- Risolvere la seguente disequazione, evidenziando le eventuali condizioni di esistenza:

$$\log_{\frac{1}{3}}(2x-1) < 1$$

S: $\boldsymbol{x > \frac{2}{3}}$

- Risolvere la seguente disequazione, evidenziando le eventuali condizioni di esistenza:

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2+2) \leq \log_{\frac{1}{2}}(x+1) + \log_{\frac{1}{2}}(x-2)$$

S: $\boldsymbol{x > 2}$

- Determinare il dominio della seguente funzione:

$$f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x+10) - \log_{\frac{1}{2}}(x^2+4x)}$$

S: $\boldsymbol{-10 < x < -5, x \geq 2}$

- Determinare il dominio della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{|6x-5| - x^2}}$$

S: $\boldsymbol{-3 - \sqrt{14} < x < -3 + \sqrt{14} \cup 1 < x < 5}$

$$f(x) = x^3(\ln x - 1)$$

$f(x) = x^3 \cdot (\ln x - 1)$

Classificazione. È una funzione mista logaritmica intera.

Dominio. Per determinarne il dominio bisogna porre la condizione che l'argomento del logaritmo sia maggiore di zero, e pertanto: $D_f =]0; +\infty[$. $= \mathbb{R}, x > 0$

Segno e Intersezioni con gli assi.

$$f(x) > 0 \Rightarrow x^3 \cdot (\ln x - 1) > 0.$$

Abbiamo che:

$$x^3 > 0 \Rightarrow x > 0;$$

$$\ln x - 1 > 0 \Rightarrow x > e; \rightarrow \ln x > 1$$

$$\Rightarrow x < 0 \text{ o } x > e.$$

Poiché il dominio è $]0; +\infty[$, si ha che $f(x) > 0$ per $x > e$. La funzione non interseca l'asse y perché $x = 0 \notin D_f$, mentre interseca l'asse x nel punto di coordinate $(e; 0)$.

Comportamento della funzione in punti particolari del dominio. I punti importanti, per i quali è utile stabilire il comportamento della funzione, sono $0, +\infty$.

Abbiamo che:

$$\lim_{x \to 0^+} x^3 \cdot (\ln x - 1) = 0 \cdot (-\infty),$$

forma indeterminata. Possiamo scrivere:

$$\lim_{x \to 0^+} x^3 \cdot (\ln x - 1) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x - 1}{\frac{1}{x^3}} = \frac{-\infty}{+\infty}$$

forma indeterminata che possiamo risolvere con la regola di De l'Hospital:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x - 1}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{3}{x^4}} = \lim_{x \to 0^+} -\frac{x^3}{3} = 0.$$

Dunque la funzione non ammette asintoti verticali.

Abbiamo che:

$$\lim_{x \to +\infty} x^3 \cdot (\ln x - 1) = +\infty,$$

la funzione non ammette asintoto orizzontale, allora vediamo se esiste l'asintoto obliquo $y = mx + q$. Abbiamo che:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} x^2 \cdot (\ln x - 1) = +\infty,$$

quindi possiamo concludere che non esiste neanche l'asintoto obliquo.

Studio della derivata prima. Abbiamo che:

$$f'(x) = x^2 \cdot (3 \ln x - 2) = 3x^2 \ln(x) - 2x^2$$

Studiamo il segno della derivata prima: ponendo $f'(x) > 0$, otteniamo che

$$x^2 \cdot (3 \ln x - 2) > 0 \Rightarrow 3 \ln x - 2 > 0 \Rightarrow \ln x > \frac{2}{3} \Rightarrow x > \sqrt[3]{e^2}.$$

Possiamo concludere che la funzione f è strettamente crescente per $x \in]\sqrt[3]{e^2}; +\infty[$, mentre f è strettamente decrescente per $x \in]0; \sqrt[3]{e^2}[$.

Inoltre $x = \sqrt[3]{e^2}$ è un punto di minimo locale. Il minimo della funzione vale $f(\sqrt[3]{e^2}) = -\frac{1}{3}e^2$.

Studio della derivata seconda. Abbiamo che:

$$f''(x) = x \cdot (6 \ln x - 1).$$

Studiamo il segno della derivata seconda: ponendo $f''(x) > 0$, otteniamo che

$$x \cdot (6 \ln x - 1) > 0.$$

Abbiamo che:

$$x > 0$$

e

$$6 \ln x - 1 > 0 \Rightarrow \ln x > \frac{1}{6} \Rightarrow x > \sqrt[6]{e}.$$

Quindi, tenendo presente che $D_f =]0; +\infty[$

$$f''(x) > 0 \Rightarrow x > \sqrt[6]{e}.$$

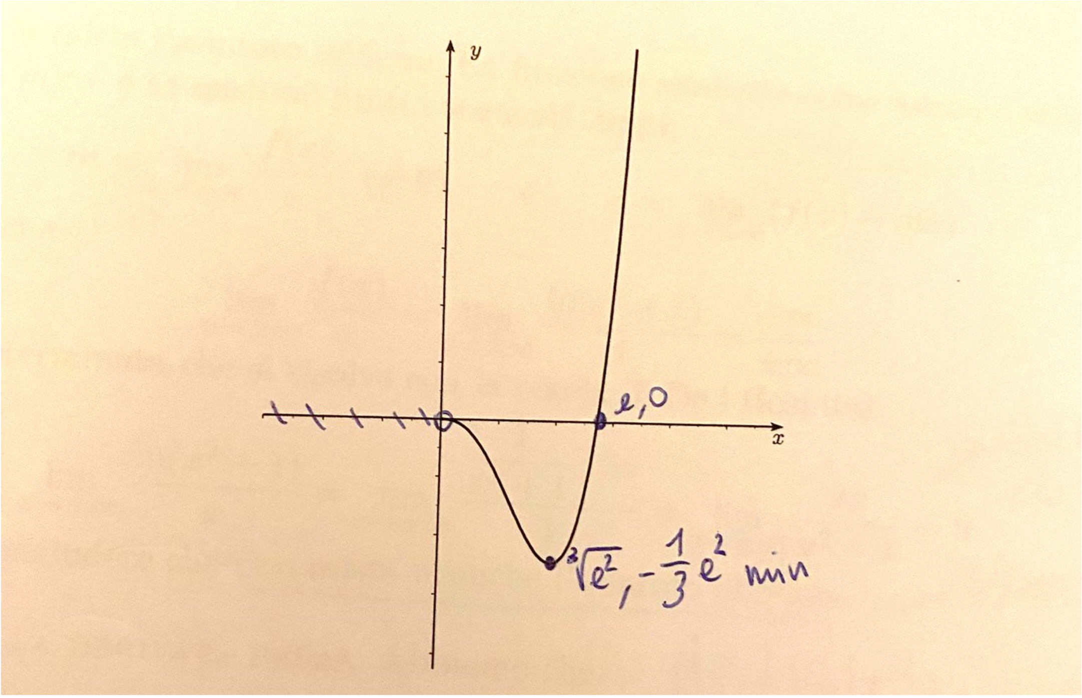
Possiamo concludere che la funzione f è convessa per $x \in]\sqrt[6]{e}; +\infty[$, mentre f è concava per $x \in]0; \sqrt[6]{e}[$.

CONCAVA CONVESSA

Poiché $f(\sqrt[6]{e}) = -\frac{5}{6}\sqrt{e}$, abbiamo che $F = \left(\sqrt[6]{e}; -\frac{5}{6}\sqrt{e}\right)$ è un punto di flesso.

Grafico

$$f(x) = x^3(\ln x - 1)$$



$$f(x) = 1 - \sqrt{\frac{x}{x+1}}$$

$$f(x) = 1 - \sqrt{\frac{x}{x+1}}$$

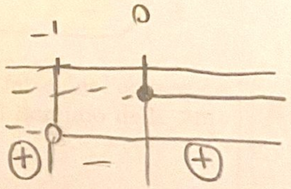
CLASSIFICAZIONE. È una funzione irrazionale fratta.

DOMINIO. Data la natura della funzione (radice con indice pari), per determinarne il dominio bisogna porre la condizione che il radicando sia maggiore o uguale a zero, quindi:

$$\frac{x}{x+1} \geq 0$$

Num. $\geq 0 \Rightarrow \; x \geq 0.$

Den. $> 0 \Rightarrow \; x+1 > 0 \Rightarrow \; x > -1$



$$\Rightarrow \frac{x}{x+1} \geq 0 \Rightarrow \boxed{x < -1; \; x \geq 0.}$$

Il dominio della funzione è $D_f =]-\infty; -1[\cup [0; +\infty[$.

INTERSEZIONI CON GLI ASSI. Con l'asse y abbiamo:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - \sqrt{\dfrac{x}{x+1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - \sqrt{\dfrac{0}{0+1}} = 1 \end{cases}$$

Con l'asse x abbiamo:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = 1 - \sqrt{\dfrac{x}{x+1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - \sqrt{\dfrac{x}{x+1}} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{x+1}} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{x+1} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x+1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ impossibile} \rightarrow \text{no intersezioni con } x$$

Pertanto la funzione interseca solo l'asse y nel punto di coordinate (0, 1). L'equazione irrazionale del secondo sistema è stata risolta senza porre la condizione di esistenza della radice, poiché essa era stata già considerata al momento della determinazione del dominio della funzione.

SEGNO.

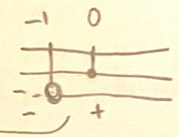
$$f(x) > 0 \Rightarrow 1 - \sqrt{\frac{x}{x+1}} > 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{x}{x+1}} < 1 \Rightarrow \frac{x}{x+1} < 1$$

→ isolo x togliere radice

$$\Rightarrow \frac{x}{x+1} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{x-x-1}{x+1} < 0 \Rightarrow \frac{-1}{x+1} < 0 \Rightarrow \frac{1}{x+1} > 0$$

Num. $> 0 \Rightarrow \; \forall \, x \in \mathbb{R}.$

Den. $> 0 \Rightarrow \; x+1 > 0 \Rightarrow \; x > -1$



$$\Rightarrow \frac{1}{x+1} > 0 \Rightarrow x > -1$$

Ripetendo per la disequazione irrazionale le stesse considerazioni fatte per l'equazione, bisogna rettificare parzialmente il risultato (tenendo presente il dominio della funzione), per cui $f(x) > 0$ solo se $x > 0$, ossia

N.B.

$$f(x) > 0 \text{ per } x \in]0; +\infty[.$$

COMPORTAMENTO DELLA FUNZIONE IN PUNTI PARTICOLARI DEL DOMINIO. I punti importanti, per i quali utile stabilire il comportamento della funzione, sono -1, $-\infty$, $+\infty$. Per $x = 0$ è già stato determinato l'andamento, infatti la funzione è definita per $x = 0$ e si ha $f(0) = 1$. (intersezioni)
Abbiamo che:

$$\lim_{x \to -1^-} 1 - \sqrt{\frac{x}{x+1}} = 1 - \sqrt{\frac{-1}{-1^- + 1}} = 1 - \sqrt{\frac{-1}{0^-}} = 1 - \sqrt{+\infty} = -\infty$$

Pertanto la retta di equazione $x = -1$ è asintoto verticale sinistro per la funzione.

non faccio il limite dx per $x \to -1$, poiché tra -1 e 0 la funzione non esiste

$$f(x) = 1 - \sqrt{\frac{x}{x+1}}$$

Inoltre, abbiamo che

$$\lim_{x\to+\infty} 1 - \sqrt{\frac{x}{x+1}} = 1 - \sqrt{\frac{+\infty}{+\infty}}$$

forma indeterminata che si risolve mettendo in evidenza (raccolgo x):

$$\lim_{x\to+\infty} 1 - \sqrt{\frac{x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}} = \lim_{x\to+\infty} 1 - \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}} = 1 - \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{+\infty}}} = 1 - 1 = 0$$

Analogamente

$$\lim_{x\to-\infty} 1 - \sqrt{\frac{x}{x+1}} = 0.$$

Dunque la retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale per la funzione.

Studio della derivata prima. Abbiamo che:

$$* \quad f'(x) = -\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{x+1}{x}}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}$$

Studiamo il segno della derivata prima: ponendo $f'(x) > 0$, otteniamo che

$$-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{x+1}{x}}\cdot\frac{1}{(x+1)^2} > 0 \Rightarrow \frac{1}{(x+1)^2} < 0 \text{ per nessun } x \in D_f.$$

Possiamo concludere che $f'(x) < 0$ per ogni $x \in]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$, quindi che la funzione f è strettamente decrescente nel suo dominio. Inoltre, osserviamo che la derivata prima non è definita in $x = 0$ e, poichè

sempre decrescente!

$$\lim_{x\to0^+} -\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{x+1}{x}}\cdot\frac{1}{(x+1)^2} = -\infty$$

abbiamo che $x = 0$ è un punto a tangente verticale per f.

Grafico.

$(f\circ g)' = f'(g)\cdot g'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$

$$\frac{d\left(1-\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)}{dx} = \frac{\cancel{d(1)}}{\cancel{d}x} - \frac{d\left(\frac{x}{x+1}\right)^{1/2}}{dx}$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{-1/2}}_{f'(g)}\cdot\underbrace{\left[\frac{\frac{d(x)}{dx}\cdot(x+1) - x\cdot\frac{d(x+1)}{dx}}{(x+1)^2}\right]}_{g'} = -\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{1/2}\cdot\left[(\cancel{x}+1)-\cancel{x}\right]}{(x+1)^2} =$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x+1)^{1/2}}{x^{1/2}}\cdot\frac{1}{(x+1)^{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x}\,(x+1)^{3/2}} > 0 \to \text{nessuna soluzione}$$

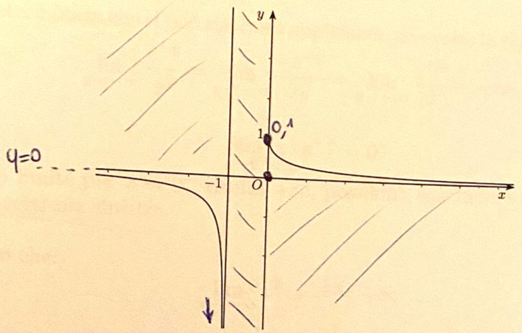
$$= -\frac{1}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{(x+1)^3}}$$

infatti, essendo negativo, mi servirebbe che numerat. o denom. assumessero valori negat. → il num. non può; il den. non può perché sono radici pari

$4\sqrt{x^3}\sqrt{(x+1)^5}$ $> 0 \to x > 0 \longrightarrow f(x)$ convesse con $x>0$

$f(x)$ concave con $x<0$

17



- Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^8 + 2}}{x^3}$$

S: $-\infty$

- Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 6}$$

S: $\mathbf{1/5}$

- Determinare gli eventuali asintoti della seguente funzione (indicare il dominio della funzione):

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

S: $D = \mathbb{R}; y = 0\ as. orizz.;\ \nexists as. vert;\ \nexists as. obl.$