- **INTEGRALI**

Integrale

Il procedimento di integrazione:

- Determinare la funzione conoscendo la derivata (la posizione di un corpo conoscendo la velocità, la numerosità di una popolazione conoscendo il tasso di crescita, …)

- Integrare ha anche il significato di sommare (area di una parte di piano con contorni curvi)

Le due interpretazione sono in stretta relazione

Il concetto d'integrale è legato alla risoluzione di due classi di problemi:

- **Integrale Indefinito**:
  - Calcolo dell'espressione analitica di una funzione a partire dalla derivata della funzione stessa

- **Integrale Definito**:
  - calcolo delle aree di figure delimitate da curve
  - calcolo di volumi
  - calcolo del lavoro di una forza
  - …..

Calcolo integrale: area sottesa al grafico di una funzione

Il problema dell'integrazione per funzioni reali di variabile reale → questo problema è storicamente legato al problema della misura (calcolare l'area di figure con bordi 'curvilinei').

Metteremo in relazione il problema dell'integrazione al problema della primitiva, cioè:

Assegnata una funzione $f : I \to \mathbb{R}$, determinare (tutte) le funzioni $F : I \to \mathbb{R}$ tali che

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$$

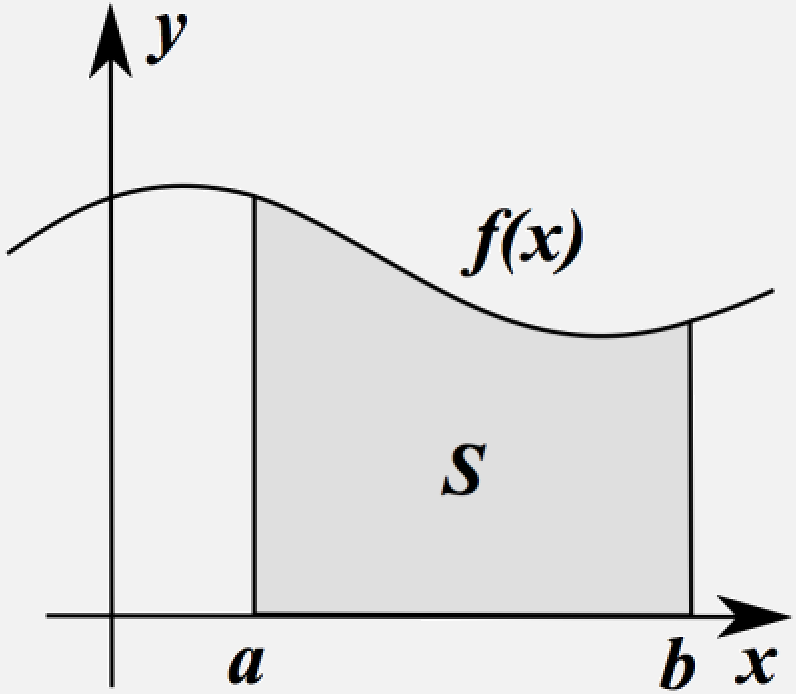
F è detta primitiva di $F' = f$

Motivazioni: calcolo di un'area

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua e positiva.

Calcolare l'area A della regione di piano (detta sottografico di f) compresa tra il grafico di f e l'asse delle x.

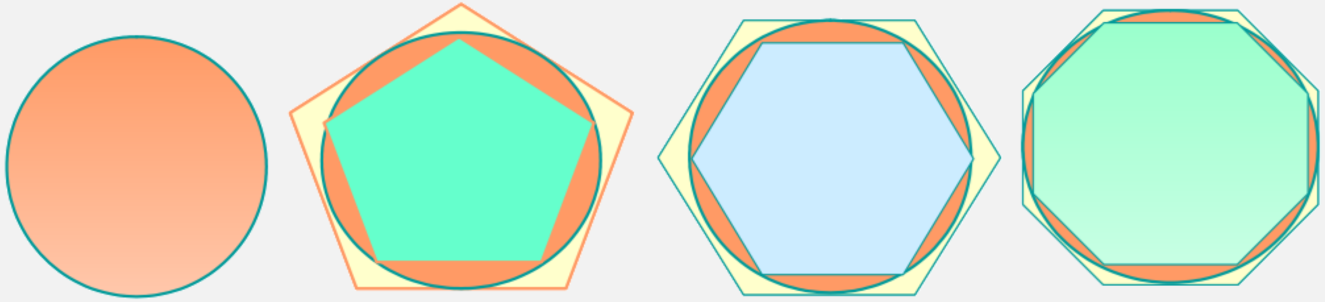
Questo problema ha senso, perché suppongo $f \geq 0$.
Diversamente non avrebbe senso parlare di sottografico di f.

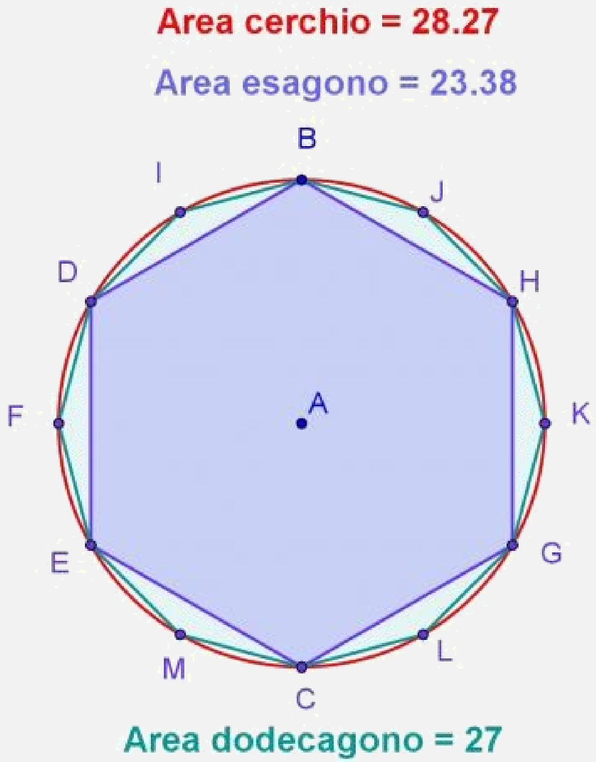


Esempio: area del cerchio.

Archimede di Siracusa (287 a.C. – 212 a.C.): metodo di esaustione per l'area del cerchio/area sottesa da ramo di parabola

È possibile calcolare l'area per approssimazioni successive mediante poligoni regolari inscritti nel cerchio e poligoni regolari circoscritti al cerchio.



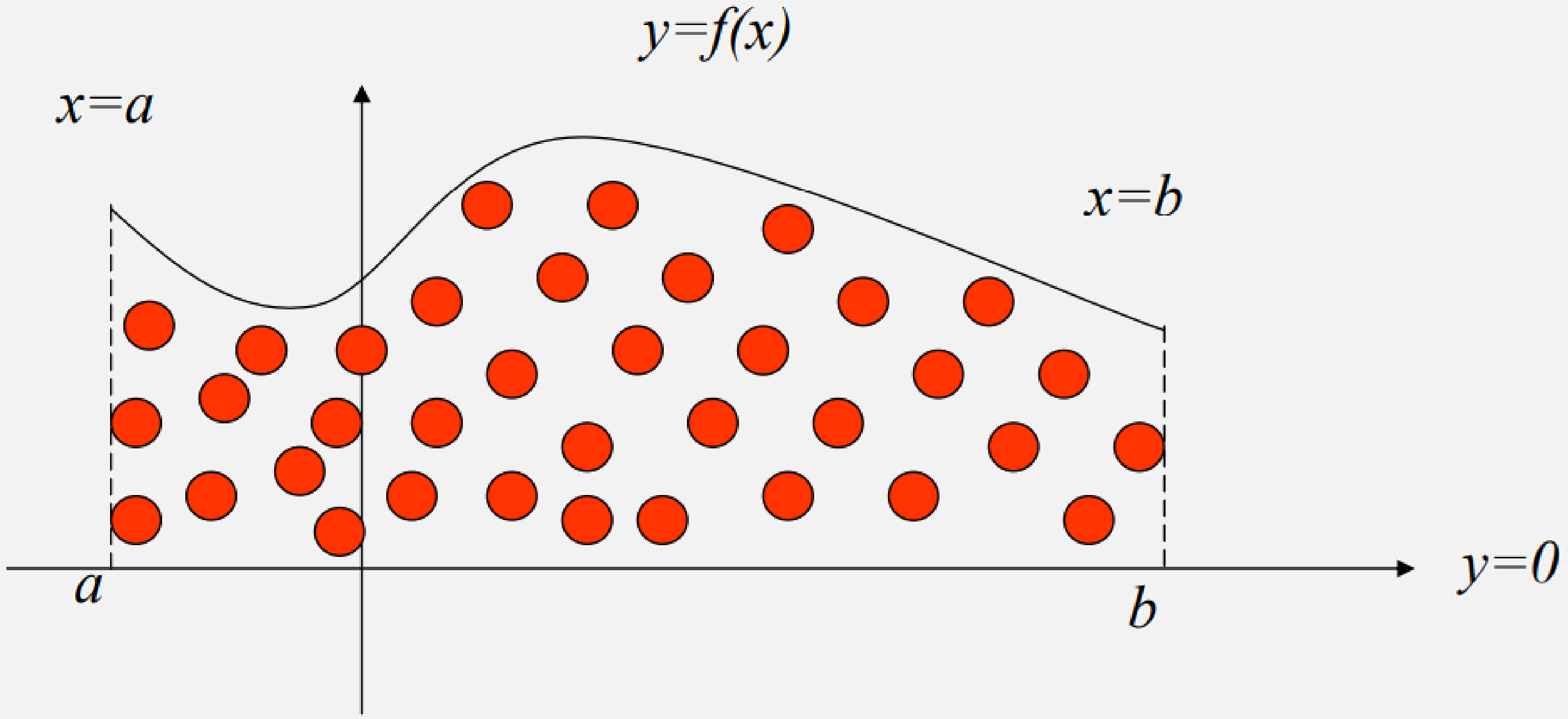


Si dimostra che l'area del cerchio è uguale al limite comune, quando il numero di lati tende a ∞ al quale tendono le successioni formate dalle aree dei poligoni inscritti e circoscritti al cerchio.

Il concetto di integrale: calcolo delle aree

Area del rettangoloide relativa a una funzione

Assegnata una funzione f continua nell'intervallo $[a, b]$, vogliamo calcolare l'area della regione di piano compresa tra l'asse x, le due rette verticali di equazione $x = a$ e $x = b$ ed il grafico di f. Tale regione di piano è detta rettangoloide relativo alla funzione f.



Integrale definito di una funzione: definizione

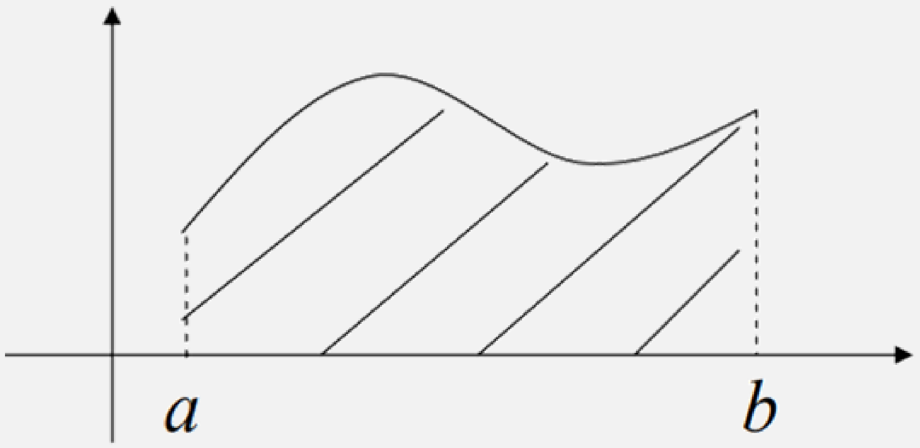
Assegnata una funzione f continua nell'intervallo $[a, b]$, **l'integrale definito** della funzione $f(x)$ relativamente all'intervallo $[a, b]$ è la misura dell'area del rettangoloide R relativo alla funzione f e si indica con il simbolo:

$$\int_a^b f(x)dx = Area\ R$$

Il problema è determinare l'area di una regione del piano R che si trova, in un sistema di assi cartesiani ortogonale, al di sopra dell'asse delle ascisse x e al di sotto del grafico di una funzione $f(x)$ continua e non negativa al variare della variabile x in un intervallo $[a, b]$ chiuso e limitato.

A tale proposito, sia $f(x)$ una funzione definita e continua in un intervallo $[a, b]$ chiuso e limitato, e sia $f(x) \geq 0$ al variare della variabile x in $[a, b]$.

In tale ipotesi, si ha:

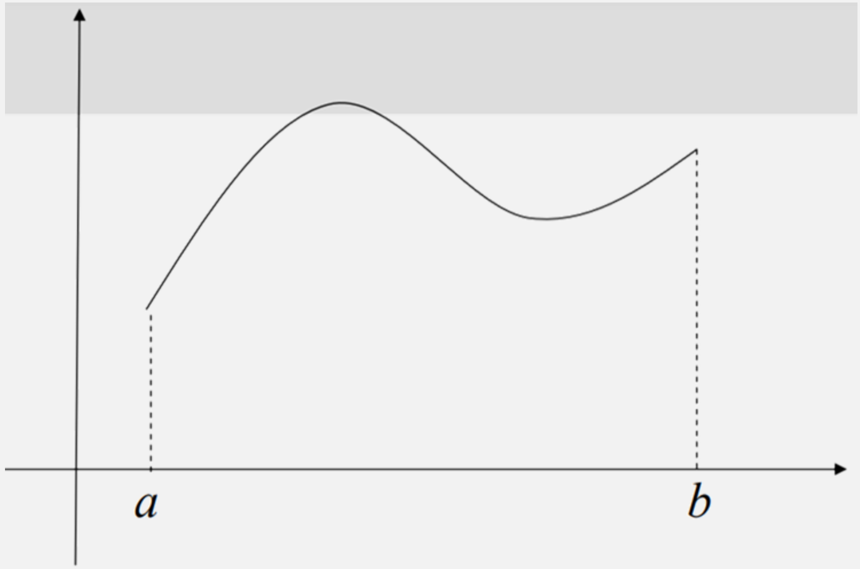


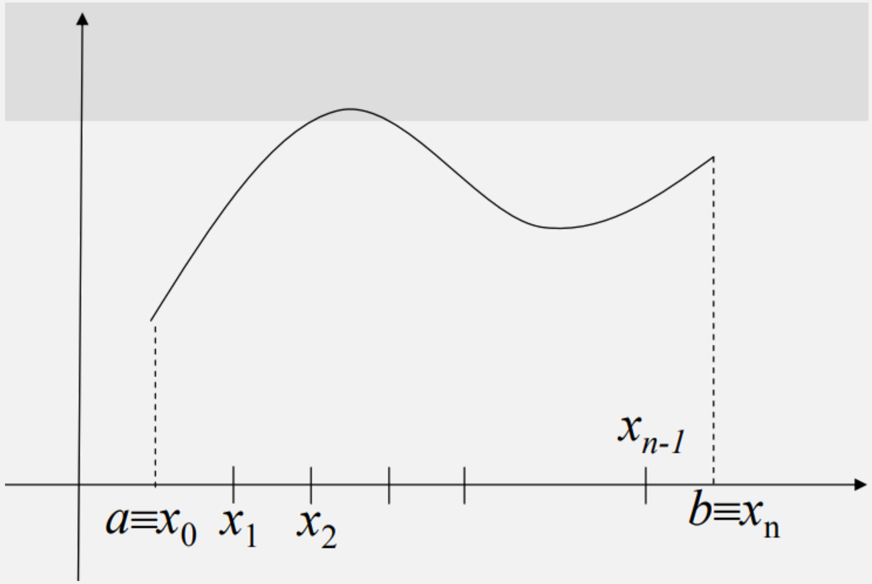
Si definisce **rettangoloide** relativo alla funzione f la parte di piano compresa tra il grafico di $f \geq 0$ e l'asse delle ascisse:

$$R = \{(x, y): a \leq x \leq b \; e \; 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Sempre in tale ipotesi, suddividiamo l'intervallo $[a, b]$ in un numero n di parti uguali mediante punti di divisione:

$$a \equiv x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n \equiv b$$





In questo modo, suddividiamo l'intervallo $[a, b]$ in n intervalli parziali più piccoli e uguali fra loro:

$$[x_{i-1}, x_i], i = 1, \dots, n$$

ciascuno di ampiezza $h = \frac{b-a}{n}$

Avendo supposto che $f(x)$ sia una funzione definita e continua nell'intervallo $[a, b]$ chiuso e limitato, in particolare, $f(x)$ risulta definita e continua in ciascuno degli intervalli parziali $[x_{i-1}, x_i]$

Applicando il teorema di Weierstrass in ciascun intervallino parziale

Una funzione $f(x)$ continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ ha un valore minimo $m = f(x_1)$ e massimo $M = f(x_2)$ tali che

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \qquad \forall x \in [a, b]$$

La funzione è dotata di minimo e massimo, che sono, in particolare, i punti x_1 e x_2 dell'intervallo $[a, b]$.

in ciascuno degli intervalli parziali $[x_{i-1}, x_i]$ la funzione f è dotata di minimo m_i e di massimo M_i, con $i = 1, \ldots, n$

A partire dai minimi m_i in ciascuno degli intervalli parziali, si possono costruire n rettangoli aventi la base pari all'ampiezza h di ciascun intervallo parziale e l'altezza pari ad m_i

È possibile allora calcolare l'area di ciascuno di questi rettangoli.
Ad esempio, l'area del primo è:

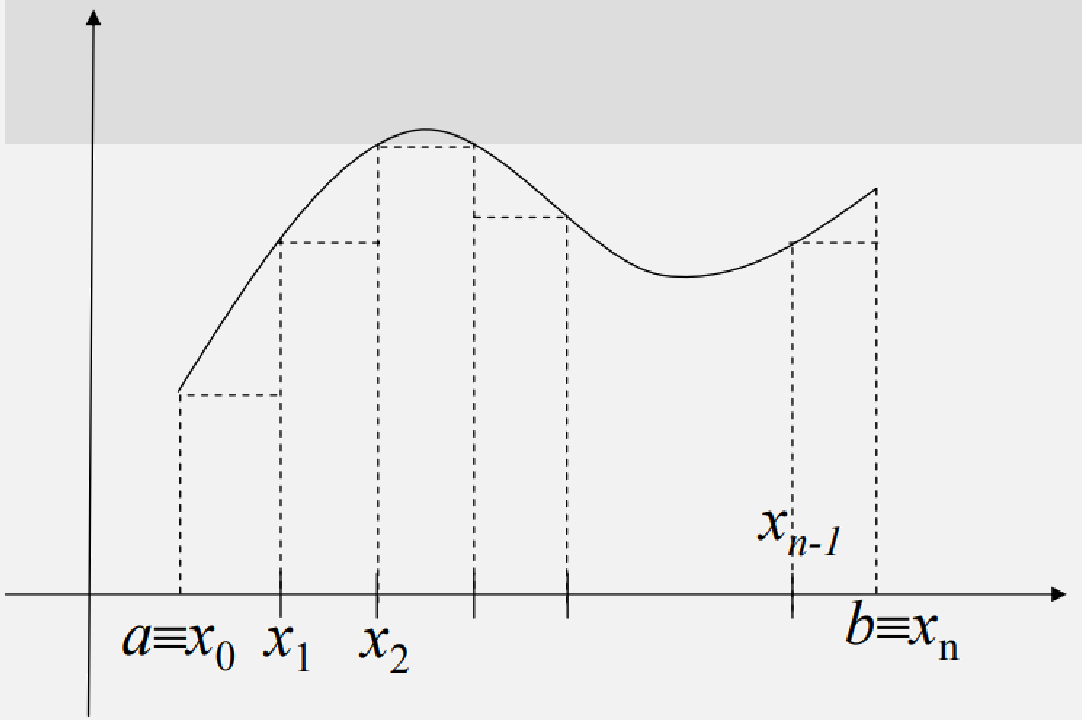
$$m_1(x_1 - x_0) = m_1\frac{b-a}{n} = m_1 h$$

Analogamente, l'area del secondo è:

$$m_2(x_2 - x_1) = m_2\frac{b-a}{n} = m_2 h$$

E quella dell'n-esimo:

$$m_n(x_n - x_{n-1}) = m_n\frac{b-a}{n} = m_n h$$



Così la somma delle aree degli n rettangoli di altezza m_i è:

$$s_n = m_1 h + m_2 h + \cdots + m_n h$$

A partire dai massimi M_i in ciascuno degli intervalli parziali, si possono costruire n rettangoli aventi la base sempre pari all'ampiezza h di ciascun intervallo parziale e l'altezza pari ad M_i

È possibile allora calcolare l'area di ciascuno di questi rettangoli.
Ad esempio, l'area del primo è:

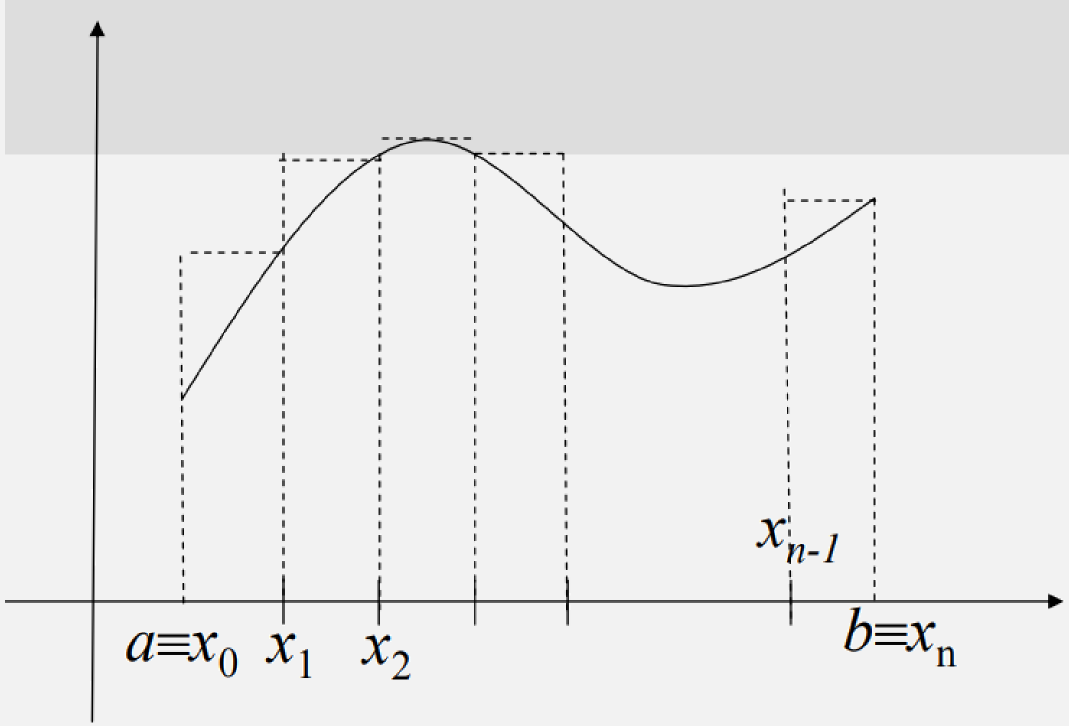
$$M_1 h$$

Analogamente, l'area del secondo è:

$$M_2 h$$

E quella dell'n-esimo:

$$M_n h$$



Così la somma delle aree degli n rettangoli di altezza M_i è:

$$S_n = M_1 y + M_2 h + \cdots + M_n h$$

Sicuramente vale che:

$$s_n \leq S_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

Cioè, qualunque sia la suddivisione dell'intervallo $[a, b]$ in intervalli parziali, l'area del pluri-rettangolo inscritto nel rettangoloide è sempre minore o uguale a quella del pluri-rettangolo circoscritto al rettangoloide.

Teorema.
Se $f(x)$ è una funzione definita e continua in un intervallo $[a, b]$ chiuso e limitato, e se $f(x) \geq 0$ al variare della variabile x in $[a, b]$,

Allora le somme s_n e S_n hanno limite finito per $n \to +\infty$ ed in particolare hanno lo stesso limite coincidente con l'area del rettangoloide relativo alla funzione f:

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} S_n = Area\ R$$

In particolare, il valore comune del limite delle somme s_n e S_n si definisce **integrale definito** della funzione $f(x)$ esteso all'intervallo $[a, b]$ e si indica:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} S_n$$

E non è altro che l'area del rettangoloide relativo alla funzione f (ricordiamo che $f(x) \geq 0$ al variare della variabile x in $[a, b]$

I numeri a e b (estremi dell'intervallo di definizione della funzione) vengono definiti **estremi di integrazione** e in particolare:

- a e l'estremo inferiore di integrazione
- b è l'estremo superiore di integrazione

La funzione $f(x)$ viene definita **funzione integranda**

La variabile x è la **variabile di integrazione**

In definitiva, per definizione si ha:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} S_n = Area\ R$$

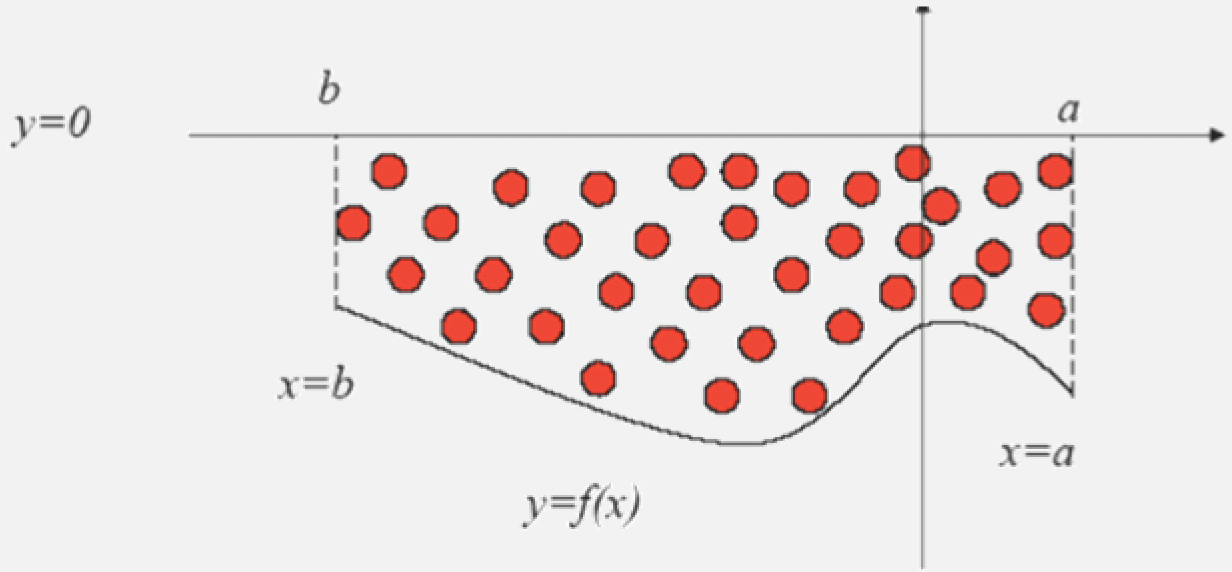
Nelle ipotesi poste, l'integrale definito è un numero maggiore di zero.

Osservazione 1.

La definizione di integrale definito di una funzione f definita e continua in un intervallo $[a, b]$, nel caso particolare in cui $f(x) \geq 0$, ha un'interpretazione geometrica in quanto coincide con l'area del rettangoloide relativo alla funzione stessa.

E se $f(x)$ non è sempre maggiore di 0?

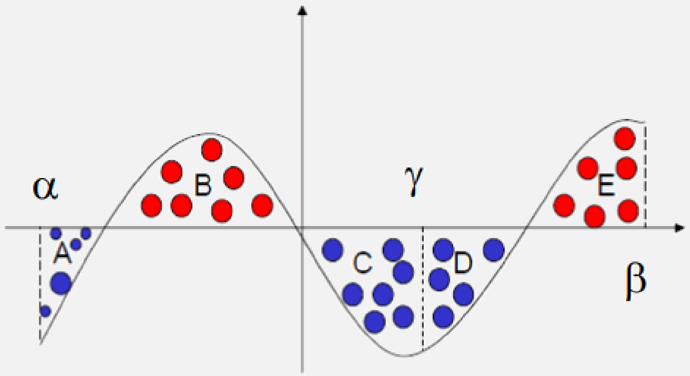
Le somme s_n ed S_n relative ad una funzione $f(x)$, definita e continua in un intervallo $[a, b]$, possono essere costruite anche indipendentemente dal segno della stessa funzione $f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$



In particolare, assegnata $f(x)$ continua in $[a, b]$ (di segno non necessariamente positivo), l'integrale definito

$$\int_a^b f(x)dx$$

Si interpreta come la somma delle aree con segno delle regioni che il grafico $f(x)$ individua insieme all'asse orizzontale e alle rette $x = a$ e $x = b$



$$\int_\alpha^\gamma f(x)dx = -A + B - C$$

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = -A + B - C - D + E$$

$$\int_\alpha^\gamma f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\beta^\gamma f(x)dx$$

Proprietà degli integrali definiti

Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabili. Allora, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ le funzioni

$$f + g, \quad \lambda f, \quad |f| \text{ sono integrabili}$$

$$\forall [c, d] \subset [a, b], \quad f_{[c,d]} \text{ è integrabile}$$

Inoltre, valgono le seguenti proprietà:

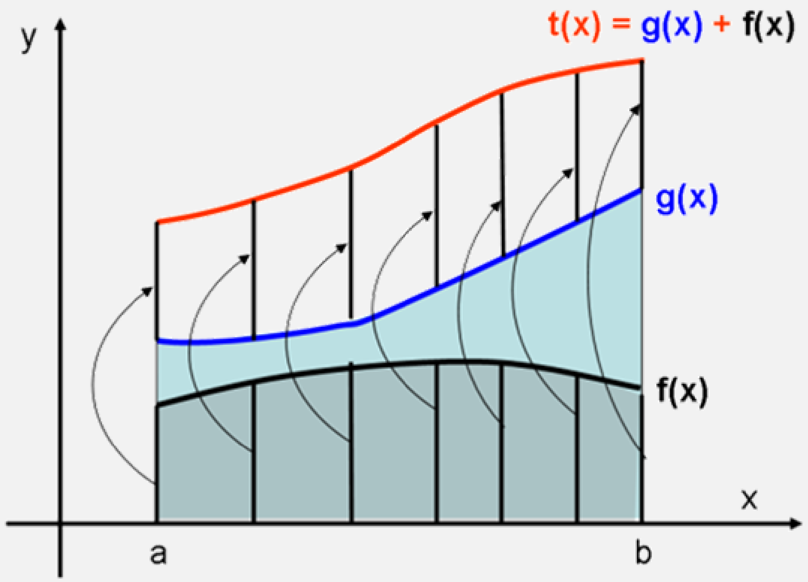
- Linearità $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b \big(\alpha f(x)\big) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$$

$$\Longrightarrow \int_a^b -f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$$

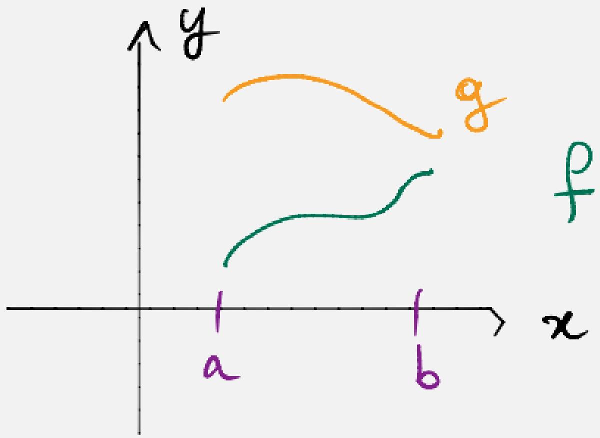
- Integrale della somma:

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$



- Proprietà di confronto: se $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a,b]$

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

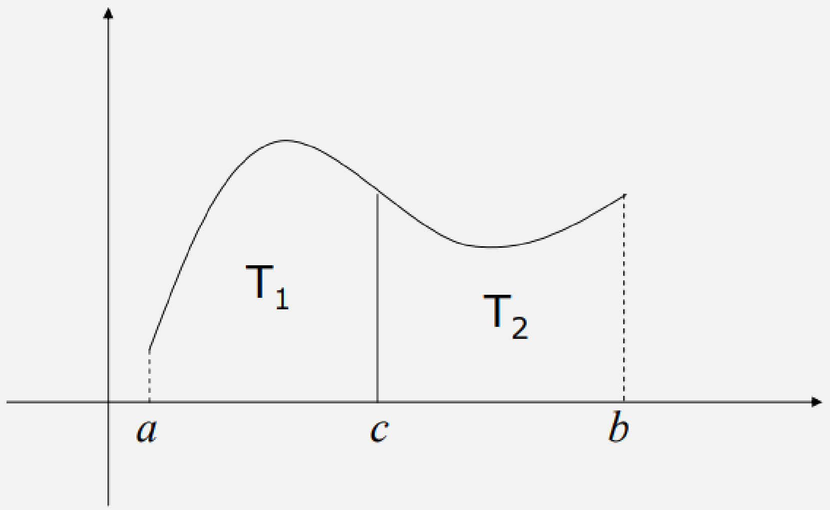


- Proprietà additiva: $\forall c \in (a,b) : a < c < b$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Chiaro significato geometrico nel caso di funzioni positive:

$$Area\ R = Area\ T_1 + Area\ T_2$$



Primo teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia $f(x)$ una funzione continua e positiva in $[a, b]$.
Fissato x in $[a, b]$, definiamo

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

In altre parole, l'integrale ci fornisce un modo per costruire una funzione di derivata assegnata. In altre parole ancora, la funzione

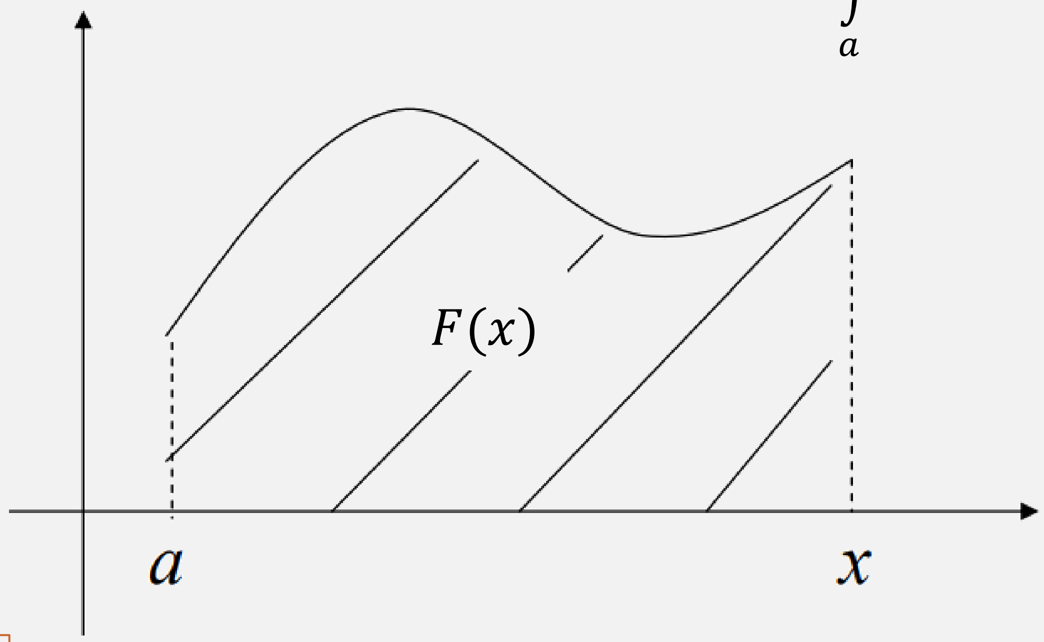
$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

è una soluzione dell'equazione

$$\frac{dF}{dx} = f$$

Ricordando che due funzioni con la stessa derivata differiscono solo per una costante additiva, ricaviamo che:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

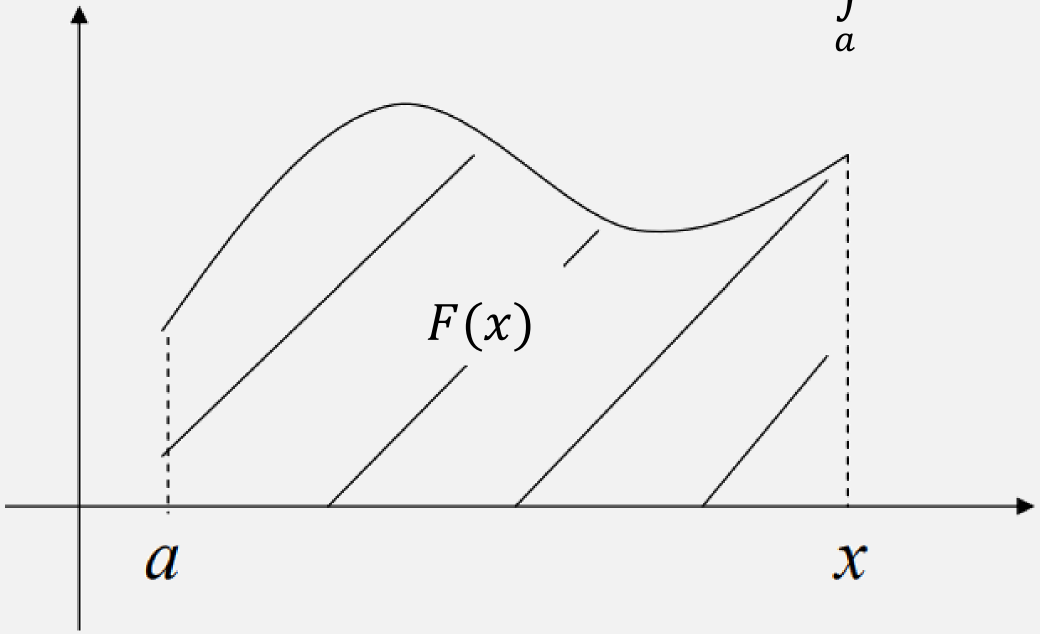


Le soluzioni di $\frac{dF}{dx} = f$ sono tutte e sole nella forma:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + c$$

con $c \in \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$



Esempio pratico:
Nell'intervallo $[0, x]$, l'integrale della funzione $2t$ è x^2:

$$F(x) = \int_0^x 2t\,dt = x^2$$

La **funzione integranda** $f(x)$ è $f(x) = 2x$

La **funzione integrale** $F(x)$ è $F(x) = x^2$

La derivata della funzione integrale è $F'(x) = \frac{d}{dx}x^2 = 2x$

Quindi, la derivata della funzione integrale $F'(x)$ è uguale alla funzione integranda $f(t)$ calcolata per $t = x$:

$$F'(x) = f(x)$$

Secondo Teorema fondamentale del calcolo integrale (Teorema di Torricelli-Barrow)

Sia $f(x) : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile, per ogni $x \in [x_0, x_1]$ si ha:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{d}{dt} f(t)dt = f(x) - f(x_0)$$

Si può usare la seguente forma abbreviata per indicare questa differenza:

$$f(x) - f(x_0) = f(t)|_{x_0}^{x}$$

Il secondo teorema fondamentale del calcolo fornisce un primo metodo per calcolare qualche forma di integrale. Partiamo dalla definizione:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Dalla formula $\frac{d}{dx}x^{n+1} = (n+1)x^n$ deduciamo che $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right) = x^n$.

Quindi:

$$\int_a^b x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}|_a^b = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$$

In questo modo, posso calcolare l'integrale di qualsiasi polinomio:

$$\int_1^2 (6x^2 + 2x - 3)dx = 6\int_1^2 x^2 dx + 2\int_1^2 x dx - 3\int_1^2 dx =$$

$$= 6\frac{1}{3}x^3|_1^2 + 2\frac{1}{2}x^2|_1^2 - 3(2-1) = 14$$

Integrale indefinito – Funzione primitiva

Se f è la derivata della funzione F, si dice che F è un **integrale indefinito** (o una **primitiva**) di f e si scrive:

$$\int f(t)dt = F(t) + c$$

Il motivo di questa scrittura è che due integrali indefiniti di f differiscono per una costante additiva (in quanto hanno uguale derivata): quindi, al variare della costante $c \in \mathbb{R}$ il secondo membro dell'equazione descrive tutti i possibili integrali indefiniti (o tutte le primitive) di f.

Inoltre:

$$\int f(t)dt = F(t) + c \iff \int_a^b f(t)dt = F(t)|_a^b$$

Nella definizione fornita, non compaiono gli estremi di integrazione: la formula è valida su ogni intervallo $[a, b]$ ove f è la derivata di F.

Funzione primitiva

Una funzione $F(x)$ definita e derivabile in $[a, b]$, si definisce **primitiva** della funzione $f(x)$, definita e continua in $[a, b]$, se risulta che:

$$F'(x) = f(x), \qquad \forall x \in [a, b]$$

Osservazione.
Se $F(x)$ è una primitiva della funzione $f(x)$ (cioè $F'(x) = f(x)$), allora $F(x) + c$ è ancora una primitiva di $f(x), \forall c \in \mathbb{R}$ e viceversa (infatti: $(F(x) + c)' = f(x), \forall c \in \mathbb{R}$)

$$\Downarrow$$

Se $F(x)$ è una primitiva di f, tutte le primitive di f si ottengono da F aggiungendovi una costante

Esempio. Calcolare la primitiva delle seguenti funzioni

$f(x) = x$

$F(x) = \frac{x^2}{2}$, infatti $F'(x) = \frac{1}{2}2x = x = f(x)$

D'altra parte, anche $F(x) = \frac{x^2}{2} + 1$ è una primitiva della funzione $f(x) = x$

Dato il teorema sulla somma di una costante a una funzione primitiva, scriveremo:

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + c$$

$f(x) = e^x$

$F(x) = e^x + c$ → infatti $F'(x) = e^x = f(x)$

$f(x) = \frac{1}{x}$

$F(x) = \ln x + c$ → infatti $F'(x) = \frac{1}{x} = f(x)$

$f(x) = x^3$

$F(x) = \frac{1}{4}x^4 + c$, infatti $F'(x) = \frac{1}{4}4x^{4-1} = x^3 = f(x)$

$f(x) = \frac{1}{x^2}$

$F(x) = -\frac{1}{x} + c$, infatti $F'(x) = +x^{-1-1} = x^{-2} = f(x)$

Esempio: calcolo dell'integrale di un polinomio

$$f(x) = 10x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 3$$

$$\int f(x)dx = \int [10x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 3]dx = 10\int x^4dx + 4\int x^3dx + 5\int x^2dx + 3\int dx$$

$10 \int x^4dx = 10 \cdot \left[\frac{x^5}{5} + c_1\right] = 2x^5 + c_1$

$4 \int x^3dx = 4 \cdot \left[\frac{x^4}{4} + c_2\right] = x^4 + c_2$

$5 \int x^2dx = 5 \cdot \left[\frac{x^3}{3} + c_3\right] = \frac{5}{3}x^3 + c_3$

$3 \int dx = 3 \int x^0dx = 3 \cdot \left[\frac{x^1}{1} + c_4\right] = 3x + c_4$

Sommando i termini (e indicando con una generica c tutte le costanti):

$$\int f(x)dx = \int [10x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 3]dx = 2x^5 + x^4 + \frac{5}{3}x^3 + 3x + c$$

L'integrale indefinito di una funzione $f(x)$ è costituito da tutte le sue primitive, ovvero da tutte quelle funzioni che, derivate, restituiscono proprio f.

Tabella riassuntiva delle primitive più comuni:

1. Primitive di funzioni: costante, potenza, radice
2. Primitive di funzioni trigonometriche
3. Primitive di funzioni esponenziali e logaritmiche

Funzioni costanti, potenze (con esponente naturale o reale) e radici

Funzione $f(x)$	**Integrale indefinito $\int f(x)dx$**
$k\ (funzione\ costante)$	$\int dx = \int kdx = kx + c$
x	$\int xdx = \frac{1}{2}x^2 + c$
$x^\alpha, \quad con\ \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$	$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + c$
$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\int \frac{1}{x}dx = \ln\|x\| + c$

L'integrale indefinito di una funzione $f(x)$ è costituito da tutte le sue primitive, ovvero da tutte quelle fuzioni che, derivate, restituiscono proprio f.
Tabella riassuntiva delle primitive più comuni:

1. Primitive di funzioni: costante, potenza, radice
2. Primitive di funzioni trigonometriche
3. Primitive di funzioni esponenziali e logaritmiche

Funzioni irrazionali (del tipo $f(x) = \sqrt[n]{x}$)

Possono essere trasformate in potenze a esponente frazionario: $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, ricadendo così nel caso precedente delle potenze (la formula fornita vale per α numero reale).
Esempi:

$$\int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = 2\sqrt{x} + c$$

L'integrale indefinito di una funzione $f(x)$ è costituito da tutte le sue primitive, ovvero da tutte quelle fuzioni che, derivate, restituiscono proprio f.

Tabella riassuntiva delle primitive più comuni:

1. Primitive di funzioni: costante, potenza, radice
2. Primitive di funzioni trigonometriche
3. Primitive di funzioni esponenziali e logaritmiche

Funzioni trigonometriche

Funzione $f(x)$	**Integrale indefinito $\int f(x)dx$**
$\sin x$	$\int \sin x\, dx = -\cos x + c$
$\cos x$	$\int \cos x\, dx = \sin x + c$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\int \dfrac{1}{\sin^2 x} = \cot x + c$
$\tan x$	$\int \tan x\, dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + c$
$\cot x$	$\int \cot x\, dx = -\ln\lvert\sin x\rvert + c$

L'integrale indefinito di una funzione $f(x)$ è costituito da tutte le sue primitive, ovvero da tutte quelle fuzioni che, derivate, restituiscono proprio f.

Tabella riassuntiva delle primitive più comuni:

1. Primitive di funzioni: costante, potenza, radice
2. Primitive di funzioni trigonometriche
3. Primitive di funzioni esponenziali e logaritmiche

Funzioni esponenziali e logaritmiche

Funzione $\boldsymbol{f(x)}$	**Integrale indefinito $\int \boldsymbol{f(x)dx}$**
e^x	$\int e^x dx = e^x + c$
$a^x, con\ a \in \mathbb{R}, a \neq 1$	$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + c = a^x \log_a e + c$

Importanza dell'integrale in Fisica: cinematica

In un moto rettilineo sappiamo che, se $s(t)$ è la posizione, cioè l'ascissa di un punto materiale all'istante t, allora la velocità el'accelerazione del punto in quell'istante sono:

$$v(t) = s'(t) \quad \text{velocità};$$

$$a(t) = v'(t) = s''(t) \quad \text{accelerazione.}$$

Quindi possiamo dedurre che la velocità $v(t)$ è una primitiva dell'accelerazione $a(t)$ e che la posizione $s(t)$ è una primitiva della velocità $v(t)$. Pertanto, notal'accelerazione in funzione del tempo t, per determinare la velocità e la legge del moto, basta integrare successivamente $a(t)$ applicando il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$v(t) - v(t_0) = \int_{t_0}^{t} a(z)dz \quad \rightarrow \quad v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(z)dz$$

$$s(t) - s(t_0) = \int_{t_0}^{t} v(z)dz \quad \rightarrow s(t) = s(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(z)dz$$

Importanza dell'integrale in Fisica: lavoro di una forza

- In generale il lavoro *dipende dalla traiettoria* seguita dal punto

- Matematicamente il lavoro è è un *integrale di linea*, ovvero il limite della somma di tanti contributi $\Delta L = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$ piccoli, calcolati lungo la traiettoria.

- Nell'esempio accanto, il calcolo e l'interpretazione geometrica del lavoro $L = \int_{x_i}^{x_f} F(x)dx$ per una forza $F(x)$ in un caso unidimensionale.