



Le scelte «ottimali» di consumo

L'approccio matematico

Lezione del 12 marzo 2025

Il problema di ottimizzazione del consumatore

$$\begin{array}{ll} \max_{x_i} U = f(x_i) & \leftarrow \text{Preferenze} \\ \text{sub } \sum_{i=1}^N p_i \cdot x_i = R & \leftarrow \text{Vincolo di Bilancio} \end{array}$$

Diagram illustrating the consumer optimization problem. The objective function $\max_{x_i} U = f(x_i)$ is linked to the box labeled "Preferenze". The constraint function $\text{sub } \sum_{i=1}^N p_i \cdot x_i = R$ is linked to the box labeled "Vincolo di Bilancio". A box labeled "Funzione di utilità" is linked to the "Preferenze" box.

- Una funzione di utilità associa un numero a ciascun paniere in modo tale che ai panieri giudicati migliori venga assegnato un numero più elevato rispetto ai panieri giudicati inferiori.
- Una funzione di utilità è analoga a una mappa di curve di indifferenza poiché entrambe forniscono una descrizione completa dell'ordinamento delle preferenze del consumatore.
- L'utilità è un concetto ordinale e non cardinale.
- Differenze nella grandezza dell'utilità non hanno alcuna interpretazione di per se stesse.
- L'utilità tra individui diversi non è in alcun modo comparabile.
- Qualsiasi trasformazione di una funzione di utilità che preservi l'ordinamento originale dei panieri è una rappresentazione altrettanto buona delle preferenze quanto la rappresentazione originaria.

Come lo risolviamo?

È un problema che in matematica viene definito di **ottimizzazione vincolata**.

Noi lo trasformiamo in un problema di ottimizzazione libera utilizzando il metodo di Lagrange. Questo assume la seguente forma:

$$\max_{x_i, \lambda} L = f(x_i) + \lambda \cdot \left(R - \sum_{i=1}^N p_i \cdot x_i \right)$$

Si risolve imponendo le condizioni del primo (FOC) e del secondo (SOC) ordine per un massimo, ma per come è costruita la funzione di utilità, la FOC è necessaria ed anche sufficiente per identificare un massimo:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad \forall i \quad \frac{\partial f(x_i)}{\partial x_i} - p_i \cdot \lambda = 0 \quad \forall i$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \quad R - \sum_{i=1}^N p_i \cdot x_i = 0$$

Il problema con 2 beni

$$\max_{A,B} U = U(A, B)$$

$$\text{sub} \quad p_A \cdot A + p_B \cdot B = R$$

Trasformiamo questo problema di ottimizzazione vincolata in un problema di ottimizzazione libera con la funzione lagrangiana:

$$\max_{A,B,\lambda} L = U(A, B) + \lambda \cdot (R - p_A \cdot A - p_B \cdot B)$$

Le cui FOC sono:

$$\begin{array}{llll} \frac{\partial L}{\partial A} = 0 & \longrightarrow & \text{Utilità Marginale di A} & \frac{U_A}{p_A} = \lambda \\ \frac{\partial L}{\partial B} = 0 & \longrightarrow & \text{Utilità Marginale di B} & \frac{U_B}{p_B} = \lambda \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 & \longrightarrow & R - p_A \cdot A - p_B \cdot B = 0 & \end{array}$$

$\left. \begin{array}{l} \frac{U_A}{p_A} = \lambda \\ \frac{U_B}{p_B} = \lambda \end{array} \right\} \frac{U_A}{p_A} = \frac{U_B}{p_B} \longrightarrow \frac{U_B}{U_A} = \frac{p_B}{p_A}$

SMS $\downarrow$
 $\frac{U_B}{U_A} = \frac{p_B}{p_A}$
 $\uparrow$
 Pendenza del vincolo

Nota bene: la soluzione non è un "numero", ma una regola che suggerisce quella che deve essere la combinazione ottimale di consumo tra i due beni

Diamo una forma alle preferenze: la funzione Cobb-Douglas

$$\max_{A,B} U = A^\alpha \cdot B^\beta$$

$$0 < \alpha, \beta < 1$$

$$\alpha + \beta = 1$$

$$\text{sub } p_A \cdot A + p_B \cdot B = R$$

α e β sono i pesi che attribuiamo ai beni nell'ambito delle nostre preferenze

Trasformiamo questo problema di ottimizzazione vincolata in un problema di ottimizzazione libera con la funzione lagrangiana:

$$\max_{A,B,\lambda} L = A^\alpha \cdot B^\beta + \lambda \cdot (R - p_A \cdot A - p_B \cdot B) \quad \text{le cui FOC sono:}$$

$$\frac{\partial L}{\partial A} = 0 \longrightarrow \frac{\partial U}{\partial A} - \lambda \cdot p_A = 0 \longrightarrow \alpha \cdot A^{\alpha-1} \cdot B^\beta - \lambda \cdot p_A = 0 \longrightarrow \frac{\alpha \cdot A^{\alpha-1} \cdot B^\beta}{p_A} = \lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial B} = 0 \longrightarrow \frac{\partial U}{\partial B} - \lambda \cdot p_B = 0 \longrightarrow \beta \cdot B^{\beta-1} \cdot A^\alpha - \lambda \cdot p_B = 0 \longrightarrow \frac{\beta \cdot B^{\beta-1} \cdot A^\alpha}{p_B} = \lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \longrightarrow R - p_A \cdot A - p_B \cdot B = 0$$

Rapporto ottimale di consumo

$$\frac{\alpha \cdot A^{\alpha-1} \cdot B^\beta}{p_A} = \frac{\beta \cdot B^{\beta-1} \cdot A^\alpha}{p_B} \longrightarrow \frac{\beta \cdot B^{\beta-1} \cdot A^\alpha}{\alpha \cdot A^{\alpha-1} \cdot B^\beta} = \frac{p_B}{p_A} \longrightarrow$$

$$\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{p_B}{p_A}$$

Soluzione e analisi di statica comparata

Una volta noto il rapporto di consumo ottimale, esplicitiamo rispetto ad un bene e sostituiamo nel vincolo di bilancio.

$$\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{p_B}{p_A} \longrightarrow A = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{p_B}{p_A} \cdot B \quad \text{oppure} \quad B = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{p_A}{p_B} \cdot A$$

$$p_A \cdot A + p_B \cdot \left(\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{p_A}{p_B} \cdot A \right) = R \longrightarrow p_A \cdot A + \left(\frac{\beta}{\alpha} \cdot p_A \cdot A \right) = R \longrightarrow p_A \cdot A \cdot \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} \right) = R$$

$$A = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \cdot \frac{R}{p_A} \quad \text{Soluzione esplicita per A, e sostituendo avremo:}$$

$$B = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \cdot \frac{R}{p_B} \quad \text{Soluzione esplicita per B.}$$

Le soluzioni possono anche essere scritte come funzioni, con relativi segni di statica comparata

$$A = f(\overset{+}{\alpha}, \overset{-}{\beta}, \overset{-}{p_A}, \overset{+}{R})$$

$$B = f(\overset{-}{\alpha}, \overset{+}{\beta}, \overset{-}{p_B}, \overset{+}{R})$$

Simuliamo numericamente (esercizio riportato nella lavagna):

Sia la funzione di utilità di una generica consumatrice pari a

$$U = A \cdot B$$

dove A e B indicano le quantità di due generici beni i cui prezzi sono, rispettivamente, 2 euro e 3 euro. Ipotizzando un reddito disponibile R pari a 150 euro, si calcolino:

1. il rapporto ottimale di consumo tra i due beni.
2. Le quantità ottimali acquistate.
3. Il livello di utilità raggiunto.
4. le quantità acquistate nel caso in cui la sua funzione di utilità fosse stata la seguente:

$$U = A + B$$

5. Spiegare in poche righe il risultato ottenuto nel punto (3) evidenziandone le differenze rispetto alle scelte dei punti precedenti.

Simuliamo numericamente (esercizio riportato nella lavagna):

Sia la struttura delle preferenze di un generico consumatore descritta dalla seguente funzione di utilità:

$$U = A^{0,5} \cdot B^{0,5}$$

dove A e B sono le quantità di due generici beni i cui prezzi sono pari a 10 euro e 20 euro, rispettivamente. Se il reddito disponibile (R) per il consumo fosse pari a 5.000 euro, si calcolino:

1. il paniere ottimale di consumo ed il livello di utilità conseguito.
2. Il nuovo paniere di consumo nel caso in cui il prezzo di entrambi i beni si modificasse ed entrambi avessero un prezzo pari a 15 euro.
3. Il nuovo livello di utilità raggiunto.