LAVAGNA DEL 18 MARZO 2025

In questa prima sezione svilupperemo, analiticamente, la CONDIZIONE DI SAMUELSON, ovvero un modello di ottimizzazione attraverso il quale dimostreremo che le condizioni ottimali che risolvono il problema della scelta ottimale di bene pubblico da parte dei singoli individui divergono rispetto a quelle che sono imposte da un social planner che vuole massimizzare una funzione di welfare sociale.

Ipotesi:

ci sono due soggetti 1 e 2 che hanno le seguenti funzioni di utilità:

$$U_1 = U_1(x_1, g)$$
$$U_2 = U_2(x_2, g)$$

nota che le funzioni di utilità hanno le consuete proprietà $[U'_x, U'_g] > 0$

dove x_1 e x_2 sono le quantità di beni privati consumati, rispettivamente, da 1 e 2, mentre g è la quantità di bene pubblico (non rivale, non escludibile, non divisibile).

Definiamo w_1 e w_2 le dotazioni di bene privato che i nostri soggetti spenderanno per acquistare il bene pubblico. I rispettivi vincoli di bilancio saranno:

$$w_1 = x_1 + p g$$
$$w_2 = x_2 + p g$$

dove p è il prezzo del bene pubblico in termini di bene privato:

$$p = \frac{p_g}{p_x}$$

Ogni individuo imposta le condizioni del primo ordine per risolvere il seguente problema di ottimo

$$\max_{x_1, g} U_1(x_1, g) \qquad \max_{x_2, g} U_2(x_2, g)$$

$$\text{sub } w_1 = x_1 + pg \qquad \text{sub } w_2 = x_2 + pg$$

Per ognuno dei due soggetti la condizione del primo ordine è quella per la quale il saggio marginale di sostituzione tra il bene pubblico e il bene privato uguaglia il rapporto tra i rispettivi prezzi, ovvero...

$$\frac{dU_1}{dg} \Big/ \frac{dU_1}{dx_1} = \frac{P_g}{P_x} \quad ; \quad SMS_1 = p$$ per il soggetto 1

$$\frac{dU_2}{dg} \Big/ \frac{dU_2}{dx_2} = \frac{P_g}{P_x} \quad ; \quad SMS_2 = p$$ per il soggetto 2

L'allocazione ottimale che scaturisce dalle risoluzioni dei problemi individuali può essere espressa come segue:

$$SMS_1 = SMS_2 = p \qquad \text{(EQ. 1)}$$

LA QUANTITÀ DI BENE PUBBLICO DOMANDATA DAI SOGGETTI SARÀ QUELLA PER LA QUALE IL SAGGIO MARGINALE DI SOSTITUZIONE TRA BENE PUBBLICO E BENE PRIVATO È UGUALE PER OGNUNO DEI SOGGETTI CHE COMPONGONO LA SOCIETÀ

Ipotizziamo ora che a decidere la quantità ottimale di bene pubblico da fornire sia un social planner che intende ottimizzare il welfare sociale e non quello individuale. Definiamo

$$WS = U_1(x_1, g) + U_2(x_2, g)$$

il welfare sociale associato ai due individui e a questo associamo anche il relativo vincolo di bilancio

$$w_1 + w_2 = x_1 + x_2 + pg$$

Impostiamo il problema e risolviamo con il metodo di Lagrange:

$$\max_{x_1, x_2, g} SW = U_1(x_1, g) + U_2(x_2, g)$$
$$\text{sub} \quad w_1 + w_2 = x_1 + x_2 + pg$$

la funzione lagrangeana avrà la seguente forma:

$$L = U_1(x_1, g) + U_2(x_2, g) + \lambda\left[w_1 + w_2 - x_1 - x_2 - pg\right]$$

con relative condizioni del primo ordine ...

$$\frac{dL}{dx_1} = \phi \; ; \qquad \frac{dU_1}{dx_1} - \lambda = \phi \; ; \qquad \frac{dU}{dx_1} = \lambda \qquad \text{(EQ. 2)}$$

$$\frac{dL}{dx_2} = \phi \; ; \qquad \frac{dU_2}{dx_2} - \lambda = \phi \; ; \qquad \frac{dU_2}{dx_2} = \lambda \qquad \text{(EQ. 3)}$$

$$\frac{dL}{dz} = \phi \; ; \qquad \frac{dU_1}{dz} + \frac{dU_2}{dz} - \lambda p = \phi \; ; \qquad \frac{dU_1}{dz} + \frac{dU_2}{dz} = \lambda p \qquad \text{(EQ.4)}$$

$$\frac{dL}{d\lambda} = \phi \; ; \qquad w_1 + w_2 - x_1 - x_2 - pz = \phi \qquad \text{(EQ.5)}$$

Sostituiamo la (EQ.2) nella (EQ.4) ed avremo:

$$\frac{dU_1}{dz} + \frac{dU_2}{dz} = \frac{dU_1}{dx_1} \cdot p$$

Dividiamo ora entrambi i termini per $\frac{dU_1}{dx_1}$ ed avremo:

$$\frac{\frac{dU_1}{dz}}{\frac{dU_1}{dx_1}} + \frac{\frac{dU_2}{dz}}{\frac{dU_1}{dx_1}} = p \qquad \text{(EQ. 6)}$$

Ricordo che, per definizione,

$$\frac{dU_1}{dz} \Big/ \frac{dU_1}{dx_1} \equiv SMS_1$$

che dalla (EQ. 2) e dalla (EQ. 3)

$$\frac{dU_1}{dx_1} = \frac{dU_2}{dx_2}$$

per cui sostituendo nella (EQ. 6) avremo:

$$SMS_1 + SMS_2 = p$$

Questa condizione di ottimo "sociale" differisce da quella individuale identificata nella EQ. 1

$$[SMS_1 = SMS_2 = p] \neq [SMS_1 + SMS_2 = p]$$

CVD

In questa seconda parte degli appunti sviluppiamo il CRITERIO DI LINDHAL ovvero il modello analitico attraverso il quale vengono individuate:

1) le domande "ottimali" "individuali" di bene pubblico
2) lo schema di contribuzione efficiente per il suo finanziamento

Ipotesi: Ci sono due soggetti A e B con funzioni di utilità delle seguenti forme:

$$U_A = a \log(RN^A) + (1-a) \log g$$
$$U_B = b \log(RN^B) + (1-b) \log g$$

dove

$$\left.\begin{array}{l} RN^A = R^A - T^A \;;\; T^A = t \cdot g \\ RN^B = R^B - T^B \;;\; T^B = (1-t) \cdot g \end{array}\right\} T = T^A + T^B = g$$

con

RN^A e RN^B definiti come REDDITO NETTO,
R^A e R^B " " REDDITO LORDO,

T^A sono le tasse pagate da A
T^B " " " da B

T sono le tasse totali e g è la spesa pubblica finanziata con le tasse. t e $(1-t)$ esprimono la frazione di contribuzione dei soggetti A e B, rispettivamente, che non sono note al momento.

Nella prima fase i soggetti A e B sono due noti e esprimono le funzioni di domanda rispetto al bene pubblico g risolvendo i rispettivi problemi di massimo:

$$\max_g U^A = a \log[RN^A] + (1-a) \log g$$

$$\max_g U^B = b \log[RN^B] + (1-b) \log g$$

Sostituiamo a RN^A e RN^B i rispettivi valori definiti in precedenza e avremo:

$$\max_{g} U^A = a \log\left[R^A - t g\right] + (1-a) \log g$$

$$\max_{g} U^B = b \log\left[R^B - (1-t) g\right] + (1-b) \log g$$

Impostiamo le condizioni del primo ordine

[Ricorda che $\dfrac{d \log f(x)}{dx} = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$]

$$\frac{dU^A}{dg} = 0 \; ; \quad \frac{-at}{R^A - tg} + \frac{(1-a)}{g} = 0 \qquad \text{(EQ. 1)}$$

$$\frac{dU^B}{dg} = 0 \; ; \quad \frac{-b(1-t)}{R^B - (1-t)g} + \frac{(1-b)}{g} = 0 \qquad \text{(EQ. 2)}$$

Moltiplicando la EQ. 1 per $(R^A - tg)\cdot g$ e la EQ. 2 per $[R^B - (1-t)g]\,g$ avremo:

$$-atg + (1-a)(R^A - tg) = 0 \qquad \text{(EQ. 3)}$$

$$-b(1-t)g + (1-b)\left[R^B - (1-t)g\right] = 0 \qquad \text{(EQ. 4)}$$

Risolvendo la EQ. 3 e la EQ. 4 rispetto a g avremo:

$$g = \frac{R^A(1-a)}{t} \qquad \text{(EQ. 5)}$$

$$g = \frac{R^B(1-b)}{(1-t)} \qquad \text{(EQ. 6)}$$

Le EQ. 5 e EQ. 6 definiscono la domanda di bene pubblico di A e B, rispettivamente.

Passiamo ora alla seconda fase, come ognuno dei due soggetti deve contribuire a finanziare g. Data l'ipotesi di indivisibilità di g (caratteristica dei beni pubblici) la g della EQ. 5 dovrà essere uguale alla g della EQ. 6, per cui uguagliando avremo:

$$\frac{R^A(1-a)}{t} = \frac{R^B(1-b)}{(1-t)}$$

risolviamo rispetto a t moltiplicando per $t\cdot(1-t)$

$$(1-t)R^A(1-a) = t\,R^B(1-b)$$

e isolando t avremo:

$$t = \frac{(1-a)R^A}{(1-a)R^A+(1-b)R^B} \qquad \text{(EQ.7)}$$

La equazione 7 definisce lo schema di tassazione compatibile con la definizione di bene pubblico. Possiamo usare questo schema (è una sorta di aliquota fiscale) per calcolare i valori di g sostituendo nella EQ.5 e nella EQ.6

$$g = \frac{(1-a)R^A}{\frac{(1-a)R^A}{(1-a)R^A+(1-b)R^B}} \quad ; \quad g^* = (1-a)R^A+(1-b)R^B$$

Il valore di g ottenuto (identico se sostituiamo nella EQ.6) rappresenta il livello ottimale di bene pubblico finanziato con un principio di fiscalità compatibile con uno schema ottimizzante dei cittadini contribuenti.