QUANTITÀ DI MOTO E URTI

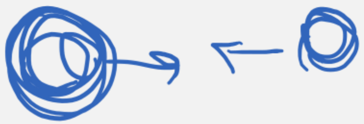
QUANTITÀ MOTO

QUANTITÀ DI MOTO (o MOMENTO LINEARE): prodotto della massa per la velocità di un corpo ed è una grandezza vettoriale, che ha la stessa direzione e lo stesso verso del vettore velocità.

Viene indicato comunemente con il simbolo $\vec{p}$ e nel SI si misura in kg·m/s.

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Quanto è difficile fermare un corpo in movimento



Consideriamo un urto fra due masse: $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$

Δt

Con $m_2 \ll m_1$

$\vec{F} = m\vec{a}$

$$\begin{cases} \Delta v = a\Delta t \\ F = ma \end{cases}$$

Variazione di velocità inversamente proporzionale alla massa.
L'intervallo di tempo è lo stesso per entrambi i corpi

La variazione di velocità di ciascun corpo: $\Delta\vec{v} = \vec{a}\Delta t = \dfrac{\vec{F}}{m}\Delta t$

$\rightarrow \Delta v \cdot m = F\Delta t$

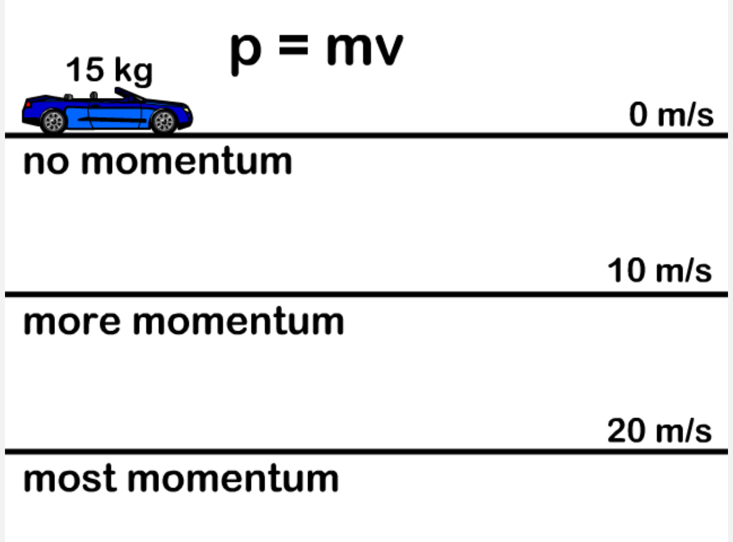
I prodotti fra la massa dei corpi e la variazione di velocità sono uguali e opposti (le forze nell'urto sono uguali e opposte):

$$m_1\Delta\vec{v}_1 = \vec{F}_{12}\Delta t$$

$$m_2\Delta\vec{v}_2 = \vec{F}_{21}\Delta t = (-\vec{F}_{12})\Delta t = -m_1\Delta\vec{v}_1$$

QUANTITÀ MOTO

$\vec{p} = m\vec{v}$

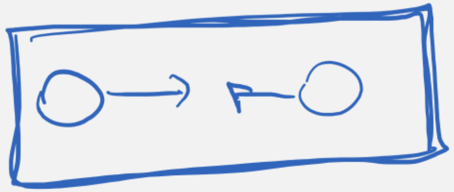


L'urto fra i due corpi determina una variazione nella quantità di moto →
le due variazioni hanno stesso modulo, stessa direzione e verso opposto:

$$m\Delta\vec{v} = m(\vec{v}_f - \vec{v}_i) = m\vec{v}_f - m\vec{v}_i = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta\vec{p}$$

$$m_1 \Delta\vec{v}_1 = -m_2 \Delta\vec{v}_2$$

$$\Delta\vec{p}_2 = -\Delta\vec{p}_1$$



La quantità di moto può essere trasferita da un corpo all'altro quando questi interagiscono

Le variazioni della quantità di moto dei due corpi sono sempre uguali e opposte →
la <u>quantità di moto totale</u> dei due corpi non risulta modificata dall'interazione

Somma vettoriale della quantità di moto dei due corpi

QUANTITÀ MOTO

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Per variare la quantità di moto di un oggetto, è richiesta una forza → formulazione della II legge di Newton:

La variazione nel tempo della quantità di moto di un corpo è uguale alla forza risultante applicata ad esso:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \qquad \sum\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

$$\sum\vec{F} = \boxed{\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}} = \frac{\overset{\vec{p}_f}{m\vec{v}_f} - \overset{\vec{p}_i}{m\vec{v}_i}}{\Delta t} = \frac{m(\vec{v}_f - \vec{v}_i)}{\Delta t} = m\overset{\vec{a}}{\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}} = \boxed{m\vec{a}}$$

TEOREMA DELL'IMPULSO

$$\Delta\vec{p} = \underbrace{\vec{F}\Delta t}$$

$m\Delta\vec{v}$

IMPULSO ($\vec{J}$)

$\vec{I}$

La variazione della quantità di moto è pari all'IMPULSO ($\vec{J}$)

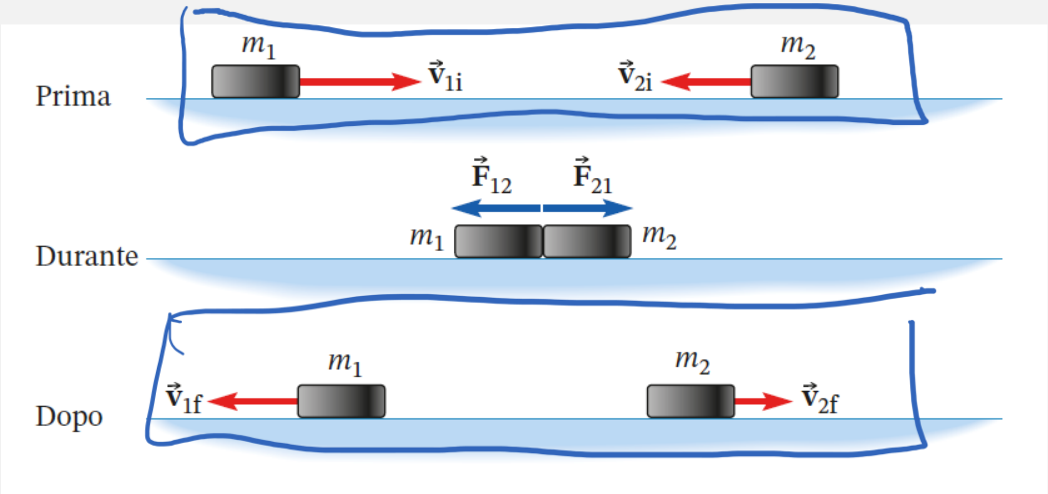
Se un corpo è coinvolto in più di una interazione, la variazione della sua quantità di moto è pari all'impulso totale agente durante l'intervallo di tempo ($\vec{J}_{TOT}$)

$$\boxed{\vec{J}_{TOT} = \vec{F}_1\Delta t + \vec{F}_2\Delta t \ldots = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 \ldots)\Delta t = \sum\vec{F}\Delta t}$$

Teorema dell'impulso: l'impulso totale agente su un corpo è uguale alla variazione della quantità di moto del corpo stesso durante quell'intervallo di tempo

$$m\Delta\vec{v} = \Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t$$

CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ MOTO



Se la forza esterna netta che agisce su un sistema è zero, la quantità di moto del sistema viene conservata:

$$\sum \vec{F}_{ext} = 0\,, \vec{p}_i = \vec{p}_f$$

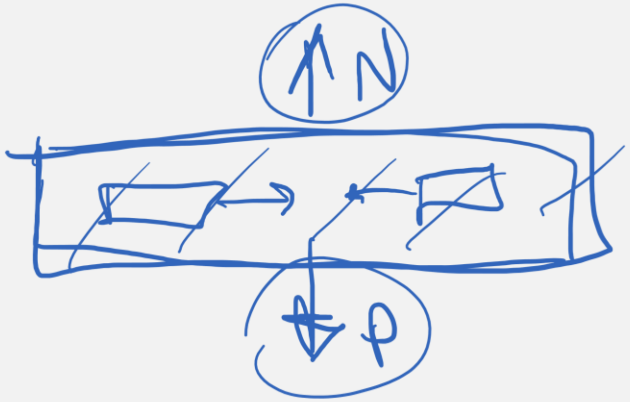
$$\Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2$$

$$\vec{p}_{1f} - \vec{p}_{1i} = -(\vec{p}_{2f} - \vec{p}_{2i})$$

$$p_{1f} - p_{1i} = -p_{2f} + p_{2i}$$

$$\vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f} = \vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i}$$

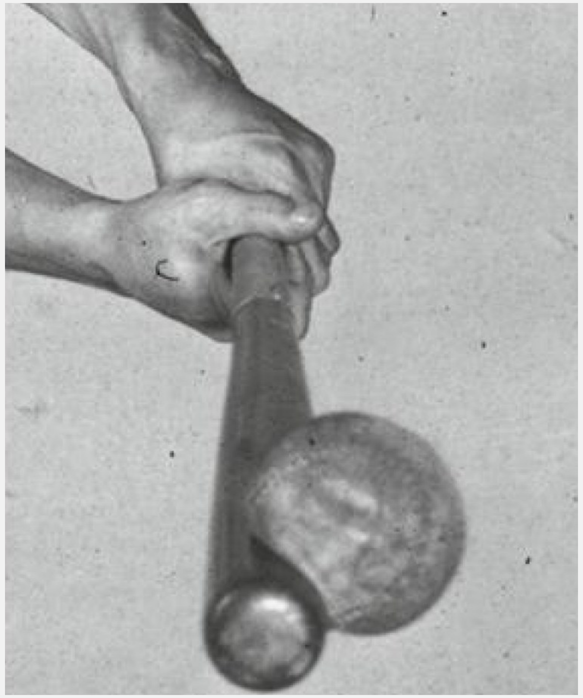
La somma della quantità di moto dei dischi dopo l'urto è uguale alla somma delle quantità di moto degli stessi dischi prima dell'urto: <u>la quantità di moto totale del sistema si è conservata</u>

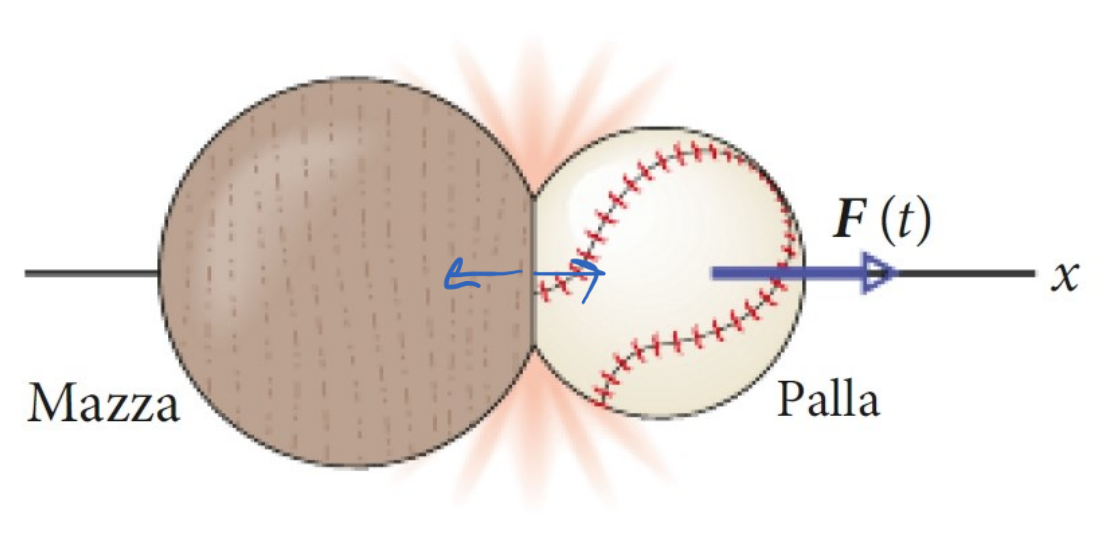


$N \cancel{\times} P \quad \Sigma F_{ext} = 0$

URTI

Un urto è un'interazione che si sviluppa tra due o più corpi quando vengono a contatto, caratterizzata dalla presenza di forze di intensità molto elevata agenti in intervalli di tempo molto brevi (forze impulsive).





UN URTO È UN EVENTO ISOLATO DURANTE IL QUALE UNA <u>FORZA RELATIVAMENTE INTENSA</u> AGISCE PER UN <u>TEMPO RELATIVAMENTE BREVE</u> SU CIASCUNO DEI CORPI CHE ENTRANO IN CONTATTO.

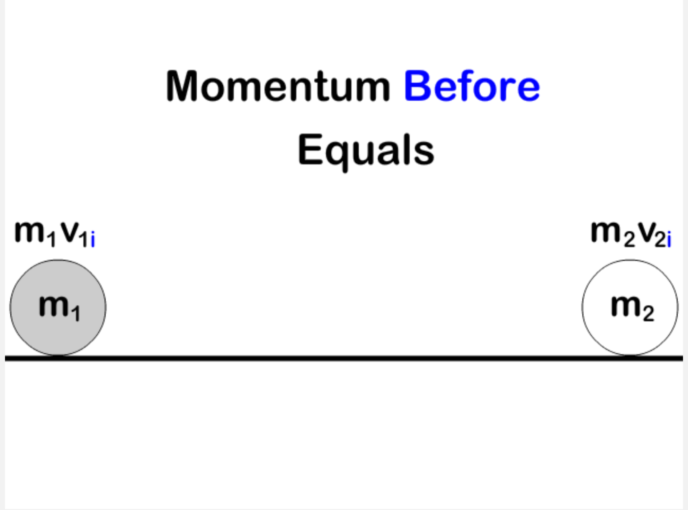
URTI

UN URTO È UN EVENTO ISOLATO DURANTE IL QUALE UNA <u>FORZA RELATIVAMENTE INTENSA</u> AGISCE PER UN <u>TEMPO RELATIVAMENTE BREVE</u> SU CIASCUNO DEI CORPI CHE ENTRANO IN CONTATTO.

Anche se presenti, le forze esterne sono trascurabili rispetto all'intensità delle forze impulsive → <u>legge di conservazione della quantità di moto</u>

…forza relativamente intensa…tempo relativamente breve…

$$\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \overrightarrow{F_{est}} + \underbrace{\cancel{\overrightarrow{F_{int}}}}_{F_{12} = -F_{21}}^{=0} = \overrightarrow{F_{est}} \longrightarrow \Delta\vec{p} = \overbrace{\overrightarrow{F_{est}}}^{\text{trascurabi}}\Delta t = 0$$



Negli urti la quantità di moto del sistema si conserva nel tempo $(\Delta p = 0)$

URTI

URTI ELASTICI

$\Delta\vec{p}=0$

- Si conserva la quantità di moto del sistema
- Si conserva l’energia cinetica del sistema

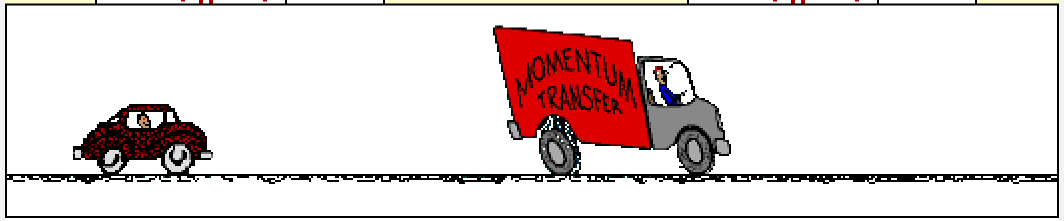
URTI ANELASTICI

$\Delta\vec{p}=0$

- Si conserva la quantità di moto del sistema
- NON si conserva l’energia cinetica del sistema

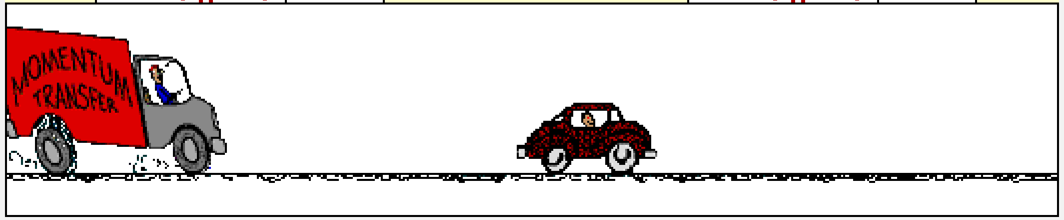
Car	
mass (kg)	1000
vel. (m/s)	20.0
mom. (kg m/s)	20 000

Truck	
mass (kg)	3000
vel. (m/s)	0.0
mom. (kg m/s)	0



Truck	
mass (kg)	3000
vel. (m/s)	20.0
mom. (kg m/s)	60 000

Car	
mass (kg)	1000
vel. (m/s)	0.0
mom. (kg m/s)	0



$\frac{1}{2}mv^2$

p

$60000 \rightarrow 30000 \rightarrow \Delta p = 30000$

$0 \rightarrow 30000 \rightarrow \Delta p = 30000$

URTI

URTI ELASTICI

- Si conserva la quantità di moto del sistema
- Si conserva l'energia cinetica del sistema

URTI ANELASTICI

- Si conserva la quantità di moto del sistema
- NON si conserva l'energia cinetica del sistema

$\frac{1}{2} m v_f^2 \qquad mv$

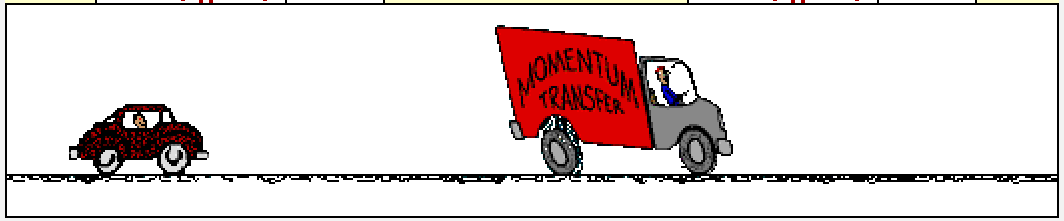
(i) $\frac{1}{2} m v_i^2$ e $m v_i$ (f) $\frac{1}{2} m v_f^2$ e $m v_f$

$4000 \rightarrow \frac{1}{2} m v^2$ 20 3000

$4000 \rightarrow \frac{1}{2} m v^2$ 15 4000

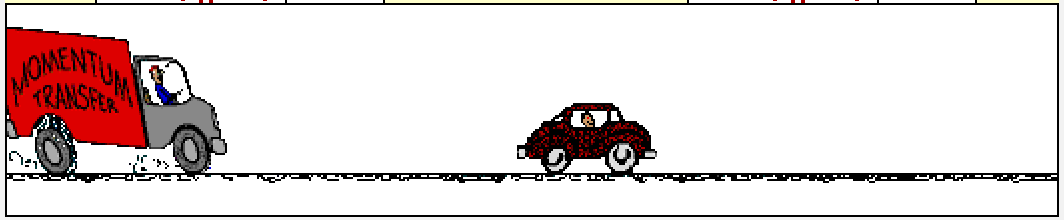
Car	
mass (kg)	1000
vel. (m/s)	20.0
mom. (kg m/s)	20 000

Truck	
mass (kg)	3000
vel. (m/s)	0.0
mom. (kg m/s)	0



Truck	
mass (kg)	3000
vel. (m/s)	20.0
mom. (kg m/s)	60 000

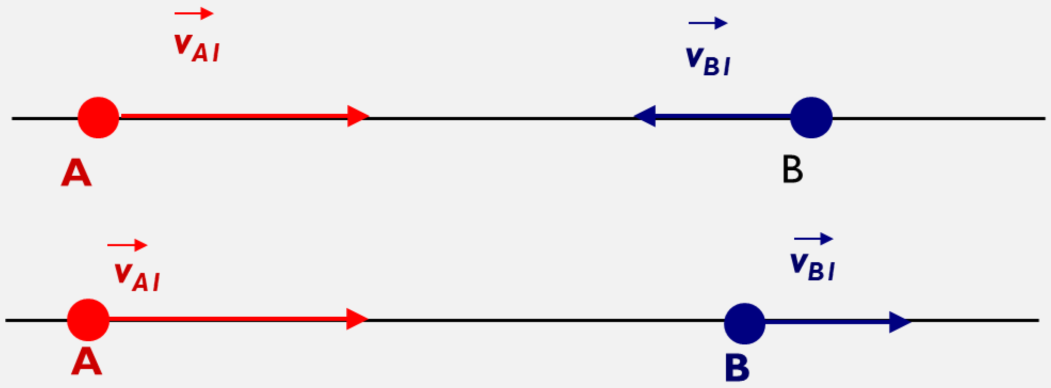
Car	
mass (kg)	1000
vel. (m/s)	0.0
mom. (kg m/s)	0



URTO CENTRALE ELASTICO

K, P

Avviene lungo la congiungente i centri: le velocità hanno tutte la stessa direzione



scontro frontale

tamponamento

Conservazione della quantità di moto

$$m_A\vec{v}_{A1} + m_B\vec{v}_{B1} = m_A\vec{v}_{A2} + m_B\vec{v}_{B2}$$

Conservazione dell'energia cinetica

$$\frac{1}{2}m_A v_{A1}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{B1}^2 = \frac{1}{2}m_A v_{A2}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{B2}^2$$

URTO CENTRALE ELASTICO

$$\begin{cases} m_A v_{A1} + m_B v_{B1} = m_A v_{A2} + m_B v_{B2} \\ \frac{1}{2} m_A v_{A1}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{B1}^2 = \frac{1}{2} m_A v_{A2}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{B2}^2 \end{cases}$$

$\rightarrow m_A v_{A1} - m_A v_{A2} = m_B v_{B2} - m_B v_{B1}$

$$\begin{cases} m_A (v_{A1} - v_{A2}) = m_B (v_{B2} - v_{B1}) \\ m_A (v_{A1}^2 - v_{A2}^2) = m_B (v_{B2}^2 - v_{B1}^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_A (v_{A1} - v_{A2}) = m_B (v_{B2} - v_{B1}) \\ m_A (v_{A1} - v_{A2})(v_{A1} + v_{A2}) = m_B (v_{B2} - v_{B1})(v_{B2} + v_{B1}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (v_{A1} + v_{A2}) = (v_{B2} + v_{B1}) \\ m_A (v_{A1} - v_{A2}) = m_B (v_{B2} - v_{B1}) \end{cases}$$

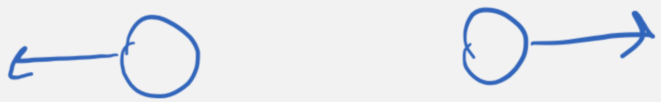
URTO CENTRALE ELASTICO

$$\begin{cases} (v_{A1} + v_{A2}) = (v_{B2} + v_{B1}) \\ m_A(v_{A1} - v_{A2}) = m_B(v_{B2} - v_{B1}) \end{cases}$$

$\rightarrow v_{A2}$?

$$\begin{cases} v_{A2} = v_{B2} + v_{B1} - v_{A1} \\ m_A(v_{A1} - v_{B2} - v_{B1} + v_{A1}) = m_B(v_{B2} - v_{B1}) \end{cases}$$

$$\boxed{v_{B2} = \frac{m_A(2v_{A1} - v_{B1}) + m_B v_{B1}}{m_A + m_B}} \qquad \boxed{v_{A2} = \frac{m_A v_{A1} + 2m_B v_{B1} - m_B v_{A1}}{m_A + m_B}}$$



URTO CENTRALE ELASTICO

$$\boxed{v_{B2} = \frac{m_A(2v_{A1} - v_{B1}) + m_B v_{B1}}{m_A + m_B}}$$

$$\boxed{v_{A2} = \frac{m_A v_{A1} + 2m_B v_{B1} - m_B v_{A1}}{m_A + m_B}}$$

<u>Caso particolare: masse uguali</u> → $m_A = m_B$

$$v_{B2} = \frac{m_A(2v_{A1} - v_{B1}) + m_B v_{B1}}{m_A + m_B} = \frac{m_A 2v_{A1} - \cancel{m_A v_{B1}} + \cancel{m_B v_{B1}}}{m_A + m_B} = \frac{\cancel{m} 2v_{A1}}{2\cancel{m}} = v_{A1}$$

$m_A = m_B = m$

$$\boxed{v_{B2} = v_{A1}}$$

$$\boxed{v_{A2} = v_{B1}}$$

$$v_{A2} = \frac{m_A v_{A1} + 2m_B v_{B1} - m_B v_{A1}}{m_A + m_B} = \frac{\cancel{m v_{A1}} + 2m v_{B1} - \cancel{m v_{A1}}}{2m} = \frac{2\cancel{m} v_{B1}}{2\cancel{m}} = v_{B1}$$

URTO CENTRALE ELASTICO

$$v_{B2} = \frac{m_A(2v_{A1} - v_{B1}) + m_B v_{B1}}{m_A + m_B}$$

$$v_{A2} = \frac{m_A v_{A1} + 2m_B v_{B1} - m_B v_{A1}}{m_A + m_B}$$

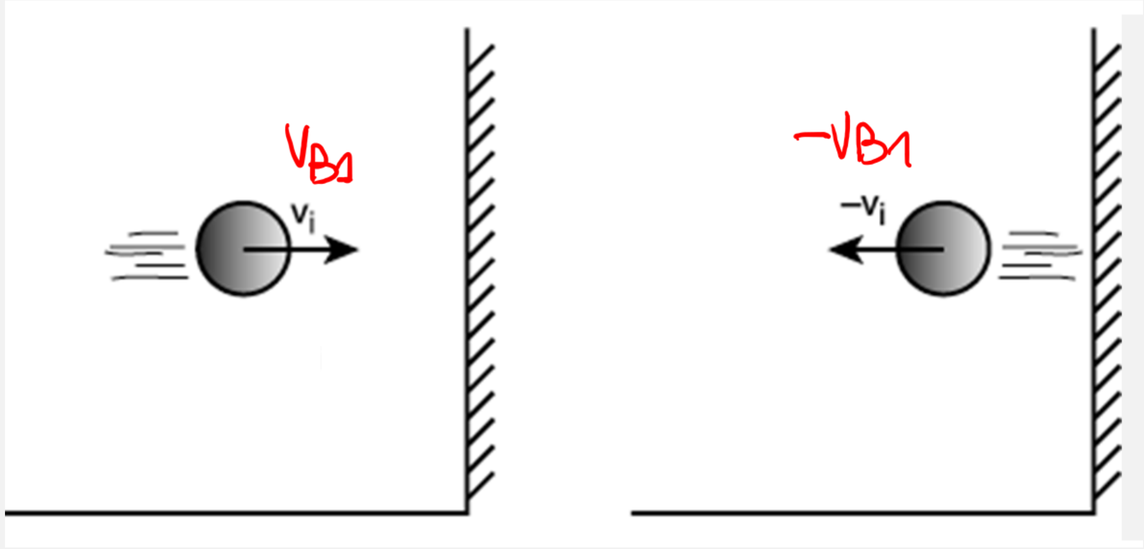
<u>Caso particolare: urto contro una parete</u>

$m_A = \infty$ $(m_A >> m_B)$

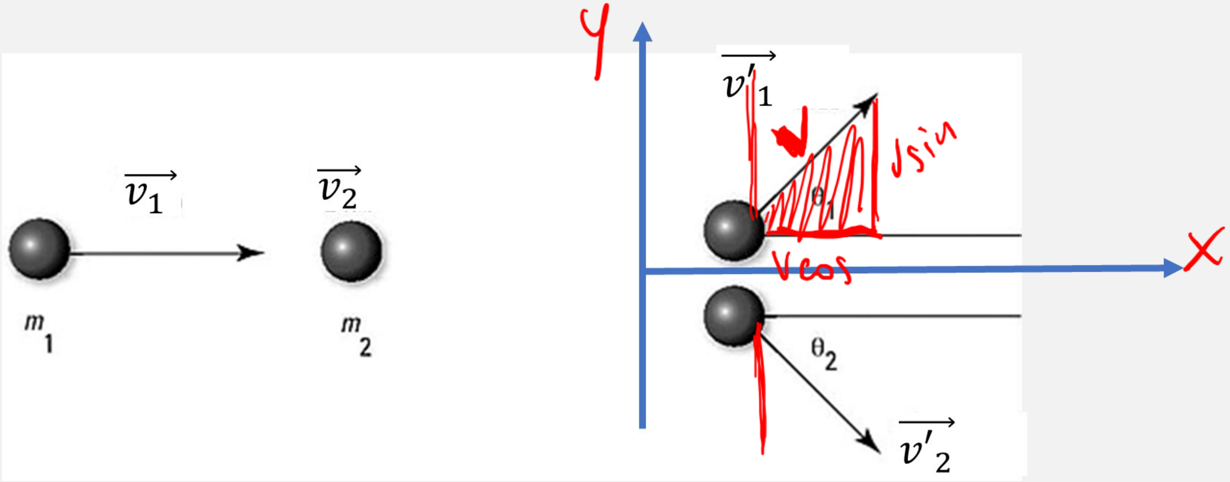
$v_{A1} = v_{A2} = 0$

A = parete

$$v_{B2} = \lim_{m_A \to \infty} \frac{m_A(2\underbrace{v_{A1}}_{=0} - v_{B1}) + m_B v_{B1}}{m_A + m_B} = \frac{-m_A v_{B1} + m_B v_{B1}}{m_A + m_B} = -v_{B1}$$



URTO NON CENTRALE ELASTICO



m_2 fermo

= 0

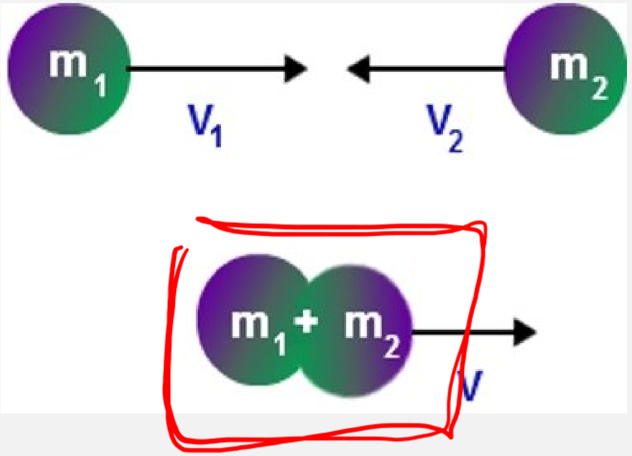
$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\overrightarrow{v'}_1 + m_2\overrightarrow{v'}_2$$

→ SR con asse orizzontale nella stessa direzione di $\vec{v}_1$

$$m_1 v_1 = m_1 v'_1 \cos\theta_1 + m_2 v'_2 \cos\theta_2$$ → Componenti orizzontali

$$0 = m_1 v'_1 \sin\theta_1 - m_2 v'_2 \sin\theta_2$$ → Componenti verticali

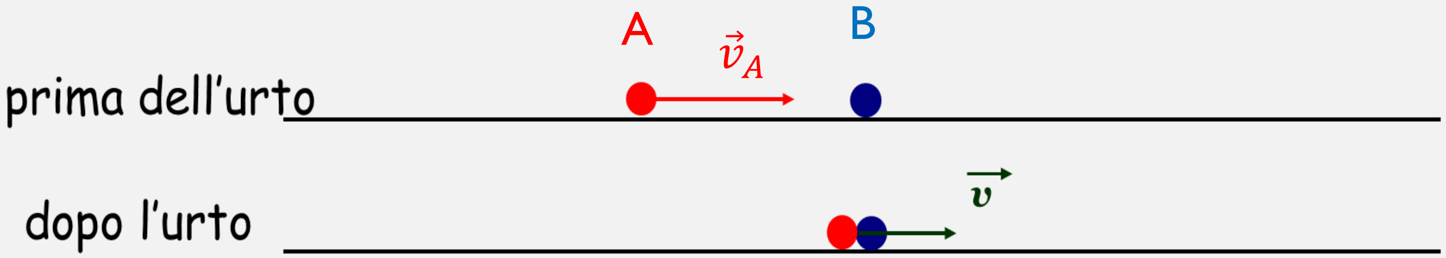
URTO PERFETTAMENTE ANELASTICO



→ Detto anche URTO CON CATTURA: dopo l'urto, i due corpi procedono insieme

$$\vec{p}_{prima} = \vec{p}_{dopo} \rightarrow \ m_1\vec{v}_{1-prima} + m_2\vec{v}_{2-prima} = \overbrace{(m_1 + m_2)}^{M}\vec{v}_{dopo}$$

m1 v1 dopo + m2 v2 dopo



$$\boxed{m_A\vec{v}_{A1} + m_B\vec{v}_{B1} = (m_A + m_B)\vec{v}}$$

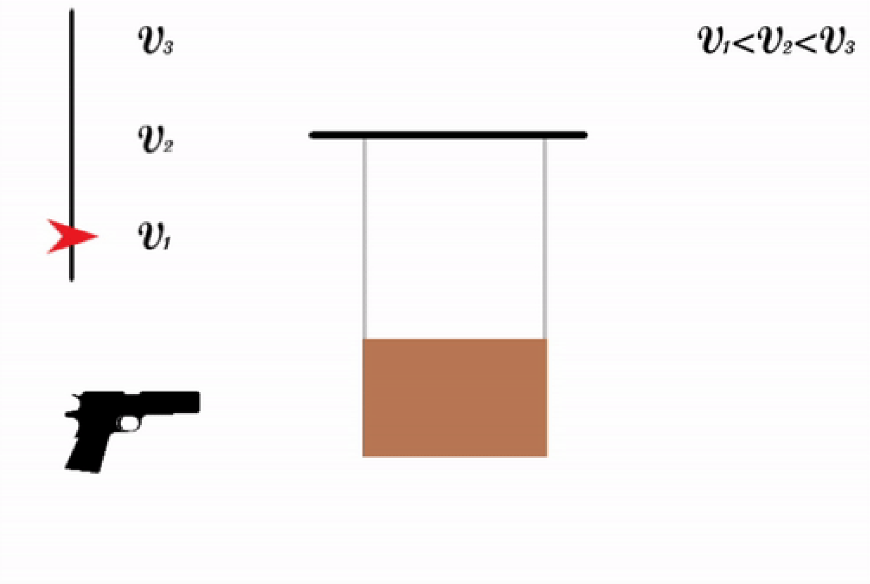
$$\boxed{\vec{v} = \frac{m_A\vec{v}_{A1} + m_B\vec{v}_{B1}}{m_A + m_B}} \rightarrow \vec{p}_1$$

→ Nel caso particolare in cui la massa B sia ferma prima dell'urto, la velocità finale del sistema sarà:

$$\vec{v} = \frac{m_A\vec{v}_{A1}}{m_A + m_B} \ \cancel{+ m_B \vec{v}_{B1}}$$

URTO PERFETTAMENTE ANELASTICO

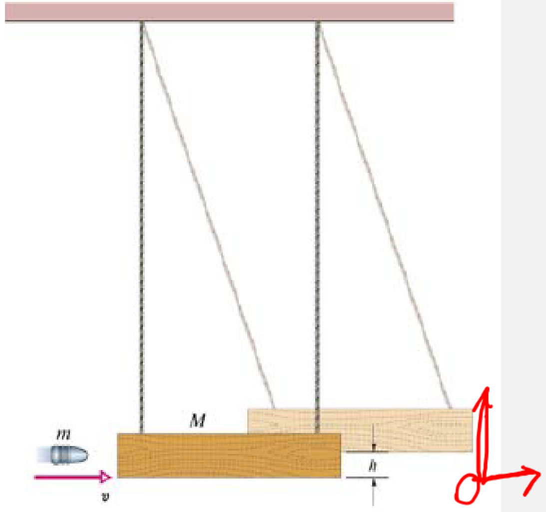
→ Caso particolare: IL PENDOLO BALISTICO



dispositivo per determinare
velocità dei proiettili

$$V = \frac{m}{(m+M)} v$$ conservazione **quantità di moto**

$$\frac{1}{2}(m+M)V^2 = (m+M)gh$$ conservazione **energia meccanica**



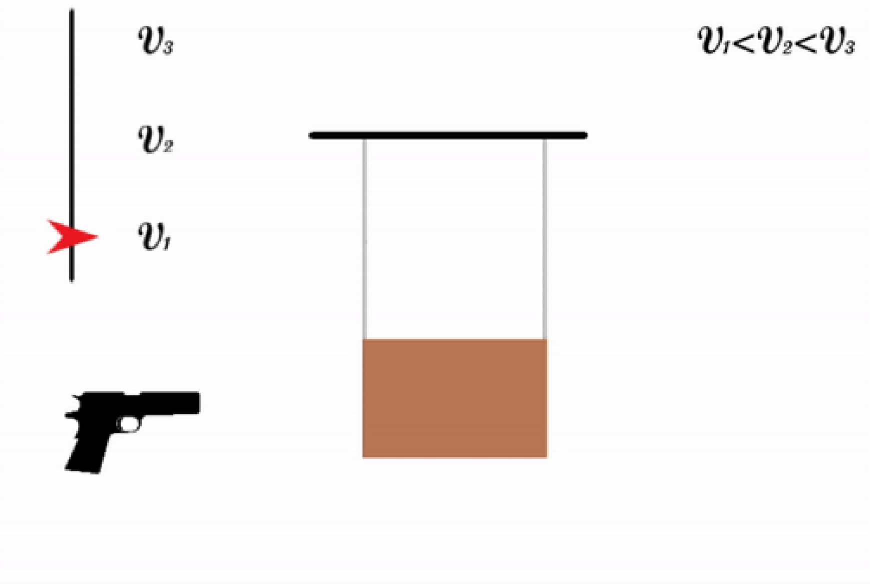
Nella posizione più bassa non abbiamo energia potenziale gravitazionale, ma solo energia cinetica: $\frac{1}{2}(M+m)V^2$

Il pendolo si fermerà quando avrà raggiunto l'altezza massima, poi tornerà indietro: qui non c'è più energia cinetica → nel punto più alto, l'energia meccanica sarà solo energia potenziale gravitazionale: $(M+m)gh$

$$\frac{1}{2}(M+m)V^2 = (M+m)gh$$

URTO PERFETTAMENTE ANELASTICO

→ Caso particolare: IL PENDOLO BALISTICO



$$\frac{1}{2}(M+m)V^2 = (M+m)gh$$

$$V = \sqrt{2gh}$$

Sostituendo il valore di V nell'equazione della quantità di moto:

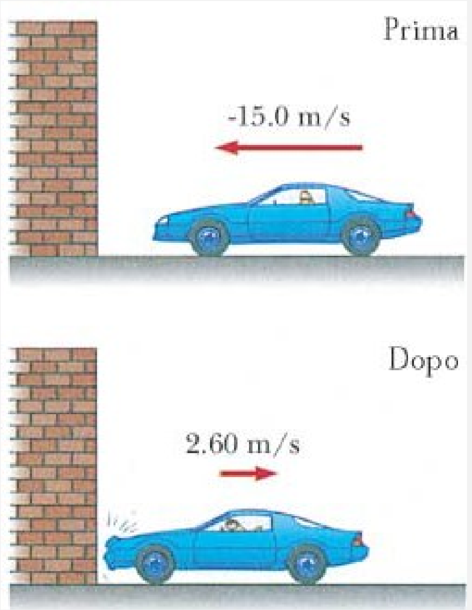
$$V = \frac{m}{m+M}v \rightarrow \sqrt{2gh} = \frac{m}{m+M}v \rightarrow v = \sqrt{2gh}\frac{m+M}{m}$$

conservaz. q. moto

v proiettile

Esempio

In un test d'urto, un'auto di massa m=1500 kg urta contro un muro. La velocità iniziale è vi = -15.0 m/s e quella finale è vf = 2.60 m/s. Se la durata dell'urto è di 0.15 s, determinare l'impulso dovuto all'urto e la forza media esercitata sull'auto.



x

$$\vec{I} = \Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t$$

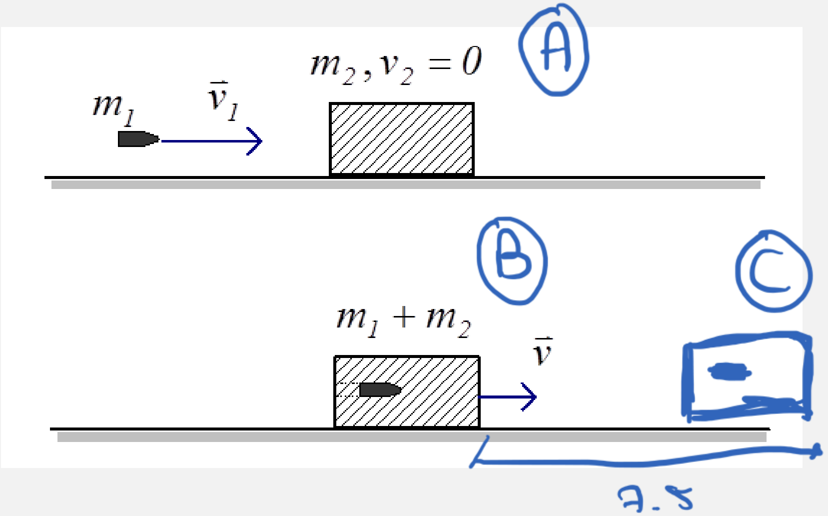
$$\vec{p}_f - \vec{p}_i = m\vec{v}_f - m\vec{v}_i$$

$$|\vec{I}| = I = 1500\,kg \cdot 2.6\,m/s - 1500\,kg \cdot (-15\,m/s) = 26400\ N \cdot s$$

$$\vec{I} = \vec{F}_m \Delta t \rightarrow |\vec{F}_m| = \frac{I}{\Delta t} = \frac{26400\ N \cdot s}{0.15\ s} = 1.76 \cdot 10^5\ N$$

Esempio

Un proiettile di massa m1=12.0 g viene sparato su un blocco di legno di massa m2=100 g, fermo su una superficie orizzontale. Dopo l'urto il proiettile si conficca nel blocco, che scivola per uno spazio L=7.50 m prima di fermarsi. Se il coefficiente di attrito dinamico tra blocco e superficie è μd=0.650, qual era la velocità con cui è stato sparato il proiettile?



URTO PERF. ANELASTICO

$$m_1\vec{v}_1 + \cancel{m_2\vec{v}_2} = m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f}$$

$$m_1\vec{v}_1 = (m_1+m_2)\vec{v} \rightarrow \vec{v} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\cdot\vec{v}_1$$

$$F_A = \mu_D m g = \mu_D(m_1+m_2)g \rightarrow W_{FA} = \vec{F}_A\cdot\Delta\vec{x} = -(m_1+m_2)\mu_D g L$$

$$W_{FA} = \Delta K$$

$$\hookrightarrow K_f - K_i = -\frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2$$

$$W_{FA} = -\frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2$$

$$-\frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2 = -(m_1+m_2)\mu_D g L$$

$$\hookrightarrow V = \frac{m_1+m_2}{m_1}\sqrt{2\mu_D g L} = 91.2\ \text{m/s}$$

da A a B → conserv. q. moto

da B a C → $W = \Delta K$

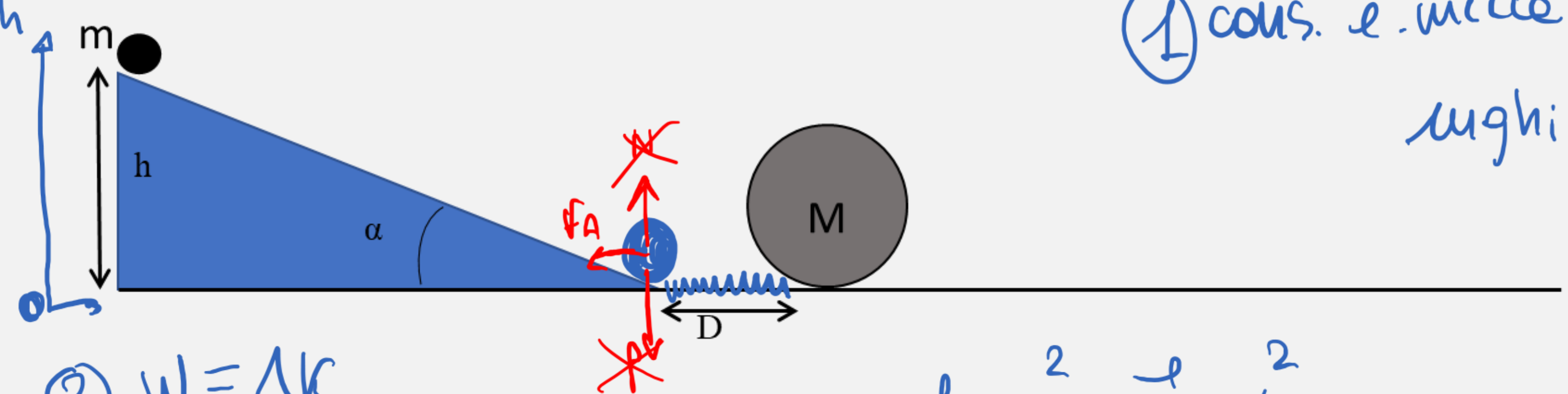
Esempio

Una pallina si trova in quiete in cima al piano inclinato di un angolo α e di altezza h=1.00 m, come in figura. La pallina scende sino a terra e procede fino ad incontrare un pallone fermo ad una distanza D=50 cm dalla fine del piano inclinato. Calcolate:

a. La velocità con cui la pallina arriva a terra, nel caso in cui non ci sia attrito.

b. La velocità con cui la pallina incontra il pallone fermo, considerando che il coefficiente d'attrito fra la pallina e la superficie del pavimento, sia μ=0.1.

c. Considerato l'urto completamente anelastico, e sapendo che la pallina ha massa m=10g ed il pallone ha massa M=0.500 Kg, la velocità con cui procederanno la pallina e il pallone immediatamente dopo l'urto.



(1) cons. e. mecc. → $U_i + K_i = U_f + K_f$

$$mgh_i + \cancel{\frac{1}{2}mv_i^2} = \cancel{mgh_f} + \frac{1}{2}mv_f^2$$

$$mgh_i = \frac{1}{2}mv_f^2$$

$$v_f = \sqrt{2gh_i} = 4.4\ m/s$$

(2) $W = \Delta K$

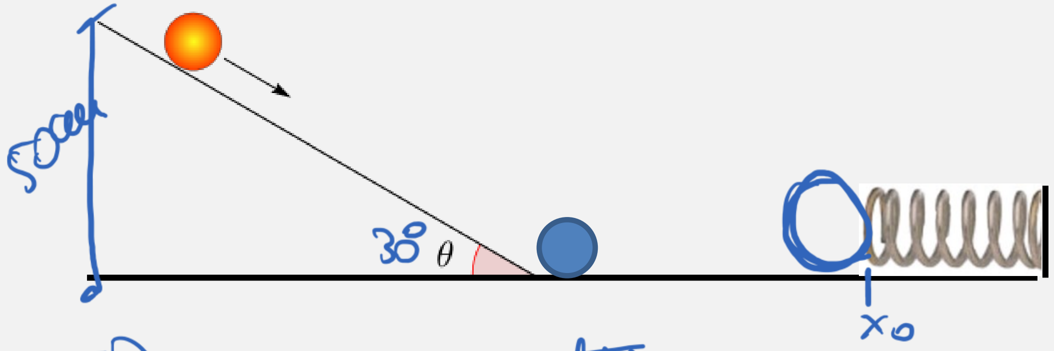
$$\underbrace{W_{FA} = \Delta K}_{K_f - K_i} \rightarrow \underbrace{-\mu_D m g \Delta = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2}$$

$$\rightarrow v_f = \sqrt{v_i^2 - 2g\mu_D\Delta} = 4.2\ m/s$$

(3) $m_1 v_{1f} = (m_1 + m_2)\cdot V_{URTO} \rightarrow V_{URTO} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\cdot v_{1f} = 0.08\ m/s$

Esempio

Una pallina parte da ferma da un'altezza h=50cm di un piano inclinato di un angolo ϑ=30° come in figura. Sapendo che arrivata a terra la pallina urta in modo perfettamente anelastico una pallina di uguale massa e inizialmente ferma, calcolare la velocità delle palline dopo l'urto e la compressione massima della molla di costante elastica K=100N/m che incontrano dopo l'urto (la massa di ciascuna pallina è m=25g e gli attriti sono trascurabili).



1) discesa: $mgh = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow$ cons. e. mecc.

$$v = \sqrt{2gh} = 3.13\,m/s$$

2) urto con cattura

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_2 \rightarrow m v_1 = 2m v_2 \rightarrow v_2 = \frac{v_1}{2} = 1.56\,m/s$$

3) molla

$$U_{el_i} + K_i = U_{el_f} + K_f \rightarrow \cancel{\frac{1}{2}Kx_i^2} + \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}Kx_f^2 + \cancel{\frac{1}{2}mv_f^2}$$

$$\frac{1}{2}(2m)v_2^2 = \frac{1}{2}Kx_f^2$$

$$x_f = v_2\sqrt{\frac{2m}{K}} = 3.5\,cm$$

Esempio

Un corpo di massa $m_1 = 400g$ viene lanciato da un'altezza $h_A = 30cm$ e con velocità $v_A = 0.5m/s$ giù per uno scivolo privo di attrito. Giunto alla fine dello scivolo (punto C), il corpo percorre un tratto orizzontale CD lungo $L = 30cm$ e con coefficiente di attrito $\mu = 0.2$. Poi, il corpo urta anelasticamente una massa $m_2 = 100g$ collegata ad una molla di costante elastica $k = 70N/m$. Si consideri che l'altezza nel punto B è $h_B = 10cm$ rispetto alla base.

Calcolare:

a. l'energia cinetica del corpo in B
b. La lunghezza Δx di compressione della molla in seguito all'urto del corpo
c. L'energia meccanica totale nei punti A, B, C, D e nell'istante in cui la molla è compressa.

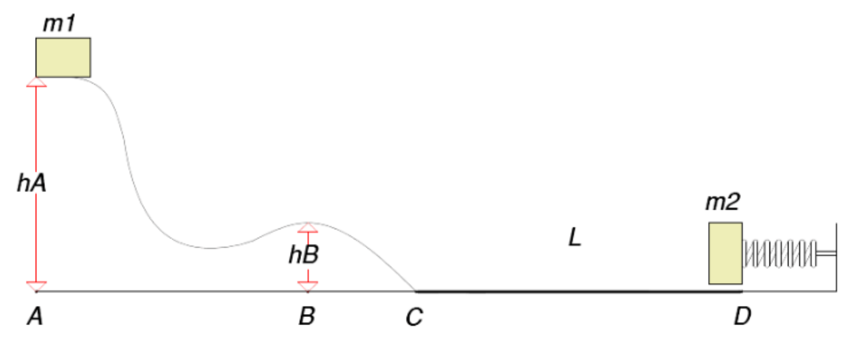


Figura 1: condizione iniziale