-1} \frac{1.85 \text{ m/s}}{2.03 \text{ m/s}} = 42.3^\circ$$

$$\vec{a}_m = \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t} = \frac{2.74 \text{ m/s}}{120 \text{ s}} = 0.023 \text{ m/s}^2$$

direzione di $\vec{a}_m =$ direzione di $\Delta \vec{v} \rightarrow 42.3^\circ$ rispetto all'asse orizzontale.

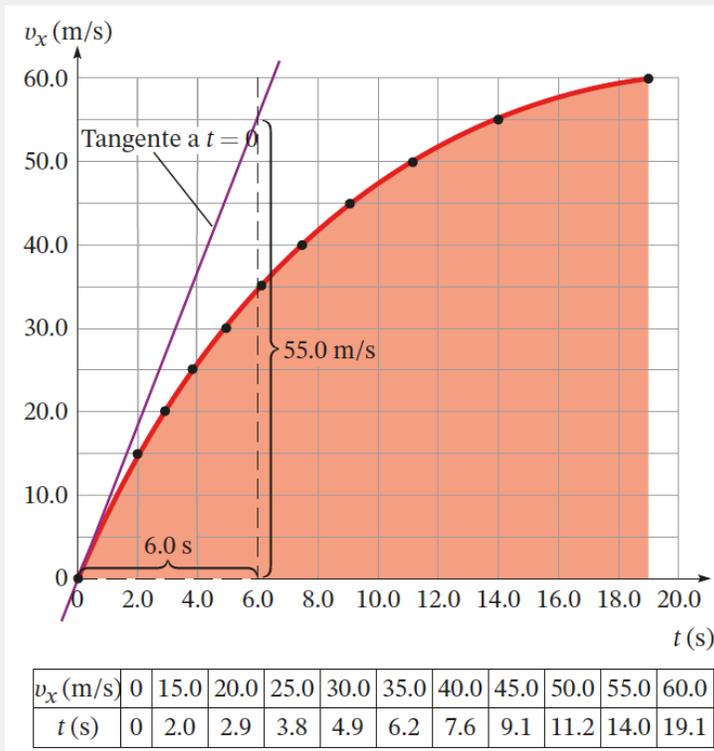
VETTORI POSIZIONE SPOSTAMENTO, VELOCITÀ E ACCELERAZIONE



Esempio

Una vettura, partendo da ferma, può raggiungere la velocità di 30 m/s in 4.9 s.

- Qual è l'accelerazione media dell'auto quando passa da 0 a 30 m/s?
- Qual è la sua massima accelerazione?
- A quanto ammonta lo spostamento della vettura nei primi 19 secondi (cioè quando raggiunge i 60 m/s)?
- Qual è la sua velocità media in quest'intervallo di tempo?

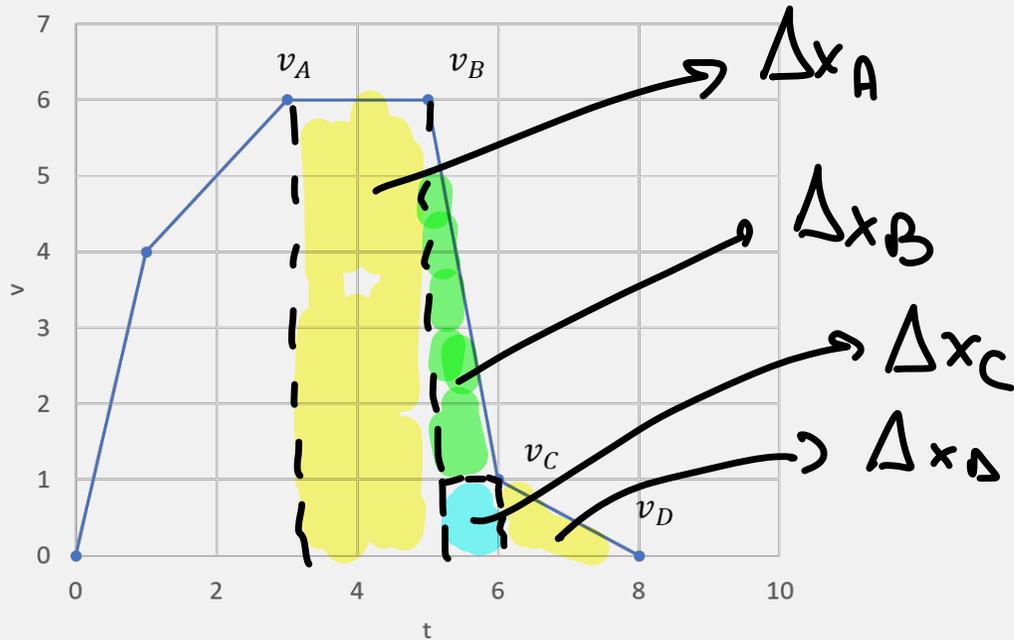


VETTORI POSIZIONE SPOSTAMENTO, VELOCITÀ E ACCELERAZIONE



Esempio

Il grafico mostra sull'asse verticale la velocità (m/s) di uno skateboard mentre si muove su un rettilineo. Qual è la distanza percorsa dallo skateboard tra $t=3.0s$ e $t=8.0s$?



$$\Delta x = \sum_{i=1}^n v_i \cdot \Delta t$$

$$\Delta x = \Delta x_A + \Delta x_B + \Delta x_C + \Delta x_D$$

$$\Delta x_A = v_A \cdot (t_B - t_A) = 6 \text{ m/s} \cdot (5 \text{ s} - 3 \text{ s}) = 12 \text{ m}$$

$$\Delta x_B = \frac{(t_C - t_B) \cdot (v_B + v_C)}{2} = \frac{(6 \text{ s} - 5 \text{ s}) \cdot (6 \text{ m/s} + 1 \text{ m/s})}{2} = 2.5 \text{ m}$$

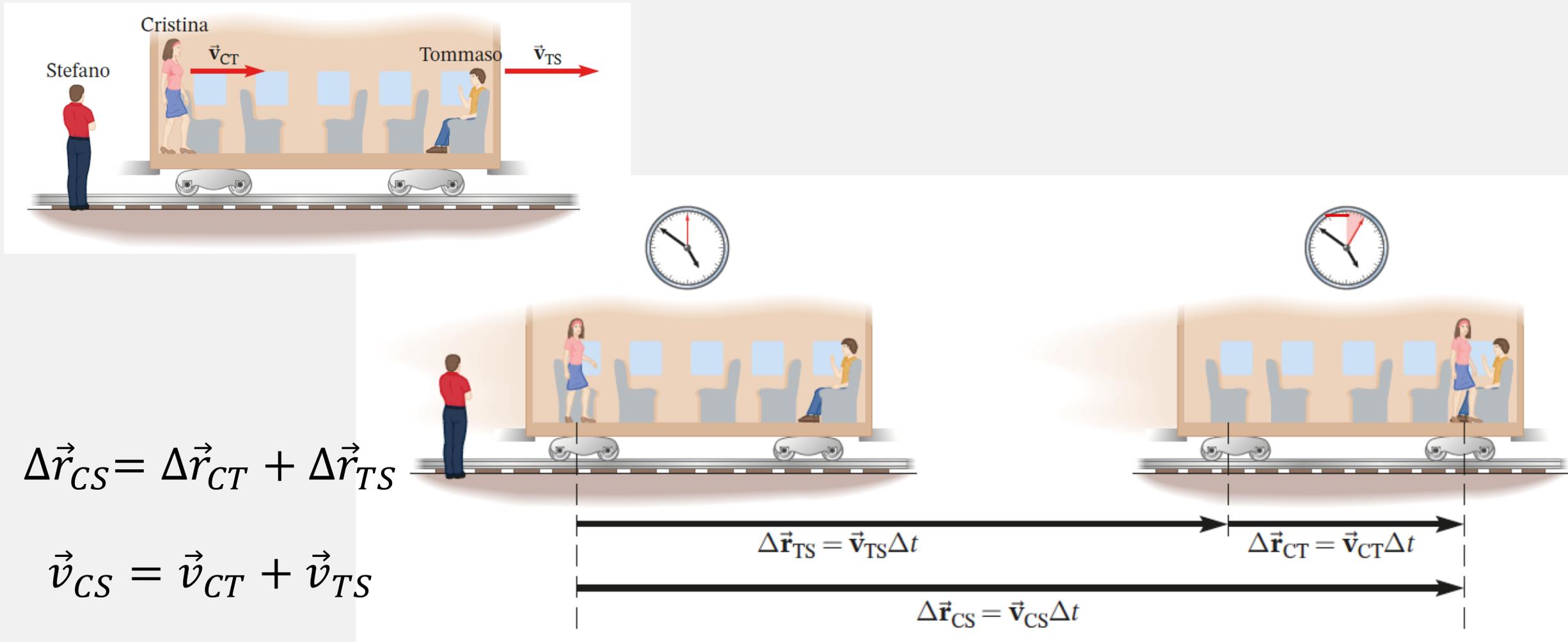
$$\Delta x_C = (v_C - v_B) \cdot (t_C - t_B) = 1 \text{ m}$$

$$\Delta x_D = \frac{(t_D - t_C) \cdot (v_C + v_D)}{2} = 1 \text{ m}$$

$$\Delta x = 12 \text{ m} + 2.5 \text{ m} + 1 \text{ m} + 1 \text{ m} = 16.5 \text{ m}$$

VETTORI POSIZIONE SPOSTAMENTO, VELOCITÀ E ACCELERAZIONE

Velocità relativa e sistemi di riferimento



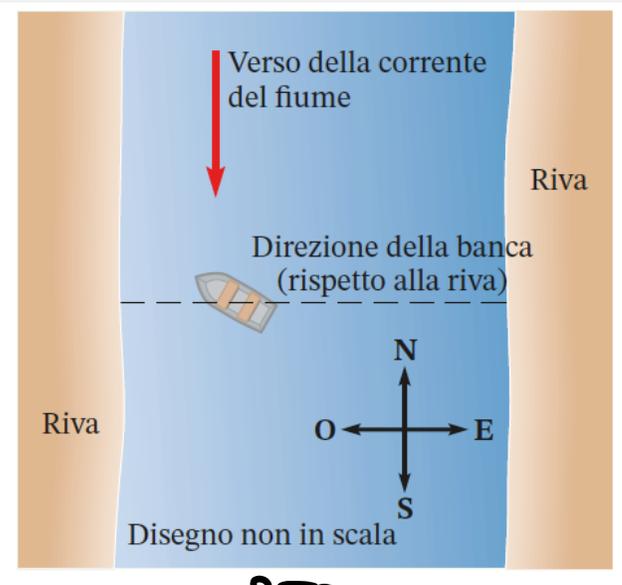
VETTORI POSIZIONE SPOSTAMENTO, VELOCITÀ E ACCELERAZIONE



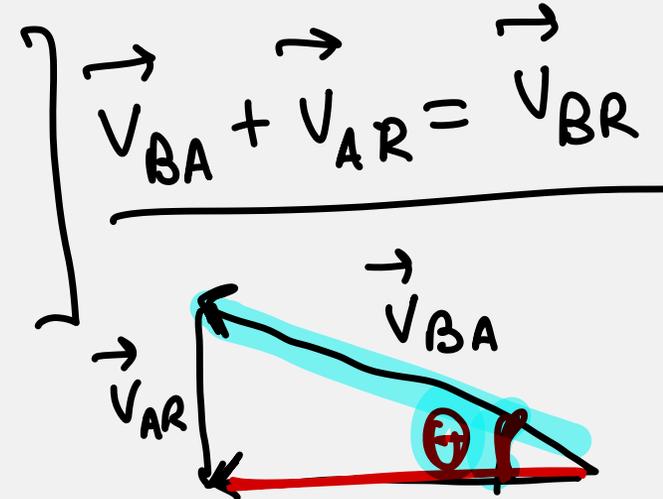
Esempio

Giacomo vuole attraversare un fiume dalla riva est a quella ovest. La larghezza del fiume è di 250 m e l'acqua del fiume scorre da nord verso sud alla velocità di 0.61 m/s. Giacomo impiega 4.2 min per arrivare sull'altra riva. Affinché possa seguire la rotta voluta (cioè perpendicolare alla costa, da est a ovest), in che direzione avrà dovuto dirigere la sua barca?

A quale velocità (rispetto l'acqua) si muove l'imbarcazione?



$$\vec{v}_{AR} = 0.61 \text{ m/s} \downarrow$$
$$\vec{v}_{BR} \leftarrow$$
$$\vec{v}_{BA} \text{ (modulo, verso, diriz.)}$$



$$v_{BR} = \frac{250 \text{ m}}{4.2 \text{ min} \cdot 60 \text{ s/min}} = 0.992 \text{ m/s}$$

$$v_{BA} = \sqrt{v_{AR}^2 + v_{BR}^2} = \sqrt{0.61^2 + 0.992^2} = 1.16 \text{ m/s}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{v_{AR}}{v_{BR}} = \tan^{-1} \frac{0.61 \text{ m/s}}{0.992 \text{ m/s}} = 32^\circ$$