Ceni sulla Variabile casuale
e la binomiale

Una **VARIABILE CASUALE** è una variabile che assume un determinato valore in corrispondenza del verificarsi di un evento; ad ognuno dei valori che tale variabile casuale può assumere, noi associamo una probabilità, che rappresenta la probabilità che quell'evento si verifichi (e, dunque, la probabilità che la variabile casuale assuma quel determinato valore).

Esempio

Supponiamo di fare tre lanci con una moneta.

Cosa può accadere?

1) T ; T ; T	**2) T ; T ; C**
3) T ; C ; T	**4) T ; C ; C**
5) C ; T ; T	**6) C ; T ; C**
7) C ; C ; T	**8) C ; C ; C**

0 volte T

$$P(0) = \frac{C.F.}{C.P.}$$

1 volta T

$$P(1) = \frac{C.F.}{C.P.}$$

2 volte T

$$P(2) = \frac{C.F.}{C.P.}$$

X_i	$P(X_i)$
0	$1/8 = 0{,}125$
1	$3/8 = 0{,}375$
2	$3/8 = 0{,}375$
3	$1/8 = 0{,}125$
	$8/8 = 1$

Variabili casuali =➔ Probabilità

Le considerazioni che possiamo fare dall'osservazione della variabile casuale precedente provengono dall'osservazione **di un modello che è stato generato prendendo in considerazione tutti i possibili eventi che possono accadere a seguito di un esperimento.**

Decisioni: ➔ Esperienza Particolare

➔ Probabilità (oggettivo)

Le variabili casuali poi si dividono in

- **Variabile casuale DISCRETA:** E' una variabile le cui modalità possono essere messe in corrispondenza con l'insieme dei numeri interi (1 – 2 – 3 . . . .)
- **Variabile casuale CONTINUA:** E' una variabile le cui modalità possono essere messe in corrispondenza con l'insieme dei numeri reali (con virgola)

Esempio

X_i	$P(X_i)$	$X_i \cdot P(X_i)$	$X_i - E(X)$	$[X_i - E(X)]^2$	$[X_i - E(X)]^2 \cdot P(X_i)$
0	0,125	$0 \cdot 0{,}125 = 0$	$-1{,}5$	2,25	0,281
1	0,375	$1 \cdot 0{,}375 = 0{,}375$	$-0{,}5$	0,25	0,094
2	0,375	$2 \cdot 0{,}375 = 0{,}750$	0,5	0,25	0,094
3	0,125	$3 \cdot 0{,}125 = 0{,}375$	1,5	2,25	0,281
	1	1,5			0,750

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot P(X_i) = 1{,}5$$

$$VAR(X) = \sum_{i=1}^{n} [X_i - E(X)]^2 \cdot P(X_i) = 0{,}75$$

La V. C. Bernoulliana

Eventi dicotomici (che possono verificarsi in due modi):

[Si – No; Vero – Falso; Successo – Insuccesso]

X_i	$P(X_i)$
0	$1-\pi$
1	π
	1

$$E(X) = \pi$$

$$VAR(X) = \pi \cdot (1-\pi)$$

La V. C. Binomiale

la Variabile Casuale Binomiale: più prove di tipo bernoulliano indipendenti tra loro (n lanci con una moneta, n lanci con un dado, ecc…)

La binomiale rappresenta la probabilità di ottenere un certo numero di successi in n prove indipendenti ripetute nelle stesse condizioni (ad esempio, la probabilità che esca 3 volte testa in 5 lanci di una moneta)

5 prove **3 successi** **π = prob. successo**

T; T; T; C; C $\pi \times \pi \times \pi \times (1-\pi) \times (1-\pi) \longrightarrow \pi^3(1-\pi)^2$

In generale:

n prove   x successi   → $\pi^x(1-\pi)^{n-x}$

Manca qualcosa?   SI…

T; T; T; C; C   T; C; T; C; T   C; C; T; T; T

$$P(X) = \binom{n}{x} \pi^x \cdot (1-\pi)^{n-x}$$

$$E(X) = n \cdot \pi \qquad VAR(X) = n \cdot \pi \cdot (1-\pi)$$

Esempio

Supponiamo di effettuare 5 lanci di un dado.

Si consideri l'evento: E = {Uscita di un numero inferiore a 3} .

Qual è la probabilità che l'evento E si verifichi:

a) 2 volte;   b) almeno 3 volte;   c) meno di 2 volte?

a) 2 volte

$$P(X) = \binom{n}{x} \pi^x \cdot (1-\pi)^{n-x} = \binom{5}{2} 0{,}333^2 \cdot (1-0{,}333)^{5-2} =$$

$$= \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot 0{,}333^2 \cdot (0{,}667)^3 = 10 \cdot 0{,}111 \cdot 0{,}297 = 0{,}329$$

b) almeno 3 volte

$$P(X)=\binom{n}{x}\pi^{x}\cdot(1-\pi)^{n-x}=\binom{5}{3}0{,}333^{3}\cdot(1-0{,}333)^{5-3}=$$

$$=\frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3}\cdot0{,}333^{3}\cdot(0{,}667)^{2}=10\cdot0{,}037\cdot0{,}445=0{,}165$$

Esattamente 3 volte!

Esattamente 4 volte!

$$P(X)=\binom{n}{x}\pi^{x}\cdot(1-\pi)^{n-x}=\binom{5}{4}0{,}333^{4}\cdot(1-0{,}333)^{5-4}=$$

$$=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\cdot0{,}333^{4}\cdot(0{,}667)^{1}=5\cdot0{,}012\cdot0{,}667=0{,}040$$

Esattamente 5 volte!

$$P(X)=\binom{n}{x}\pi^{x}\cdot(1-\pi)^{n-x}=\binom{5}{5}0{,}333^{5}\cdot(1-0{,}333)^{5-5}=$$

$$=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\cdot0{,}333^{5}\cdot(0{,}667)^{0}=1\cdot0{,}004\cdot1=0{,}004$$

La probabilità che l'evento E si verifichi almeno 3 volte sarà data da:

$$P(x\geq3)=P(3)+P(4)+P(5)=0{,}165+0{,}040+0{,}004=0{,}209$$

c) meno di 2 volte $P(x=2)=0{,}329$ $P(x\geq3)=0{,}209$

$$P(x<2)=1-P(x=2)-P(x\geq3)=1-0{,}329-0{,}209=0{,}462$$