• Dire per quali valori di x è verificata la disequazione:

$$\frac{x+2}{x+1} \geq 1$$

a. $\forall x \in \mathbb{R}$
b. $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq -1$
c. $x > -1$
d. $x > -1$ oppure $x \leq -2$
e. $x \leq -2$

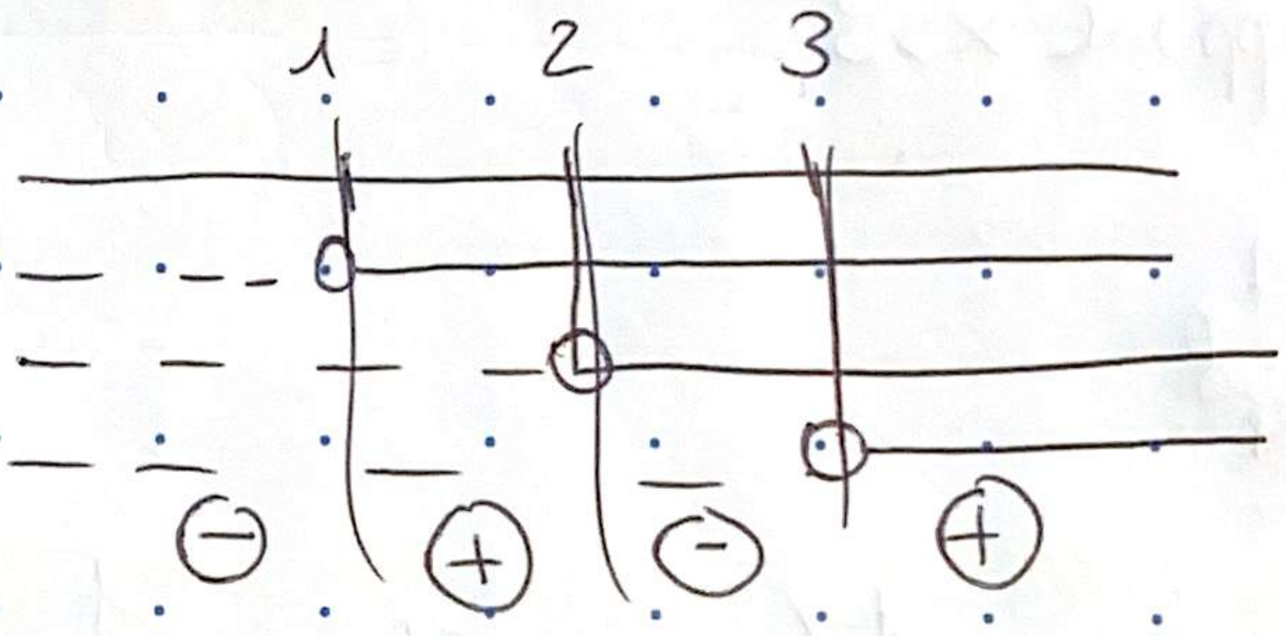
Imponiamo $x \neq -1$ e portiamo tutto al primo membro:

$$\frac{x+2-x-1}{x+1} \geq 0 \rightarrow \frac{1}{x+1} \geq 0$$

$x+1 \geq 0$ $x \geq -1$, ma $x \neq -1 \rightarrow x > -1$

• Svolgere la seguente disequazione: $(x-1)(x-2)(x-3)>0$

$$\begin{cases} x-1>0 \rightarrow x>1 \\ x-2>0 \rightarrow x>2 \\ x-3>0 \rightarrow x>3 \end{cases}$$



$1<x<2 \cup x>3$

- Trovare il valore di x per cui è verificata la seguente equazione:

$$\log_{10}(4x)+\log_{10}(9x)=2$$

Il campo di esistenza è per $x>0$.
Riscrivo (proprietà dei log): $\log_{10}(4x\cdot 9x)=2$

$$\log_{10}(36x^2)=2 \rightarrow 10^{\log_{10}(36x^2)}=10^2$$

$$36x^2=10^2$$

Ricordando che $x>0 \rightarrow 6x=10 \rightarrow x=\frac{10}{6}$

- La disequazione $3^{1+x}-3^{1-x}>8$ è verificata per:

a. $x>1$
b. $x<-\frac{1}{3}$ oppure $x>3$
c. $x=2$
d. $-1<x<1$
e. $x>\log_9 8$

$$3^{1+x} \rightarrow 3\cdot 3^x \, ; \quad 3^{1-x} \rightarrow 3\cdot 3^{-x}=3\cdot\frac{1}{3^x}=\frac{3}{3^x}$$

Quindi:

$$3\cdot 3^x-\frac{3}{3^x}>8 \rightarrow \text{chiamo } 3^x=t$$

$$3t-\frac{3}{t}>8 \rightarrow 3t-\frac{3}{t}-8>0 \xrightarrow{\cdot t} 3t^2-3-8t>0$$

$$t<-\frac{1}{3} \cup t>3$$

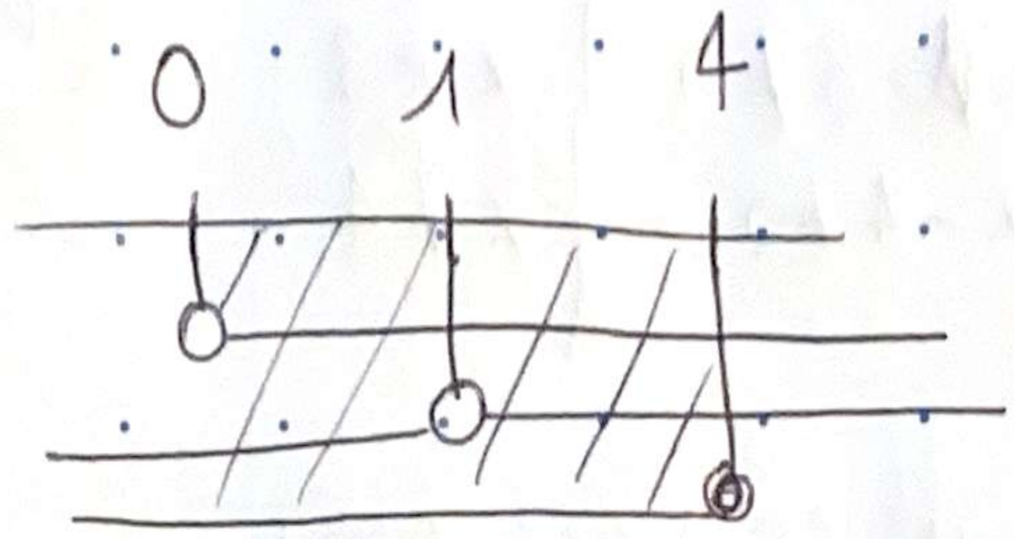
torno $3^x \rightarrow \underbrace{3^x<-\frac{1}{3}}_{\text{impossibile}} \cup \underbrace{3^x>3} \rightarrow x>1$ perché $\log_3 3^x>\log_3 3$

$$x>1$$

- Stabilire il dominio della seguente funzione:

$$f(x)=\frac{\sqrt{4-x}}{\log_5 x}$$

$$C.E. \begin{cases} x>0 \\ \log_5 x \neq 0 \longrightarrow x\neq 1 \\ 4-x\geq 0 \longrightarrow x\leq 4 \end{cases}$$



$0<x\leq 4,\ x\neq 1$

- Calcolare i limiti per $x\to 0$, $x\to+\infty$ e $x\to-\infty$ della seguente funzione:

$$f(x)=x-\sin x$$

$\lim_{x\to 0} x-\sin x = 0-\sin 0 = 0-0=0$

$\lim_{x\to+\infty} x-\sin x = +\infty$ ($\lim_{x\to\pm\infty}\sin x$ non esiste; $\sin x$ è limitata quindi trascurabile per $x\to\pm\infty$)

$\lim_{x\to-\infty} x-\sin x = -\infty$.

- Calcolare i limiti per $x\to 1$, $x\to 2$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$ delle seguente funzione:

$$f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x-1}$$

$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x-2)}{\cancel{(x-1)}} = \lim_{x\to 1}(x-2) = 1-2=-1$

$\lim_{x\to 2}$ " " $\lim_{x\to 2}(x-2) = 2-2=0$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=+\infty$ (gradi), $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=-\infty$ (gradi)

• Studiare la seguente funzione in termini di dominio, intersezioni con gli assi e segno:

$$f(x)=\frac{(x-6)(x-3)}{x(x-8)(x-4)}$$

C.E. $\rightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ x-8\neq 0 \\ x-4\neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x\neq 0 \\ x\neq 8 \\ x\neq 4 \end{cases} \quad (-\infty,0)\cup(0,4)\cup(4,8)\cup(8,+\infty)$

INTERSEZIONI CON GLI ASSI

$x=0$ per inters. con $y \rightarrow$ impossibile x C.E.

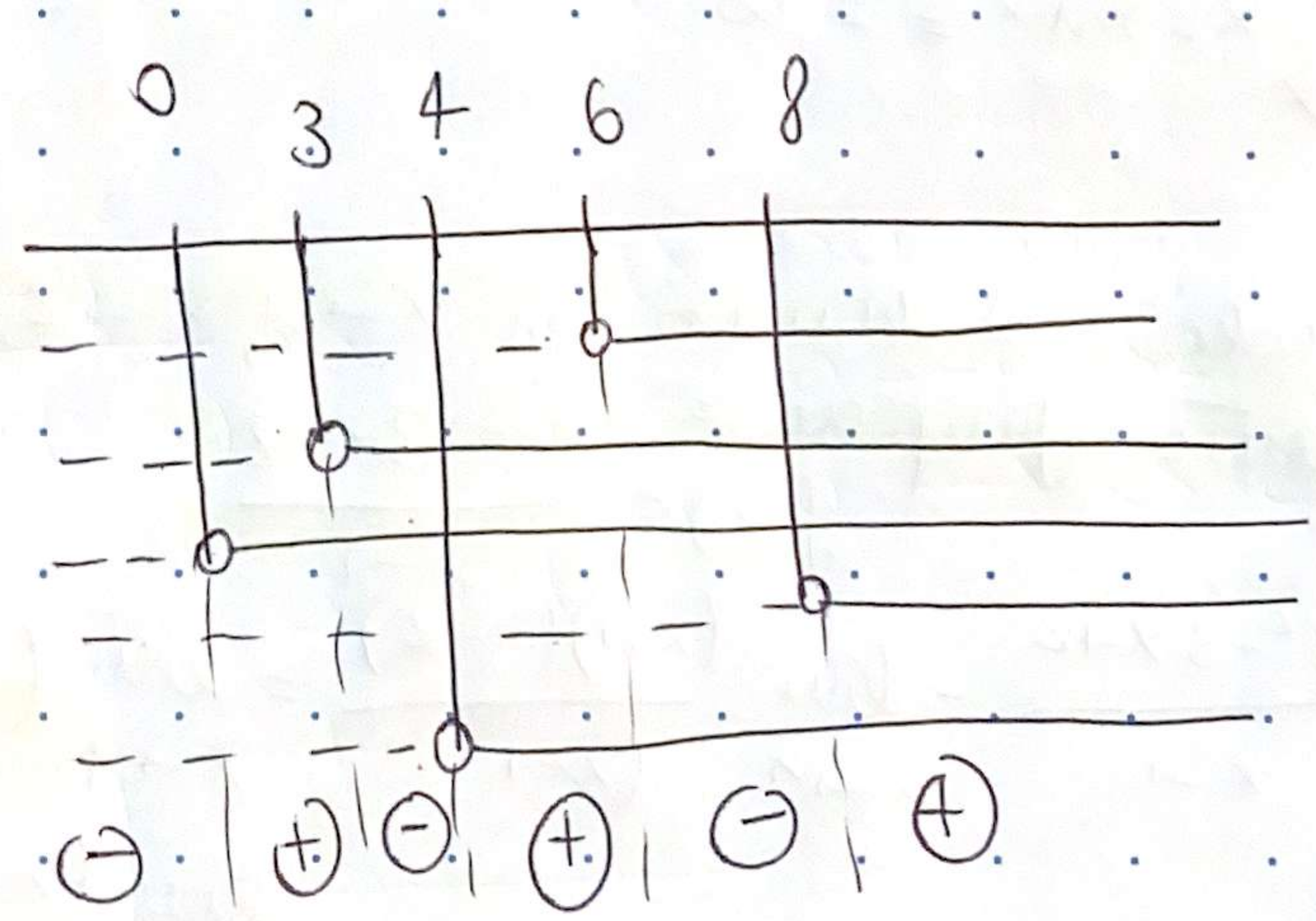
$y=0 \rightarrow \dfrac{(x-6)(x-3)}{x(x-8)(x-4)}=0 \rightarrow$ il denominatore non può essere uguale a 0

$(x-6)(x-3)=0$

$\begin{cases} x-6=0 \\ x-3=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=6 \\ x=3 \end{cases} \rightarrow$ punti di intersez. con x: $A(3,0)$ $B(6,0)$

SEGNO $\rightarrow f(x)>0$

$\begin{cases} x-6>0 \\ x-3>0 \\ x>0 \\ x-8>0 \\ x-4>0 \end{cases} \quad \begin{cases} x>6 \\ x>3 \\ x>0 \\ x>8 \\ x>4 \end{cases}$



$f(x)>$ per $0<x<3$, $4<x<6$, $x>8$.

- Definire il dominio e trovare gli eventuali asintoti della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{x^2+2x-1}{x^2-1}$$

C.E. $x^2-1 \neq 0 \quad x^2 \neq 1 \quad x \neq \pm 1 \rightarrow (-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,+\infty)$

ASINTOTI

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+2x-1}{x^2-1} = 1 \text{ (coefficienti)} \rightarrow y=1 \rightarrow \text{AS. ORIZZ.}$$

$$\lim_{x\to-1^-} \frac{x^2+2x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to-1^-} \frac{x^2+2x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1-2-1}{-2\cdot0^-} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to-1^+} \frac{x^2+2x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to-1^+} \frac{x^2+2x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{-2}{-2\cdot0^+} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

$x=-1 \rightarrow$ AS. VERT. DESTRO & SINISTRO

$$\lim_{x\to1^-} \frac{x^2+2x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to1^-} \frac{x^2+2x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{0^-\cdot2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to1^+} \frac{x^2+2x-1}{(x+1)(x-1)} = \frac{2}{0^+\cdot2} = +\infty$$

$x=1 \rightarrow$ AS VERTIC. DESTRO & SINISTRO

• Studiare dominio, intersezioni con gli assi e segno:

$$f(x)=\frac{x^2-6x+9}{x^2-4}$$

$$f(x)=\frac{(x-3)^2}{(x-2)(x+2)}$$

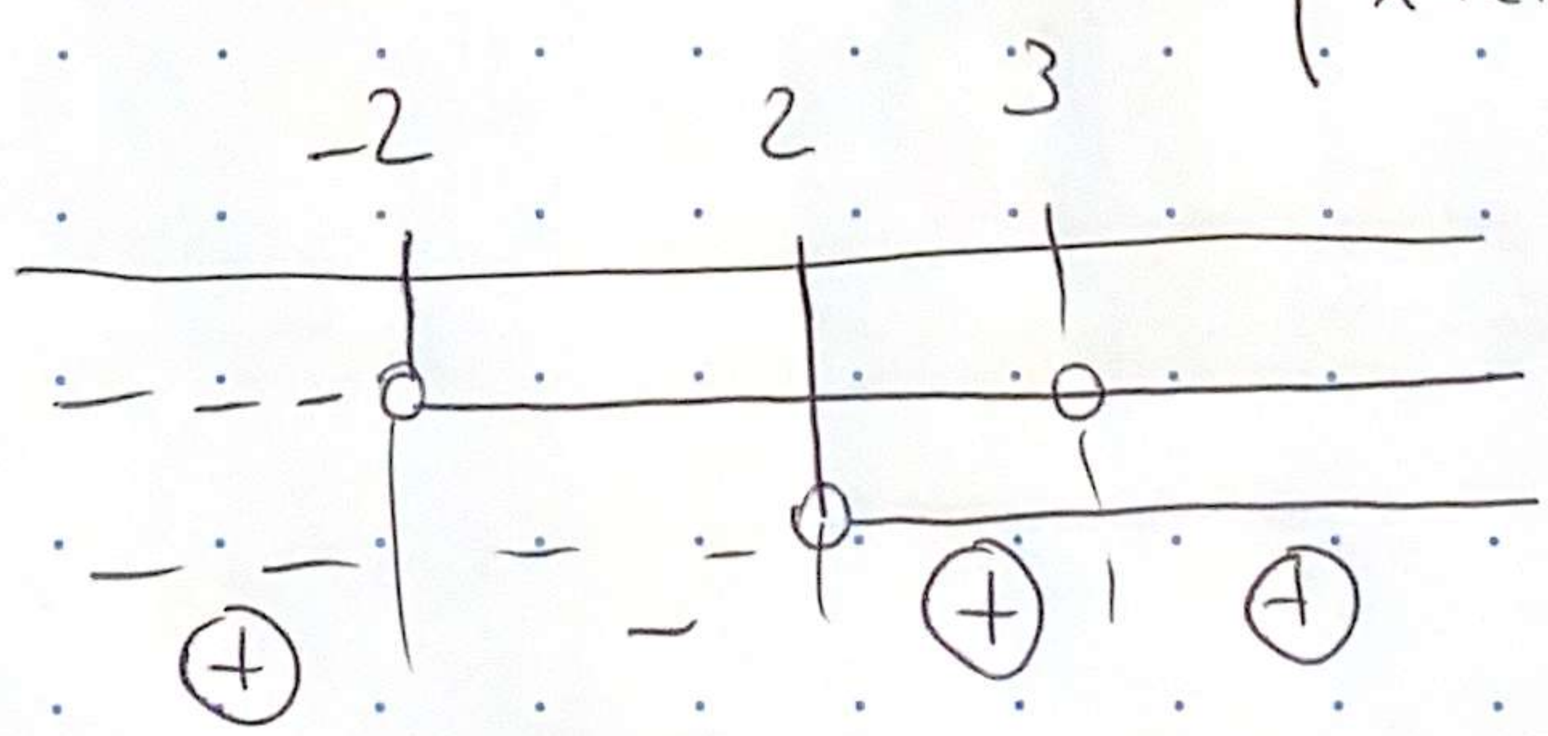
C.E. $\rightarrow x\neq 2,\ x\neq -2 \rightarrow (-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$

INTERSEZIONI: con y $\rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\dfrac{(x-3)^2}{(x-2)(x+2)} \end{cases} \rightarrow y=\dfrac{(0-3)^2}{(0-2)(0+2)}=-\dfrac{9}{4}$

$A\left(0,-\frac{9}{4}\right)$

con x $\rightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=\dfrac{(x-3)^2}{(x+2)(x-2)} \end{cases} \rightarrow x=3 \rightarrow B(3,0)$

SEGNO $\rightarrow f(x)>0 \rightarrow \dfrac{(x-3)^2}{(x-2)(x+2)}>0$ $\begin{cases} (x-3)^2>0 \rightarrow \text{sempre con } x\neq 3 \\ x-2>0 \rightarrow x>2 \\ x+2>0 \rightarrow x>-2 \end{cases}$



$f(x)>0$ se $x<-2$ e $x>2$, con $x\neq 3$

oppure $x<-2,\ 2<x<3,\ x>3$

• $f(x) = \dfrac{x^2+2x-15}{x^2-9}$ → studiare dominio, intersezioni con gli assi, segno, asintoti

$C.E. \Rightarrow x \neq \pm 3 \longrightarrow D = \{\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq \pm 3\}$

DOPO AVER STABILITO IL DOMINIO, POSSO SEMPLIFICARE =

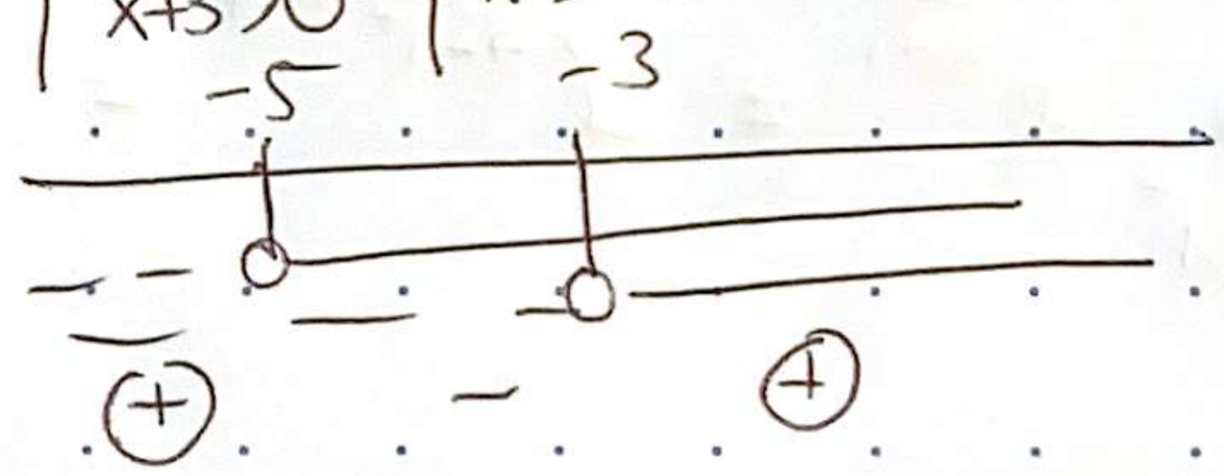
$$f(x) = \frac{(x+5)\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}(x+3)} = \frac{x+5}{x+3}$$

INTERSEZIONI: $\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{x+5}{x+3} \end{cases} \rightarrow y = \frac{5}{3} \quad A\left(0, \frac{5}{3}\right)$

$\begin{cases} y = 0 \\ y = \dfrac{x+5}{x+3} \end{cases} \longrightarrow x = -5 \quad B(-5, 0)$

SEGNO → $f(x) > 0$ → $\dfrac{x+5}{x+3} > 0$ $\begin{cases} x+5 > 0 \\ x+3 > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x > -5 \\ x > -3 \end{cases}$

$f(x) > 0$ se $x < -5$ e $x > -3$



ASINTOTI

$\lim_{x \to -3^+} \dfrac{x+5}{x+3} = \dfrac{2}{0^+} = +\infty$, $\lim_{x \to -3^-} \dfrac{x+5}{x+3} = \dfrac{2}{0^-} = -\infty$] $x = -3$ AS. VERT. DX e SX

$\lim_{x \to +3^{\pm}} \dfrac{x+5}{x+3} = 8/9 \rightarrow$ no as. vert.

$\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x+5}{x+3} = \dfrac{\infty}{\infty} \rightarrow 1/1 = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x+5}{x+3} = \dfrac{\infty}{\infty} \Rightarrow 1/1 = 1$] $y = 1$ AS. ORIZZ.

- **Dominio, intersezioni, segno e asintoti = $f(x) = e^{\frac{x}{x+1}}$**

C.E. $\rightarrow x \neq -1$ (denominatore) $D = \mathbb{R} - \{-1\}$

INTERSEZ. $\rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = e^{\frac{x}{x+1}} \rightarrow y = e^{0/1} = e^{0} = 1 \rightarrow A(0,1) \end{cases}$

$y = 0 \rightarrow$ mai : esponenziale

SEGNO $\rightarrow$ sempre positiva $\rightarrow$ esponenziale

ASINTOTI:

$$\lim_{x \to \pm\infty} e^{\frac{x}{x+1}} = e^{\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x+1}} = e^{1} = e \longrightarrow y = e \text{ AS. ORIZZ.}$$

$$\lim_{x \to -1^+} e^{\frac{x}{x+1}} = e^{\lim_{x \to -1^+} \frac{x}{x+1}} = e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to -1^-} e^{\frac{x}{x+1}} = e^{\lim_{x \to -1^-} \frac{x}{x+1}} = e^{+\infty} = +\infty \longrightarrow x = -1 \text{ AS. VERT. SINISTRO}$$