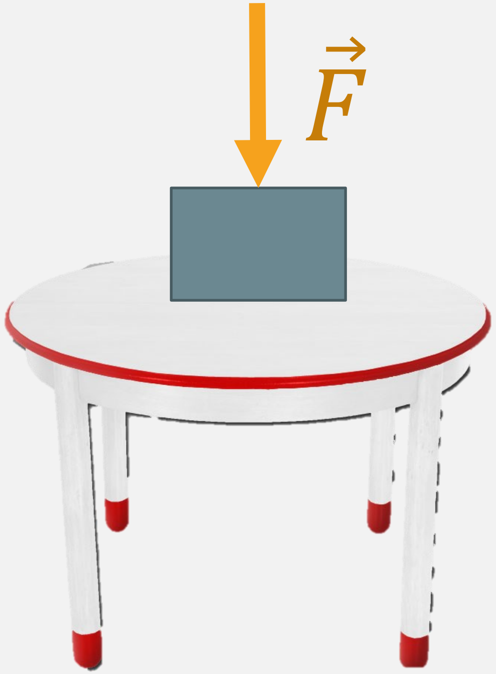
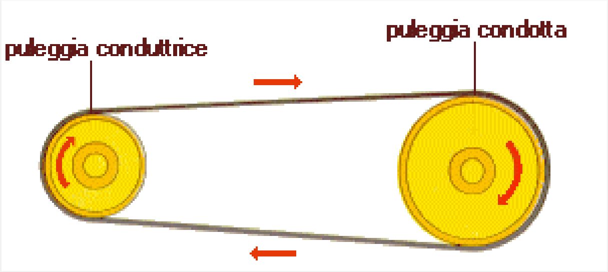
DINAMICA pt.II

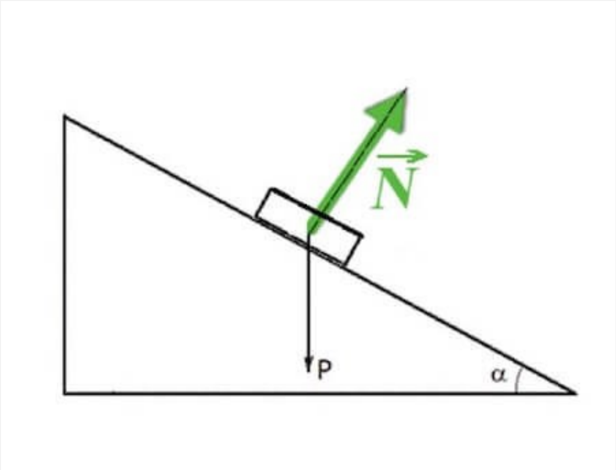
1. Forze vincolari
    a) Forza normale
    b) Tensione
    c) Attrito

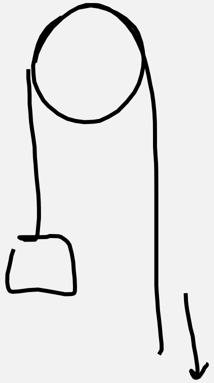
LE FORZE DI CONTATTO

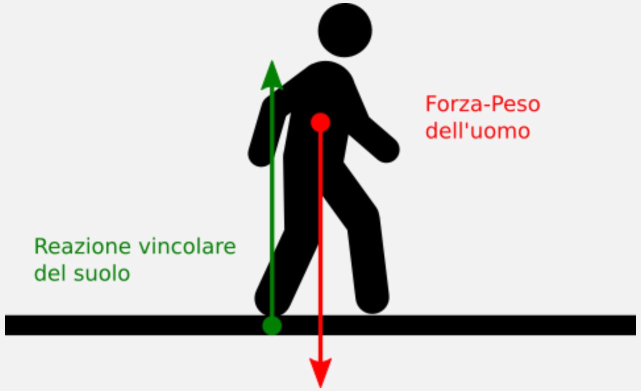
FORZA VINCOLARE o REAZIONE VINCOLARE

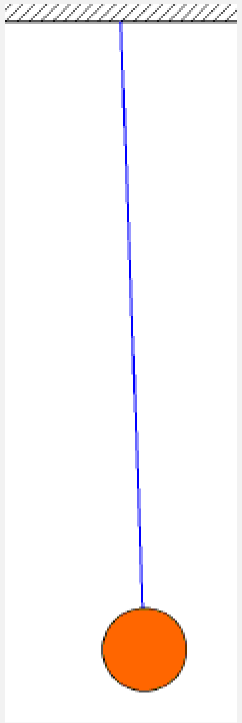










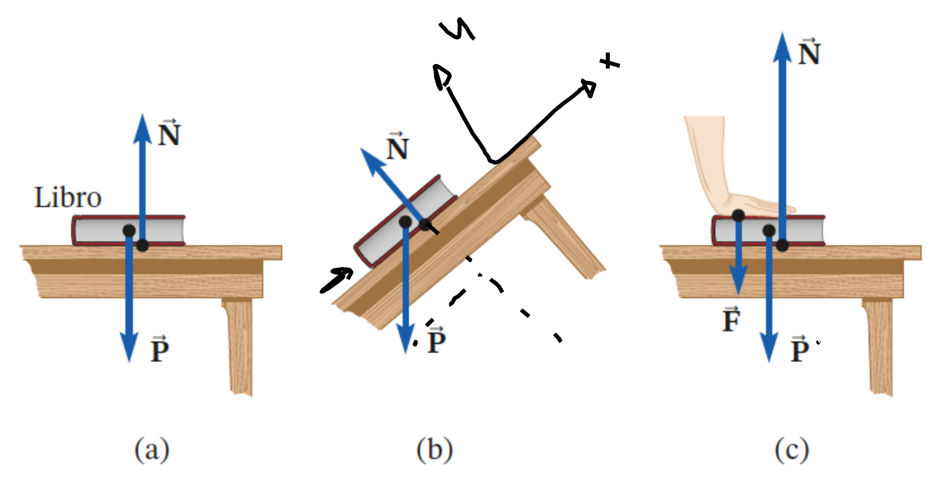


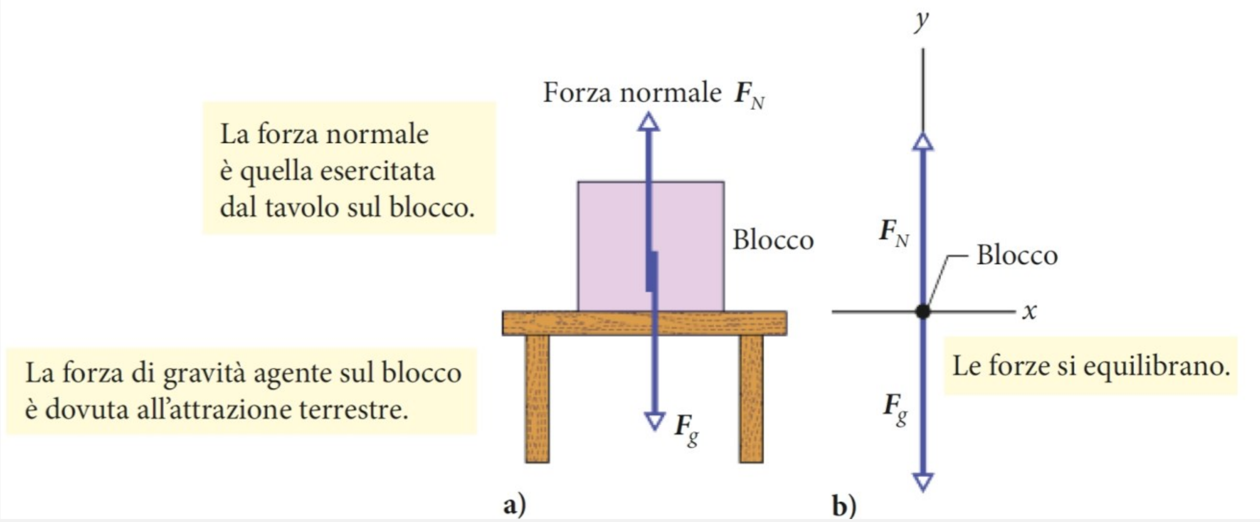
I vincoli cui è soggetto il corpo possono esercitare essi stessi delle forze.
L’azione del vincolo è rappresentata da una forza detta reazione vincolare.

FORZA NORMALE

FORZA VINCOLARE DI APPOGGIO

Forza che agisce perpendicolarmente alla superficie di contatto fra due corpi





La forza normale ha sempre direzione perpendicolare alla superficie di contatto e la sua intensità può essere ricavata solo dopo aver analizzato tutte le altre forze in gioco

→

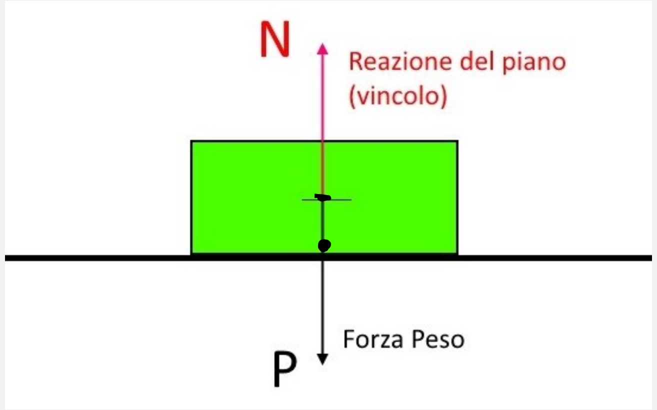
la reazione vincolare è sempre ortogonale alla superficie che costituisce il vincolo ed è uscente da essa

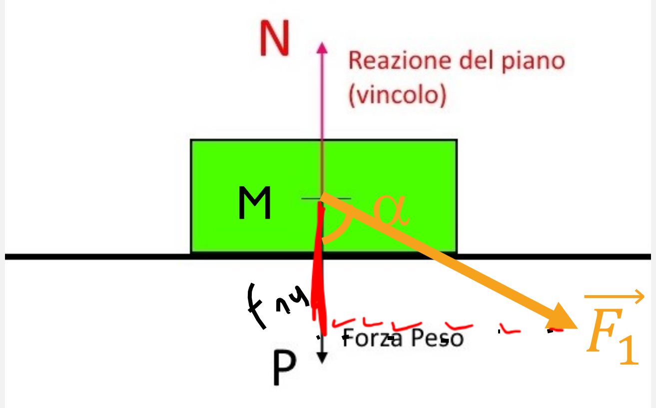
https://app.jove.com/embed/player?id=12651&t=1&s=1&fpv=1

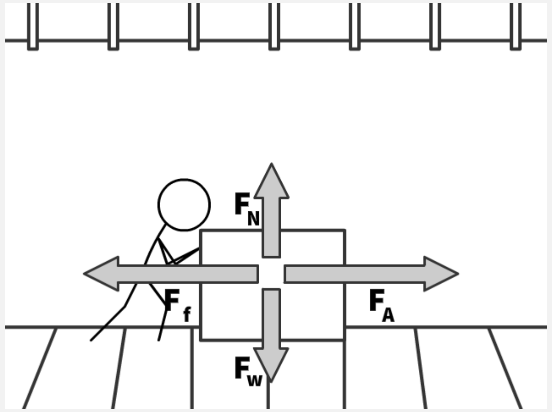
FORZA NORMALE

FORZA VINCOLARE DI APPOGGIO

Forza che agisce perpendicolarmente alla superficie di contatto fra due corpi







Il corpo è in equilibrio, quindi la somma delle forze che agiscono su di esso sarà pari a zero:

$$\vec{N} + \vec{P} = 0$$
$$\vec{N} = -\vec{P}$$
$$\vec{N} = -M\vec{g}$$

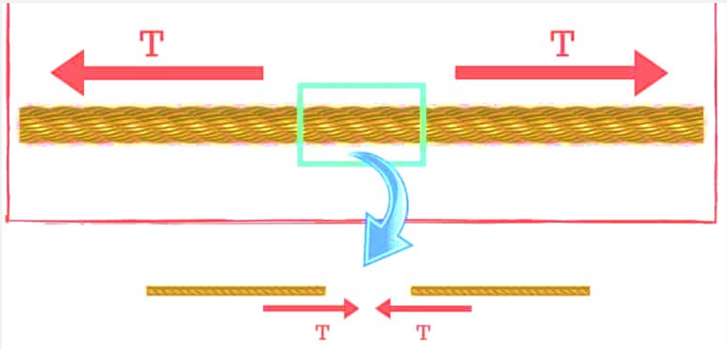
Oltre alla forza peso, c'è una forza esterna $\overrightarrow{F_1}$ che è obliqua e forma una angolo α con l'asse verticale:

Se il corpo è in equilibrio, la reazione vincolare sarà data dalla somma di forza peso e componente verticale di $\overrightarrow{F_1}$:

$$\left|\vec{N}\right| = F_1 \cos\alpha + P$$

TENSIONE

FUNI IDEALI:
- Massa trascurabile
- Inestensibili
- flessibili



$$F_{tot} = \cancel{m_{corda}}\vec{a} = \vec{F} - \vec{T}$$

(II principio della dinamica: ma=somma forze esercitate)

$$m_{corda} = 0$$

$$0\vec{a} = \vec{F} - \vec{T} \rightarrow \vec{F} = \vec{T}$$

Se la fune è ideale, l'applicazione di una forza $\vec{F}$ all'estremità della fune è esattamente equivalente all'applicazione della forza $\vec{F}$ direttamente alla massa m

https://app.jove.com/embed/player?id=14698&t=1&s=1&fpv=1

TENSIONE

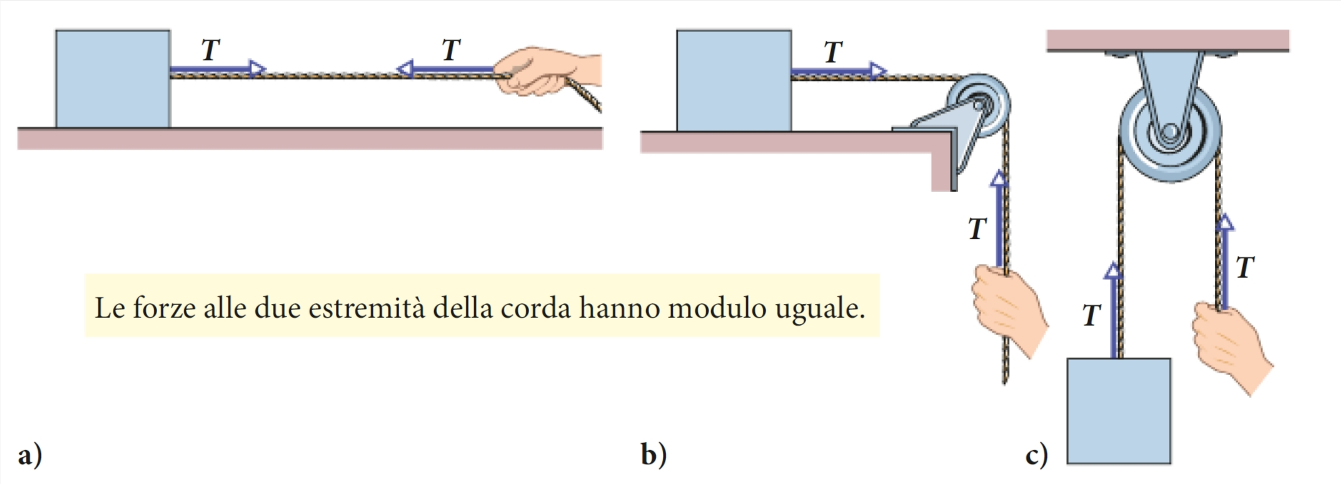
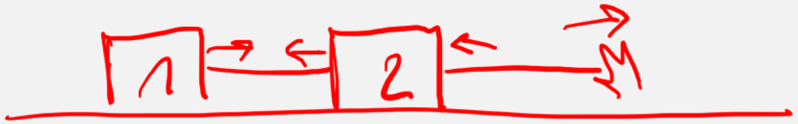
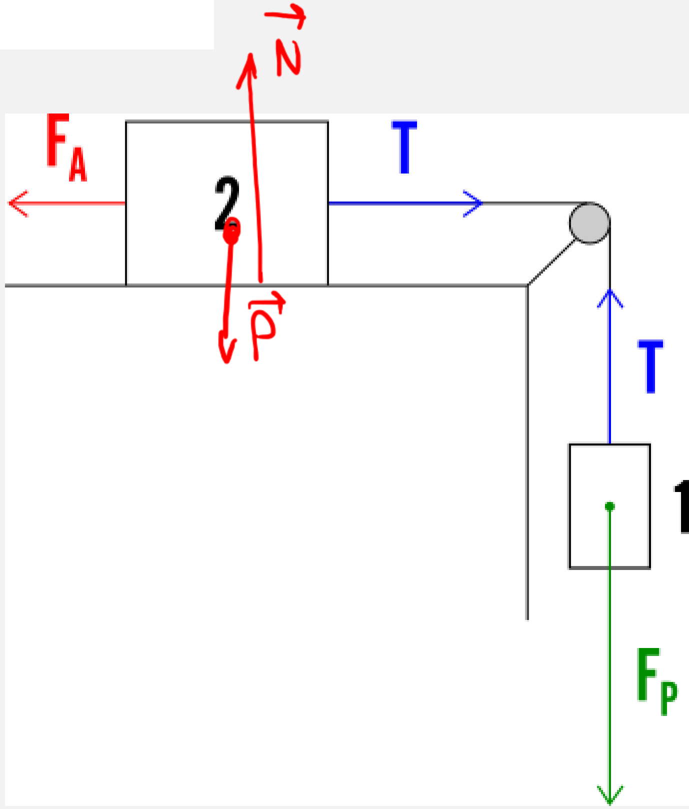


Figura 5.9 **a)** La corda, ben tesa, è in tensione. Se la sua massa è trascurabile, la corda tira il corpo e la mano con una forza ***T***, anche se la corda scorre attorno a una carrucola priva di massa e di attrito come in **b)** e in **c)**.





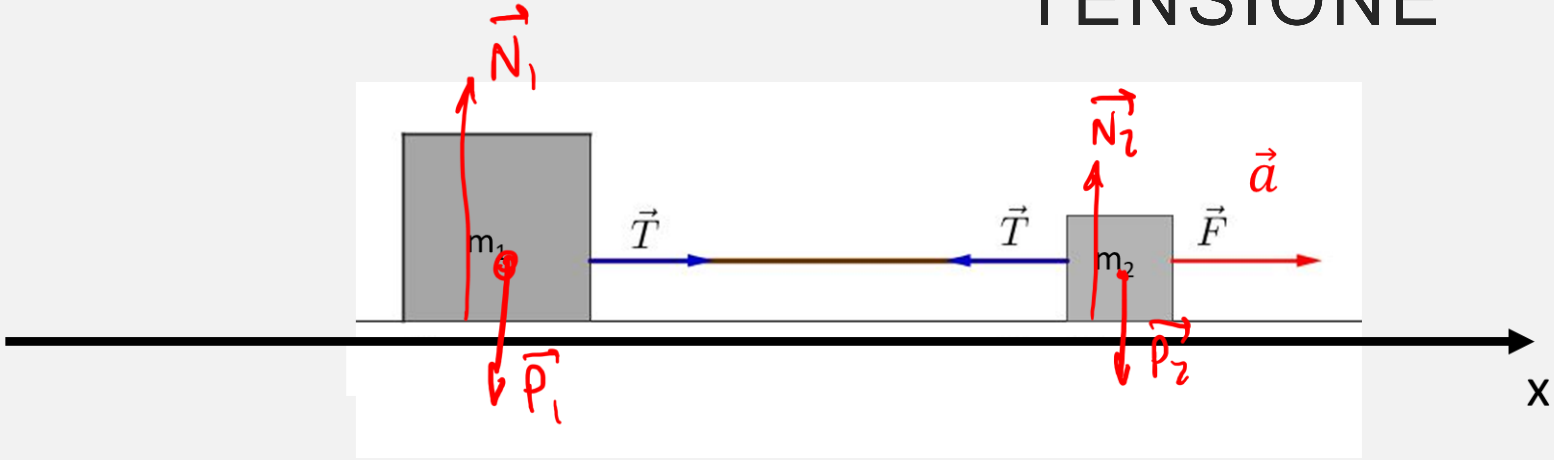
CARRUCOLA

(b) Esercito una forza verticale per spostare orizzontalmente un corpo

(c) Sollevo un corpo esercitando una forza verticale ma diretta verso il basso

Se il sistema è in equilibrio, significa che il corpo 1 non è sufficientemente pesante per far muovere il corpo 2 (attrito)

TENSIONE



- m_1 e m_2 , collegate da una fune ideale.
- Su m_2 è applicata una forza $\vec{F}$ diretta verso destra.
- m_1 avrà una accelerazione $\overrightarrow{a_1}$ e m_2 avrà un'accelerazione $\overrightarrow{a_2}$
- La fune è ideale: non si allunga/accorcia: il sistema si muove in maniera solidale → unica accelerazione per tutto il sistema

$\vec{a}_1 = \vec{a}_2 = a$

Su m_1 agiscono verticalmente forza peso e reazione vincolare, che si annullano → la risultante verticale è pari a zero

Su m_1 l'unica forza efficace è la tensione:

$$m_1 a = T$$

$\Sigma F = m_1 a = T$

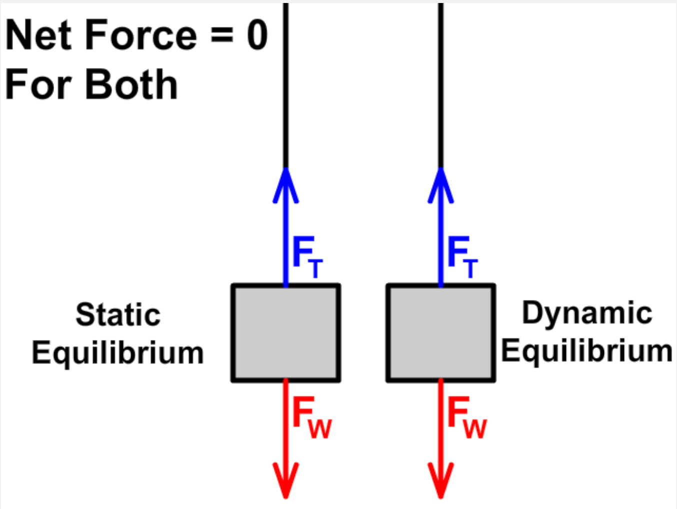
$$\begin{cases} m_1 a = T \\ m_2 a = F - T \end{cases} \qquad a = \frac{F}{m_1 + m_2} \qquad T = \frac{m_1 F}{m_1 + m_2}$$

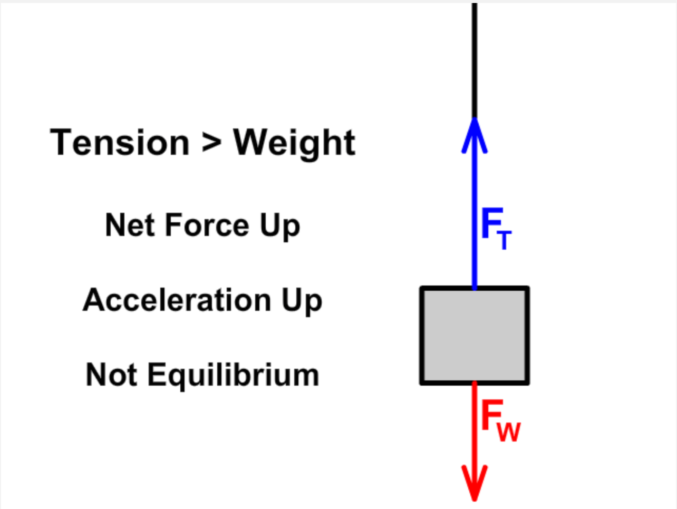
Su m_2 agiscono verticalmente forza peso e reazione vincolare, che si annullano → la risultante verticale è pari a zero

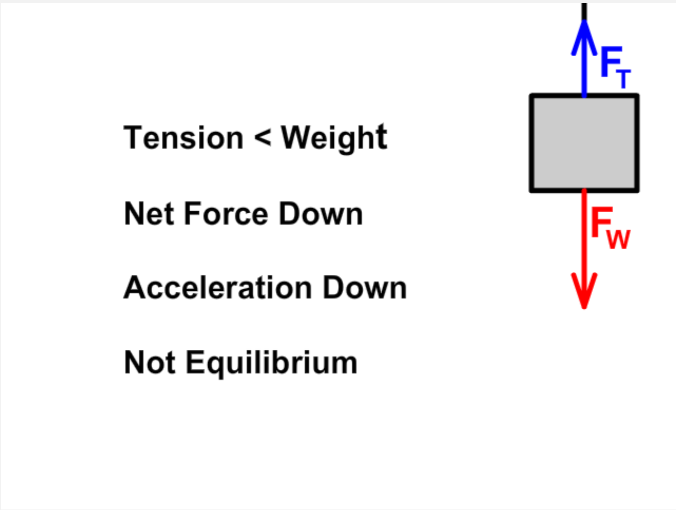
Su m_2 agiscono $\vec{F}$ e $\vec{T}$, che hanno verso opposto:

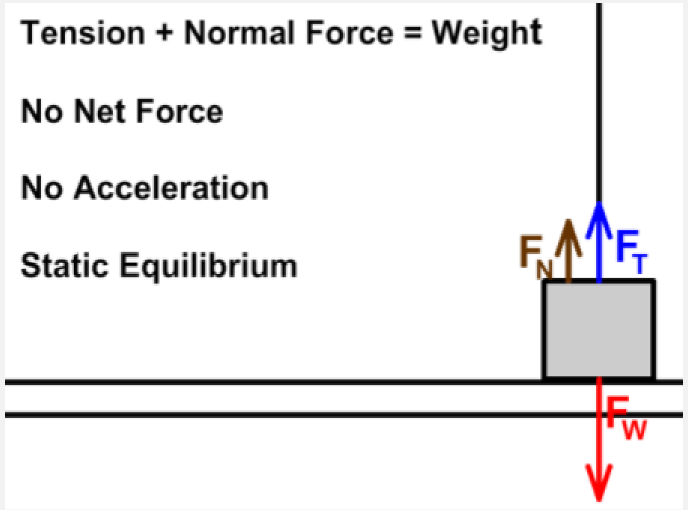
$\Sigma F = m_2 a$

$$m_2 a = F - T$$

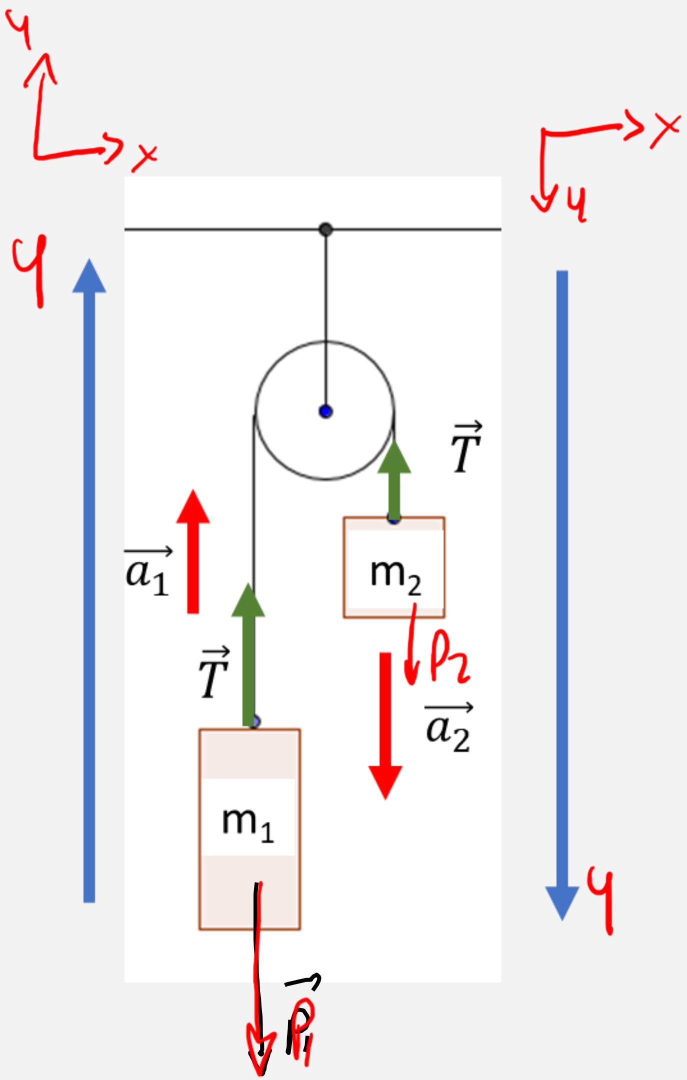

Net Force = 0
For Both
F_T
F_T
Static
Equilibrium
Dynamic
Equilibrium
F_W
F_W


Tension > Weight
Net Force Up
Acceleration Up
Not Equilibrium
F_T
F_W


F_T
Tension < Weight
Net Force Down
Acceleration Down
Not Equilibrium
F_W


Tension + Normal Force = Weight
No Net Force
No Acceleration
Static Equilibrium
F_N
F_T
F_W

TENSIONE – CARRUCOLE



A una fune ideale sono sospese due masse (m_1 e m_2)

$\Sigma F_1 = m_1 a$

$$\begin{cases} m_1 a_1 = T - m_1 g \\ m_2 a_2 = m_2 g - T \end{cases}$$

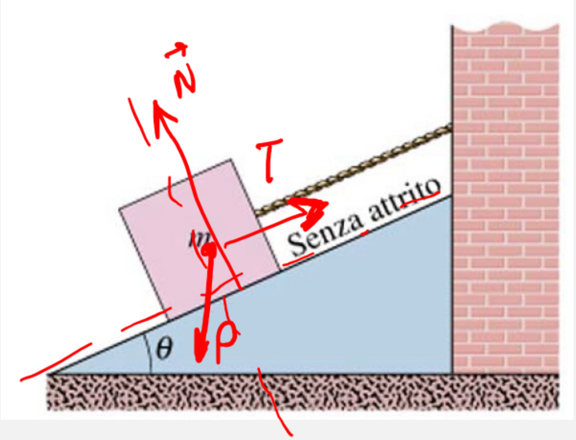
Essendo l'accelerazione in realtà unica,

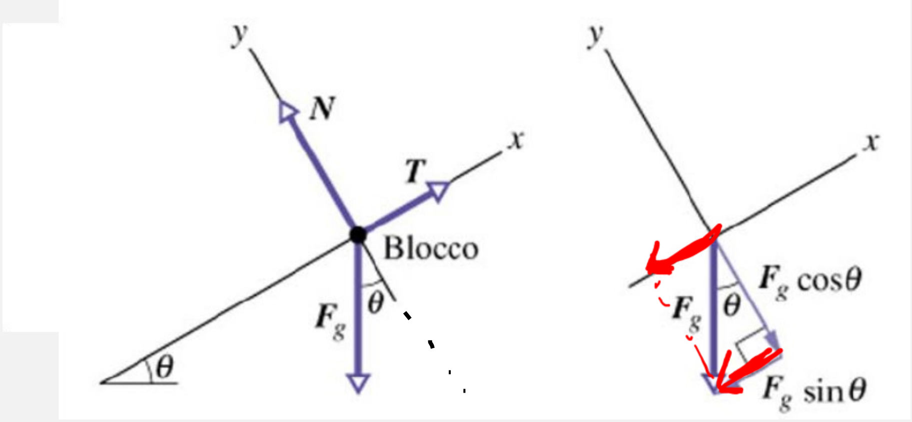
$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$$

Tre possibili situazioni:

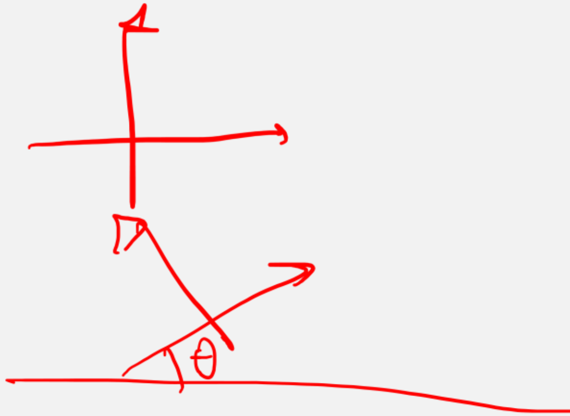
1. $m_1 = m_2$: sistema in equilibrio, perché $m_2 - m_1 = 0$, quindi $a = 0$
2. $m_1 < m_2$: la carrucola si muove nella direzione di m_2
3. $m_1 > m_2$: sarà m_1 a scendere → l'accelerazione sarà < 0

TENSIONE





$\theta = 30°, m = 15kg$
Determinare la tensione della fune e la reazione vincolare, sapendo che siamo in una situazione di equilibrio.



Equilibrio → la risultante delle forze è pari a 0: $\vec{T} + \vec{N} + \vec{F_g} = m\vec{a} = 0$

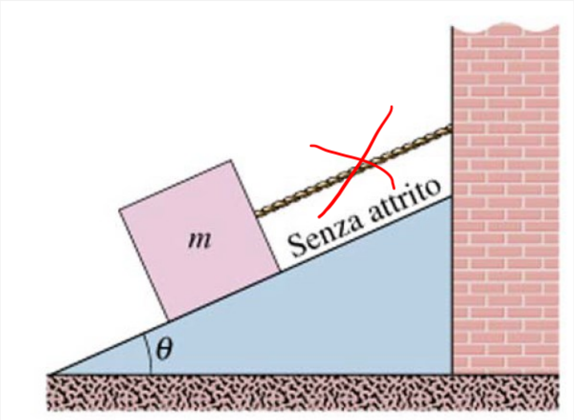
Lungo l'asse x → tensione e componente della forza peso parallela al piano inclinato ($F_g \sin\theta$):

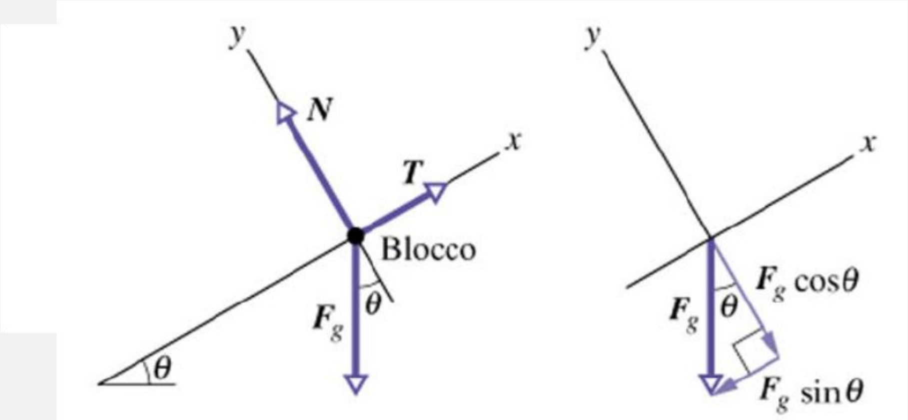
$$T - mg\sin\theta = 0 = m \cdot a, \; a = 0$$

Lungo l'asse y → reazione vincolare e componente della forza peso ortogonale al piano inclinato ($F_g \cos\theta$):

$$N - mg\cos\theta = 0$$

TENSIONE





$\theta = 30°, m = 15kg$
Determinare la tensione della fune e la reazione vincolare, sapendo che siamo in una situazione di equilibrio.

La fune si spezza: quanto vale l'accelerazione del blocco?

Lungo l'asse y la risultante è sempre pari a zero: $N - mg\cos\theta = 0$

$\cancel{m}g \sin\theta = \cancel{m}a$

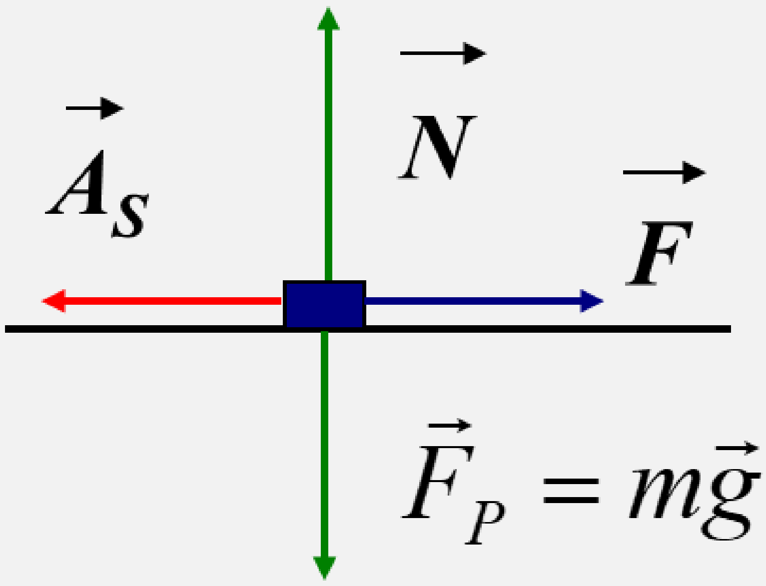
$\downarrow$

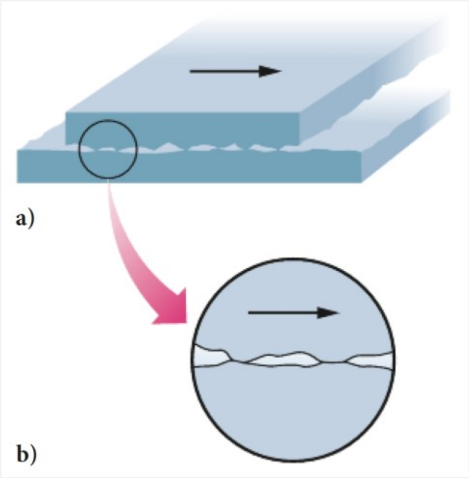
$a = g\sin\theta$

Lungo l'asse x scompare la tensione: l'unica componente che farà muovere il corpo è $m\boxed{g\sin\theta}$

Valore dell'accelerazione

ATTRITO STATICO





Corpo su piano orizzontale sottoposto a una forza $\vec{F}$ ma non si muove: $\vec{F} = \overrightarrow{A_S}$

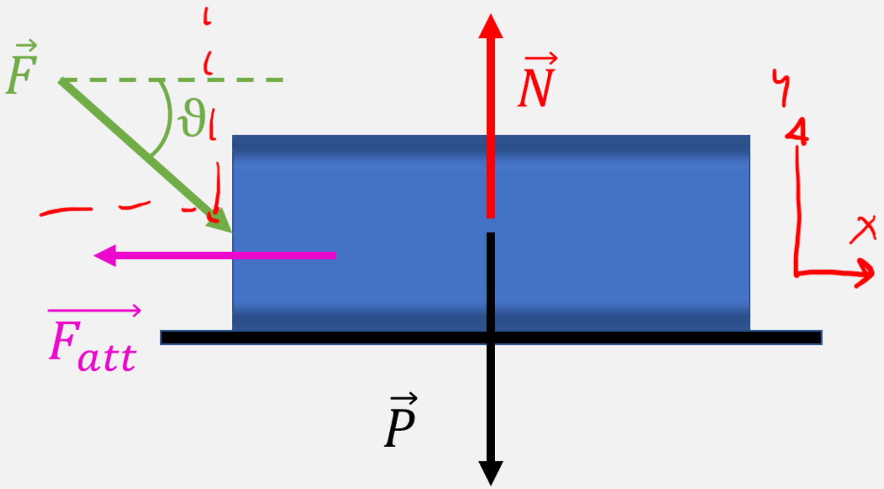
$$\vec{F} \leq \vec{A}_{s\,max} = \mu_S \overrightarrow{F_P} = \mu_S \vec{N}$$

Piano di appoggio orizzontale:

$$\vec{F}_P = -\vec{N} \qquad \left|\vec{F}_P\right| = \left|\vec{N}\right| = mg$$

$$A_{s\,max} = \mu_s mg$$

ATTRITO STATICO



Equilibrio → la risultante delle forze è pari a 0

Lungo l'asse x → componente della forza peso orizzontale ($F \quad \cos\theta$) e forza di attrito ($\overrightarrow{F_{att}}$)

$$F\cos\theta - F_{att} = 0$$

Lungo l'asse y → reazione vincolare e componente della forza ~~peso~~ verticale ($F_g \sin\theta$):

$$mg + F\, sin\,\theta - N = 0 \rightarrow F\, sin\,\theta + mg = N$$

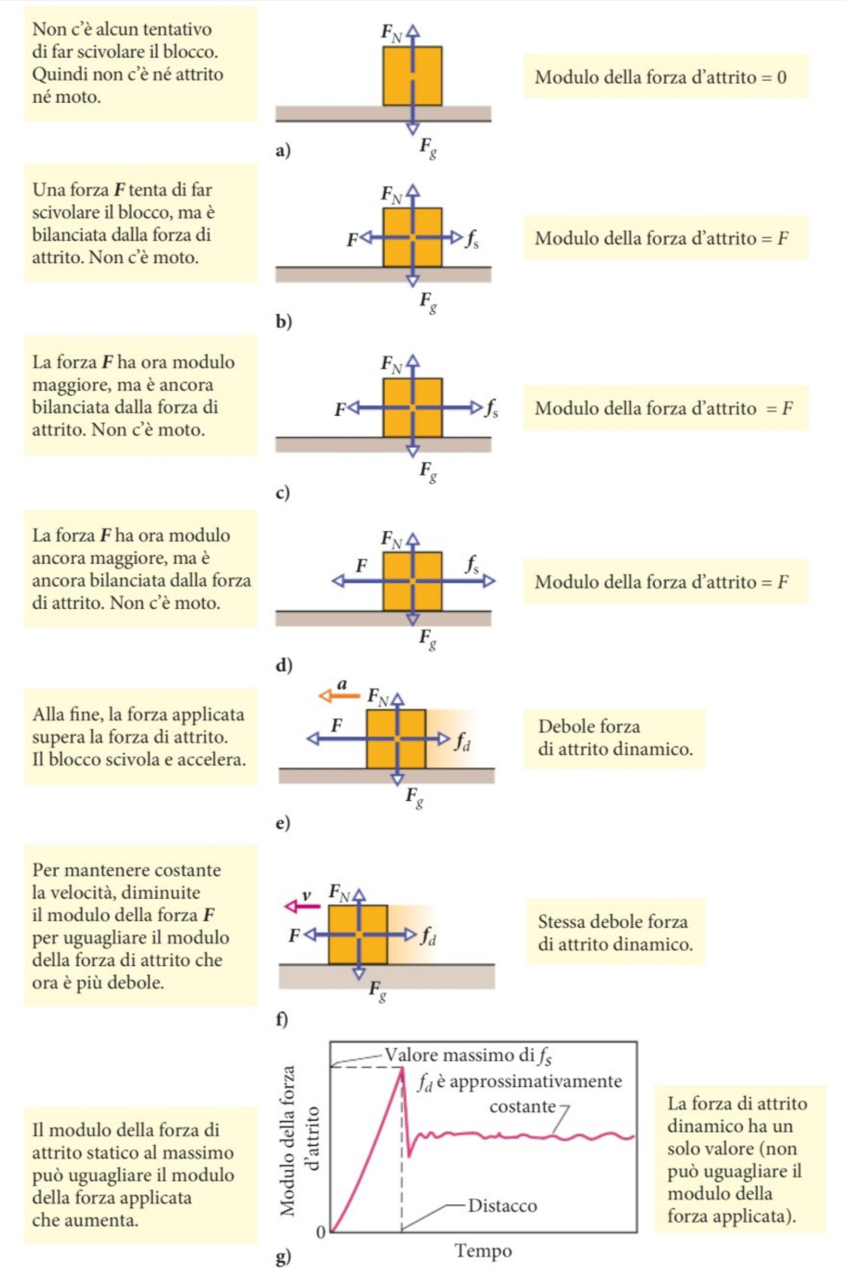
$\Sigma F_x = m a_x = 0$

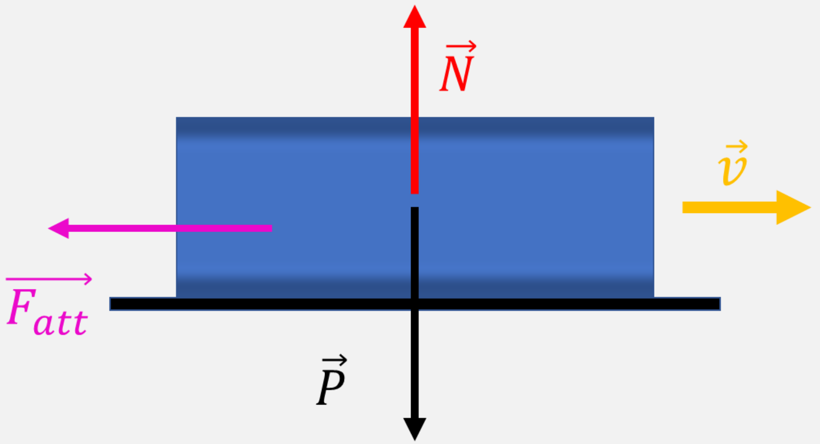
$\Sigma F_y = m a_y = 0$

$F_{att} = \mu_s N$

$$\mu_s = \frac{F_{att}}{N} \qquad \mu_s = \frac{F\cos\theta}{F\sin\theta + mg}$$

ATTRITO DINAMICO

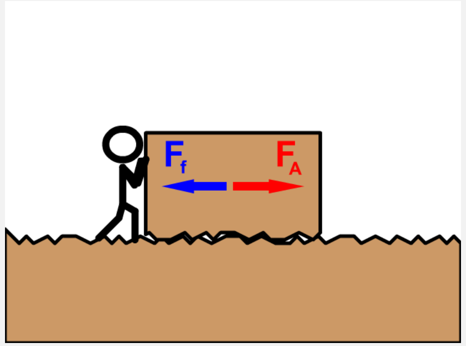


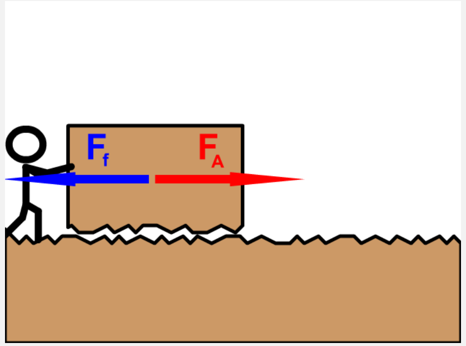


$$F_{att} = \mu_D N$$

$$\mu_S > \mu_D$$

https://app.jove.com/embed/player?id=12660&t=1&s=1&fpv=1





ATTRITO – RESISTENZA DELL'ARIA

$$\boxed{\overrightarrow{F_R} = -b\vec{v}}$$

$$\Sigma F = m\vec{a} = m\vec{g} - b\vec{v}$$

$$\vec{a} = \vec{g} - \frac{b}{m}\vec{v}$$

L'accelerazione non è costante!
Dipende dalla velocità dell'oggetto

Consideriamo il tempo iniziale: $t = 0, \vec{v} = 0$

$$\vec{a} = \vec{g} - \frac{b}{m}\vec{v} \rightarrow \vec{a} = \vec{g}$$

FIX EXP

$$a = \frac{dv}{dt} = g - \frac{b}{m}v \rightarrow v(t) = \boxed{\frac{mg}{b}}\boxed{\left(1 - e^{-\frac{tb}{m}}\right)}$$

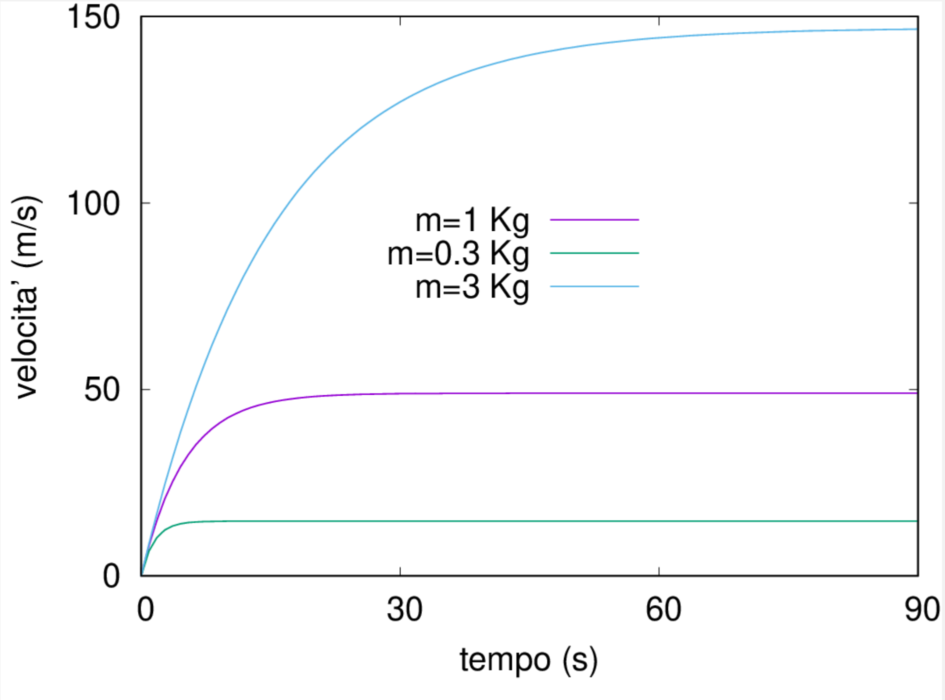
$$\boxed{v_{lim} = v_R = \frac{mg}{b}}$$

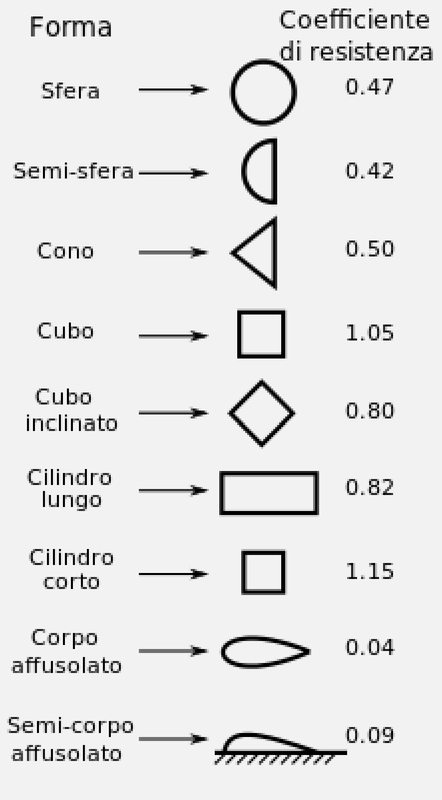
ATTRITO – RESISTENZA DELL'ARIA

$$\boxed{\overrightarrow{F_R} = -b\vec{v}}$$

$$\boxed{v_{lim} = v_R = \frac{mg}{b}}$$

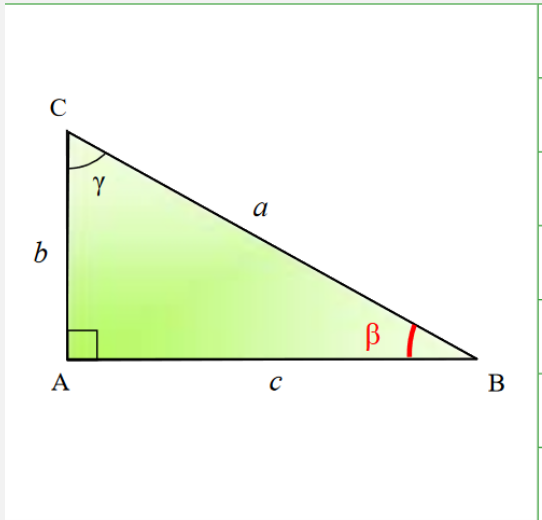
v(t)





Misure di coefficienti di resistenza

PIANO INCLINATO

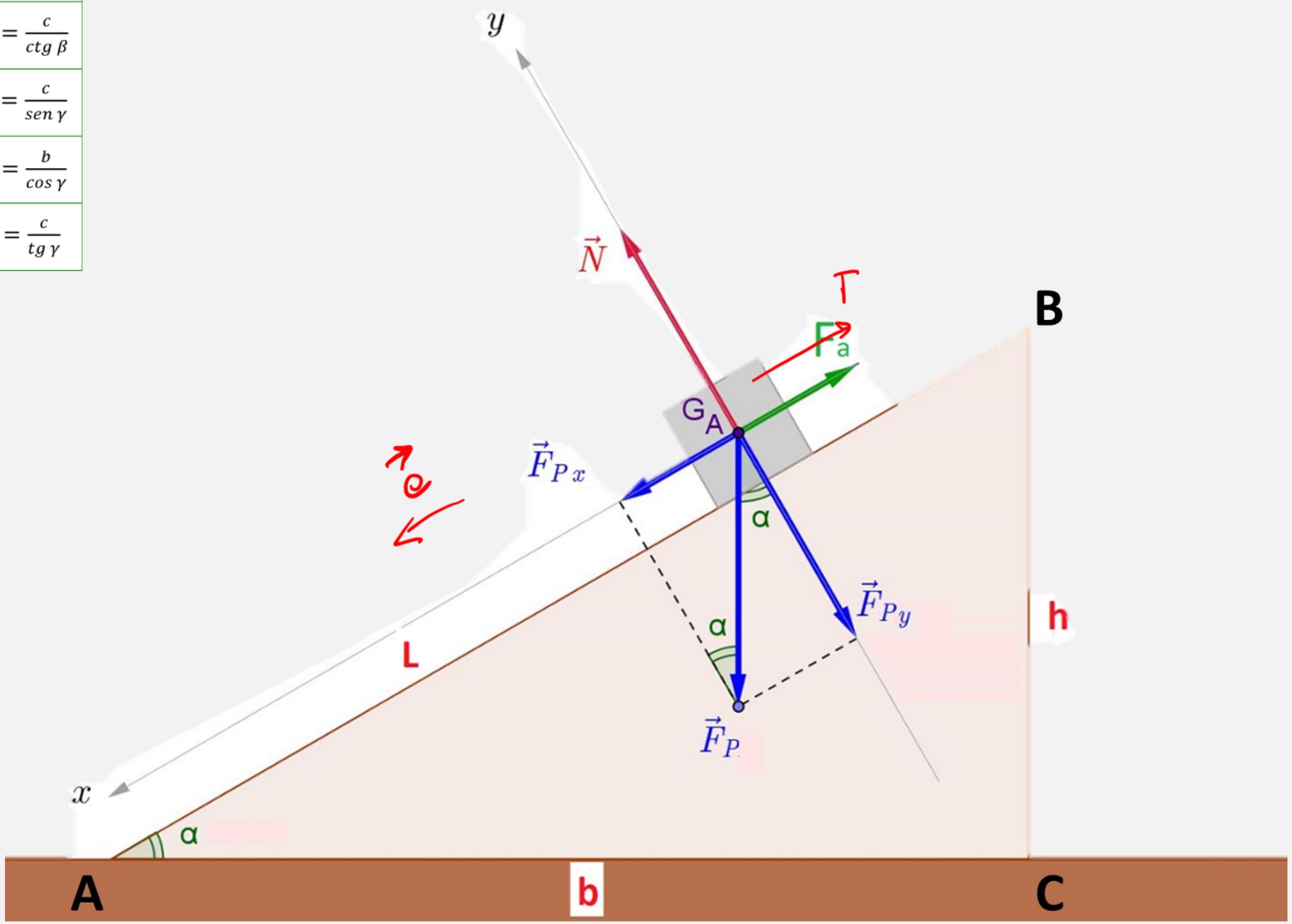


$sen\,\beta = \frac{b}{a}$	$\longrightarrow$	$b = a \cdot sen\,\beta$	e	$a = \frac{b}{sen\beta}$
$cos\,\beta = \frac{c}{a}$	$\longrightarrow$	$c = a \cdot cos\,\beta$	e	$a = \frac{c}{cos\,\beta}$
$tg\,\beta = \frac{b}{c}$	$\longrightarrow$	$b = c \cdot tg\,\beta$	e	$c = \frac{b}{tg\,\beta}$
$ctg\,\beta = \frac{c}{b}$	$\longrightarrow$	$c = b \cdot ctg\,\beta$	e	$b = \frac{c}{ctg\,\beta}$
$sen\,\gamma = \frac{c}{a}$	$\longrightarrow$	$c = a \cdot sen\,\gamma$	e	$a = \frac{c}{sen\,\gamma}$
$cos\,\gamma = \frac{b}{a}$	$\longrightarrow$	$b = a \cdot cos\,\gamma$	e	$a = \frac{b}{cos\,\gamma}$
$tg\,\gamma = \frac{c}{b}$	$\longrightarrow$	$c = b \cdot tg\,\gamma$	e	$b = \frac{c}{tg\,\gamma}$

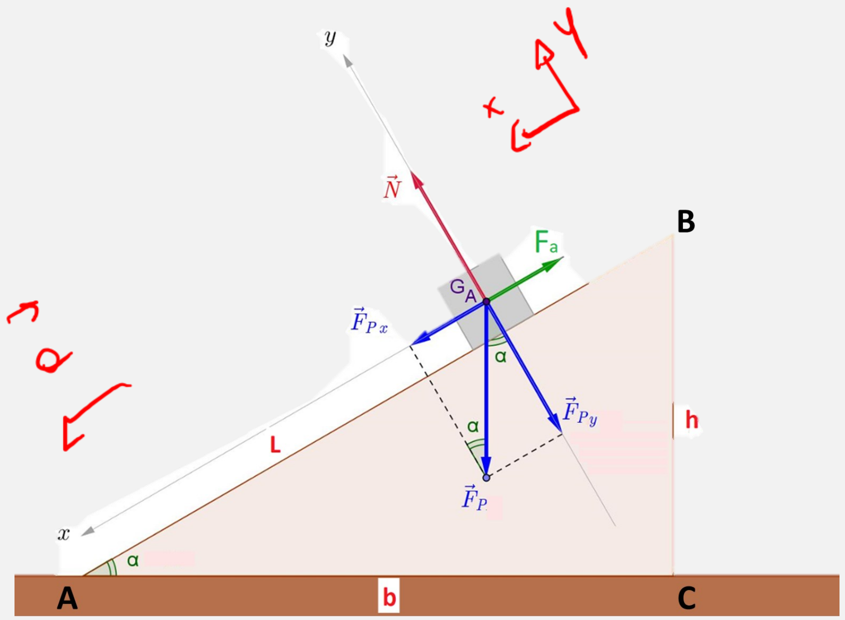
$$F_{Px} = F_P \sin\alpha$$

$$F_{Py} = F_P \cos\alpha = N$$

$$F_a = \mu_S N = \mu_S F_P \cos\alpha = \mu_S mg \cos\alpha$$



PIANO INCLINATO



CASO SENZA ATTRITO

$$F_{Px} = F_P \sin\alpha$$

$$ma = F_{Px} = mg\sin\alpha \rightarrow \boxed{a = g\sin\alpha}$$

CASO CON ATTRITO

$$F_a = \mu_D N = \mu_D F_P\cos\alpha = \mu_D mg\cos\alpha$$

$$ma = F_{Px} - F_a = mg\sin\alpha - \mu_D mg\cos\alpha$$

$$\boxed{a = g(\sin\alpha - \mu_D\cos\alpha)}$$

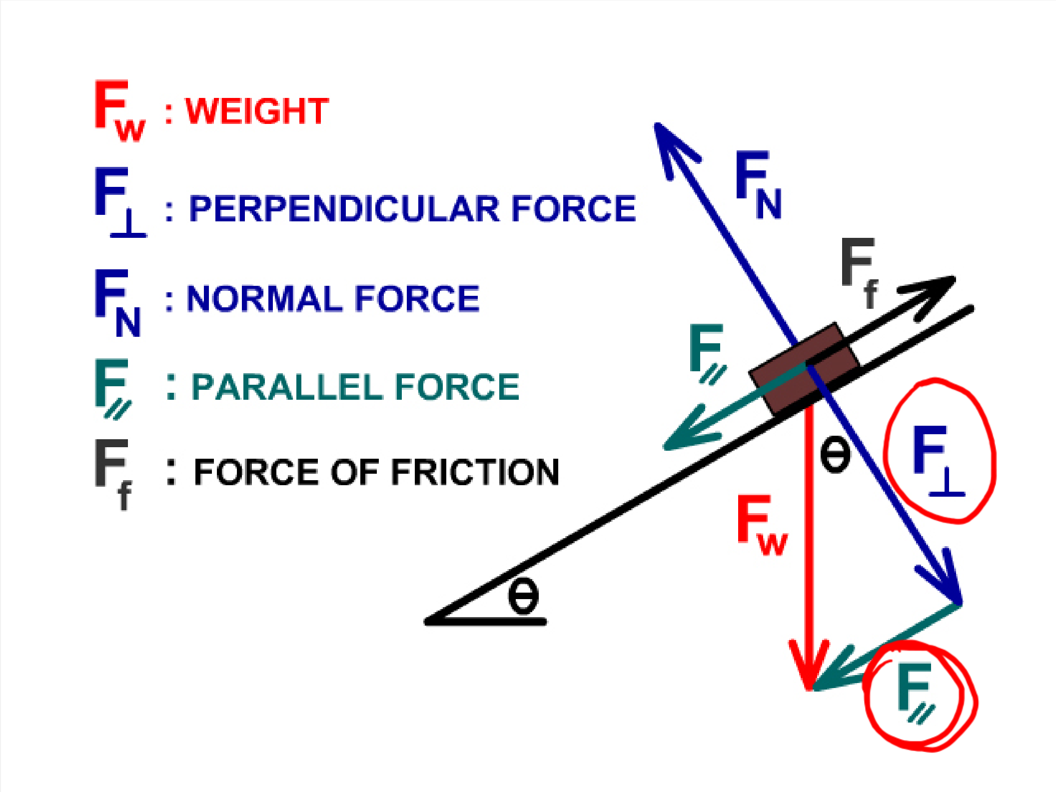
CASO IN EQUILIBRIO

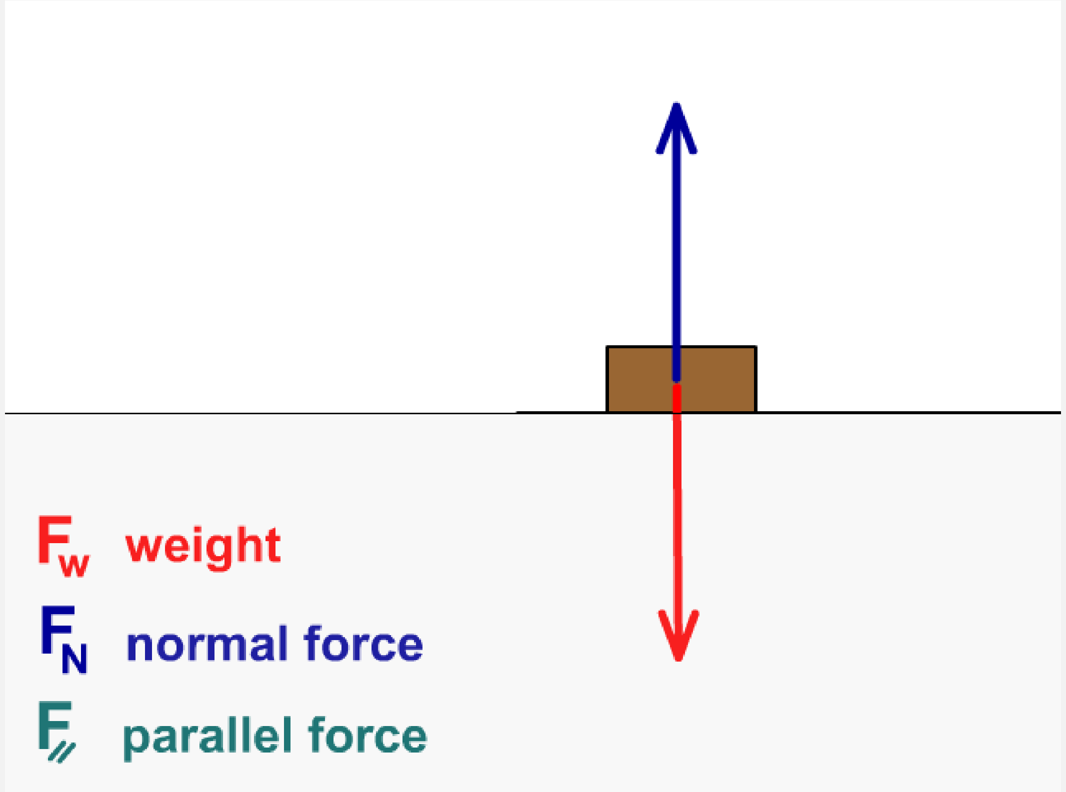
f_{As} $= F_{Px}$

$$\mu_S \cancel{mg}\cos\alpha = \cancel{mg}\sin\alpha$$

$$\sin\alpha = \mu_S\cos\alpha \rightarrow \mu_S = \tan\alpha$$

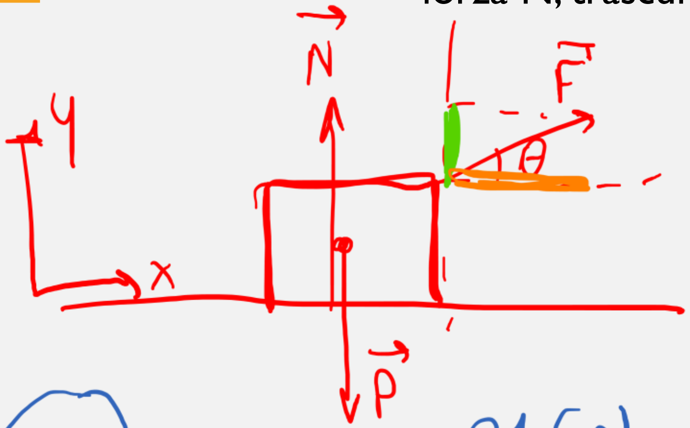
$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$


Fw : WEIGHT
F⊥ : PERPENDICULAR FORCE
FN : NORMAL FORCE
F// : PARALLEL FORCE
Ff : FORCE OF FRICTION
FN
Ff
F//
θ
F⊥
Fw
θ
F//


Fw weight
FN normal force
F// parallel force

Esempio

Supponiamo di avere una scatola di 10kg e di tirarla tramite una corda a questa attaccata. Tiriamo la scatola applicando una forza di 40 N e formando un angolo di 30°. Calcolare l'accelerazione della scatola e il modulo della forza N, trascurando la forza di attrito.



$|\vec{F}| = F = 40N, \ \theta = 30^{\circ}$

a_x?

$\sum F_x = m a_x$

$\sum F_y = m a_y$

$F_x = F\cos\theta = 34.6N$

$F_y = F\sin\theta = 20N$

$\sum F_x = m a_x$

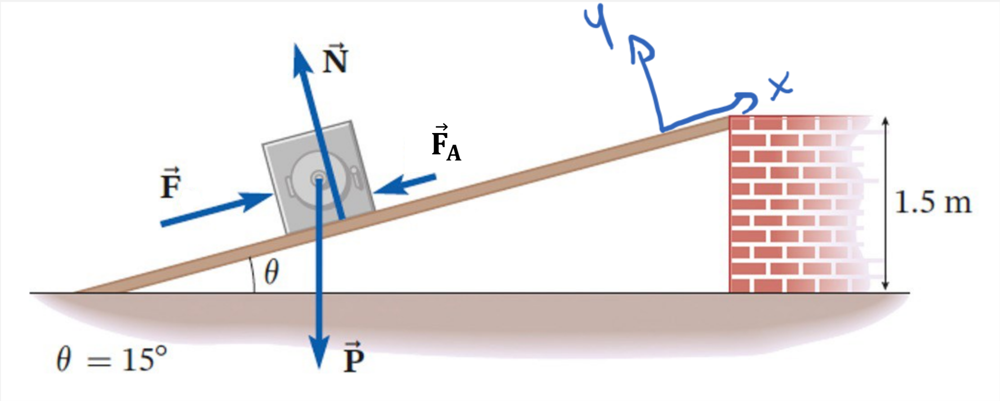
$F_x = m a_x \rightarrow a_x = \frac{F_x}{m} = 3.46\, m/s^2$

$\sum F_y = m a_y$

$-P + N + F\sin\theta = m a_y$

Esempio

Una cassaforte deve essere spostata lungo un piano inclinato la cui parte più alta è a 1.5m da terra. La massa della cassaforte è 510kg. Il coefficiente di attrito statico lungo la superficie del piano inclinato è 0.42, mentre quello di attrito dinamico è di 0.33. Il piano forma un angolo di 15° con il piano orizzontale. A) Assumendo che la forza con cui spingo sia parallela al piano inclinato, quale intensità sarà necessaria per mettere in movimento la cassaforte sulla rampa? B) una volta che la cassaforte è stata messa in moto, che forza deve essere applicata per farla muovere a velocità costante? → equilibrio



1) STAT.

$$\Sigma F_x = m a_x = 0$$

$$\hookrightarrow F - F_{A_s} - P = 0$$

$$F - \mu_s m g \cos\theta - m g \sin\theta = 0$$

$$F = \mu_s m g \cos\theta - m g \sin\theta = 3300N$$

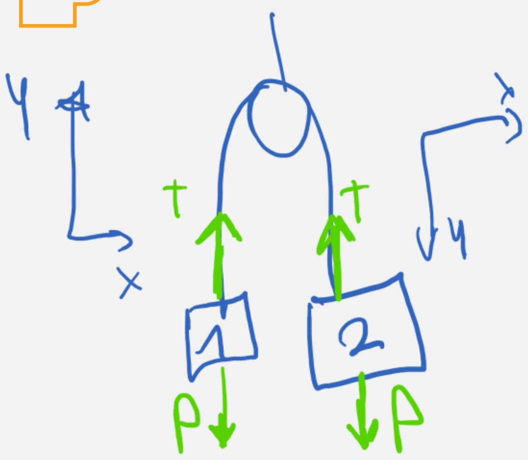
2) DINAM.

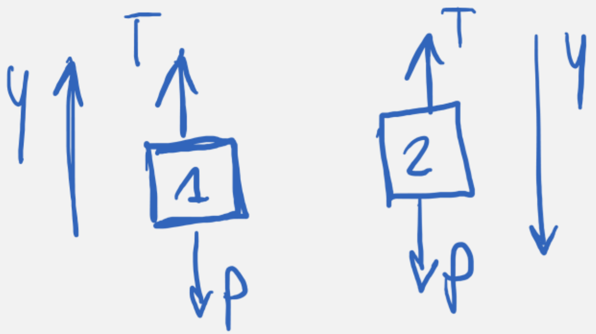
$$F - F_{A_d} - P = 0 \rightarrow V = cost \rightarrow a = 0$$

$$F - \mu_d m g \cos\theta - m g \sin\theta = 0 \qquad F = 2900N$$

Esempio

Data una carrucola ideale con fune ideale e due masse, m1=26kg e m2=42kg. Calcolare il moto del sistema.





(1) $\Sigma F = m_1 a$

$T - P = m_1 a$

$T - m_1 g = m_1 a$

(2) $\Sigma F = m_2 a$

$P - T = m_2 a$

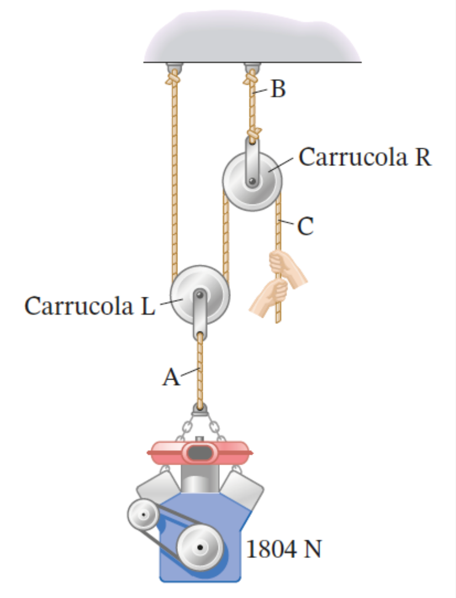
$m_2 g - T = m_2 a$

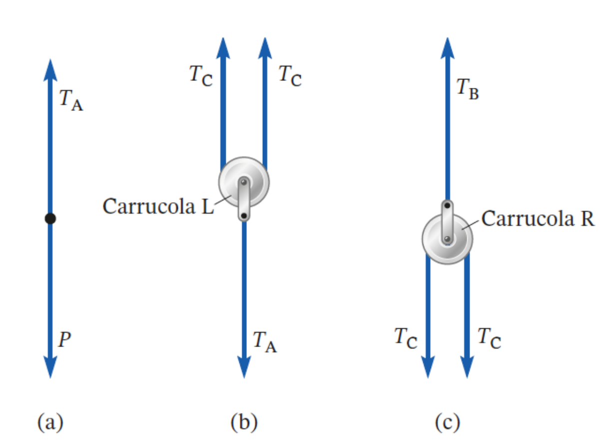
$$\begin{cases} T = m_1 a + m_1 g \\ T = m_2 g - m_2 a \end{cases}$$

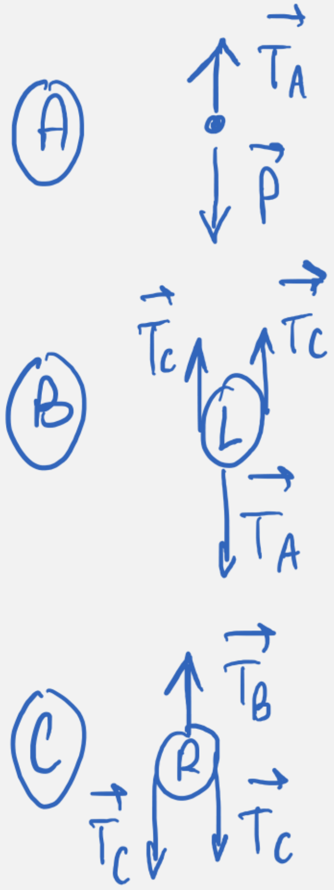
$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g = 2.31 \, m/s^2$$

Esempio

Sistema di due carrucole. Un peso di 1804N viene sollevato a una velocità costante con un sistema di due carrucole. Quali sono le tensioni delle funi A, B e C? Siano tutte le carrucole ideali.







Lungo la corda, la Tensione è uguale (in modulo) in ogni punto:

$T_A = P$

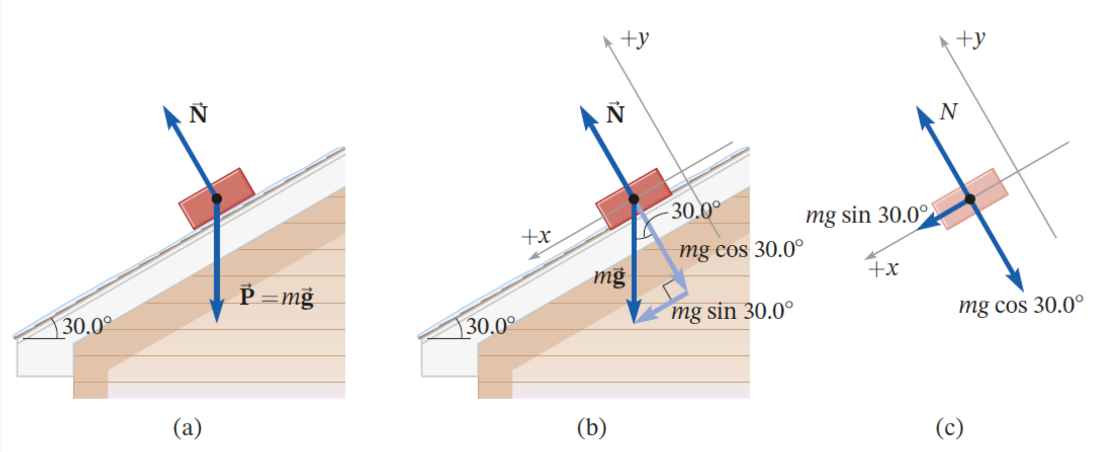
$2T_C = T_A$

$\hookrightarrow T_C = T_A/2 = P/2$

$T_B = 2T_C = T_A = P$

Esempio

Un mattone con massa pari a 1kg scivola sulla superficie ghiacciata di un tetto, inclinato di 30°. Se il mattone parte da fermo, che velocità avrà dopo 0.9s, quando cioè avrà raggiunto il bordo del tetto? Si trascuri l'attrito.



(a) (b) (c)

$$\Sigma F_x = m \cdot a_x = mg \sin\theta = mg \sin 30°$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{a_x = g \cdot \sin 30°}$$

accelerazione costante:

$$\Delta v_x = v_{fx} - v_{ix} = a_x \Delta t$$

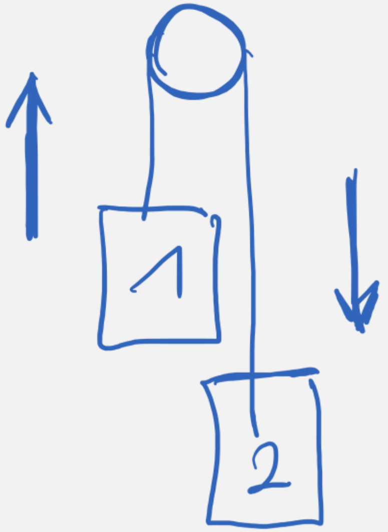
Sappiamo che $\Delta t = 0.9s$ e $v_{ix} = 0 m/s \rightarrow$

$$v_{fx} = v_{ix} + a_x \Delta t$$

$$= 0\, m/s + 9.8\, m/s^2 \cdot 0.9s = 4.4\, m/s$$

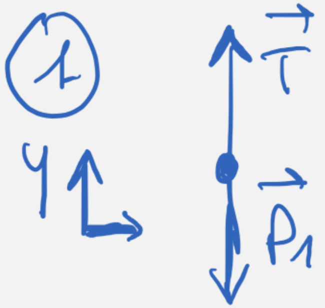
Esempio

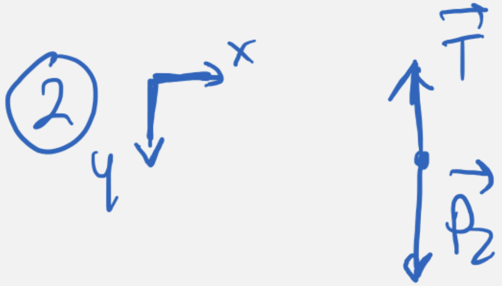
Ascensore e contrappeso. La macchina di Atwood è costituita da due macchine sospese a una carrucola. Calcolare l'accelerazione dell'ascensore e la tensione della fune.



$m_1 = 1150\ kg$

$m_2 = 1000\ kg$





(1) $\Sigma F_1 = m_1 a = T - P_1 \rightarrow T = m_1 a + m_1 g$

(2) $\Sigma F_2 = m_2 a = P_2 - T \rightarrow T = m_2 g - m_2 a$

$m_1 a + m_1 g = m_2 g - m_2 a$

$m_1 a + m_2 a = m_2 g - m_1 g$

$a(m_1 + m_2) = g(m_2 - m_1)$

$a = g \dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} = 0.68\ m/s^2$

(1) $T = m_1 a + m_1 g = 10'488\ N$

$P_1 = m_1 g = 11270\ N$

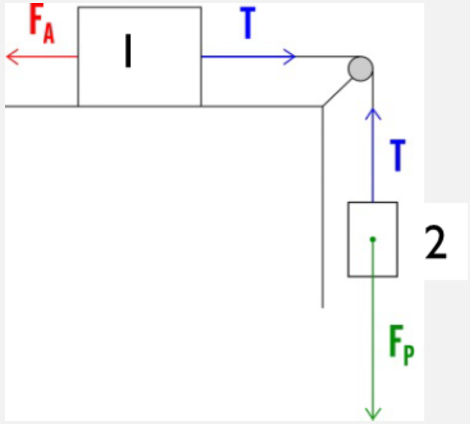
$P_1 > T \rightarrow$ scende!

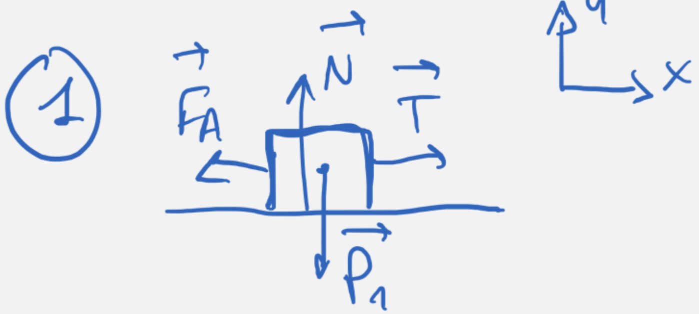
2 $T = m_2 g - m_2 a = 10480 \text{ N}$

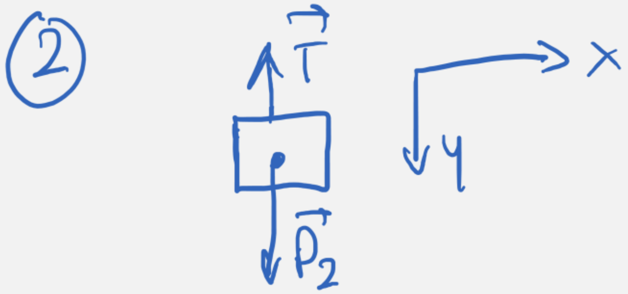
$P_2 = m_2 g = 9800 \text{ N}$ $\quad P_2 < T \rightarrow$ sale!

Esempio

Due scatole sono collegate da una fune ideale che scorre su una carrucola. Il coefficiente di attrito dinamico tra piano e scatola 1 è 0.2. Vogliamo trovare l'accelerazione del sistema.







$$\vec{N} = m_1 g = 5\,kg \cdot 9.8\,m/s^2 = 49\,N$$

1

$$\Sigma F_{x_1} = T - F_A = m_1 a$$

non le conosco

$$F_A = \mu_D N = 0.2 \cdot 49\,N = 9.8\,N$$

$$T = m_1 a + F_A$$

2

$$P_2 = m_2 g = 19.6\,N$$

$$\Sigma F_{2y} = m_2 a = P_2 - T$$

$$m_2 a = m_2 g - T$$

$$T = m_2 g - m_2 a$$

$$m_1 a + F_A = m_2 g - m_2 a$$

$$a = \frac{m_2 g - F_A}{m_1 + m_2} = 1.4\,m/s^2$$