

ESERCIZIO N.1

- 1) Per "SENTIERO DI ESPANSIONI" si intende il rapporto di utilizzo ottimale di lavoro (L) e capitale (K), ovvero la tecnologia migliore che le imprese possono utilizzare per produrre il bene Q . Si ottiene risolvendo il problema:

$$\max_{K,L} Q = 8KL \quad \text{sub} \quad r \cdot K + w \cdot L = \bar{C}$$

oppure

$$\min_{K,L} C = r \cdot K + w \cdot L \quad \text{sub} \quad 8 \cdot K \cdot L = \bar{Q}$$

Sappiamo che, nel lungo periodo, l'impresa che rende efficiente la produzione rispetta la condizione

$$\text{STRT} = \frac{w}{r} \quad \text{dove} \quad \text{STRT} = \frac{P_{ML}}{P_{MK}} \quad \text{e}$$

$$P_{ML} = \frac{dQ}{dL}; \quad P_{MK} = \frac{dQ}{dK}$$

Del nostro problema avremo quindi:

$$P_{ML} = 8K; \quad P_{MK} = 8L; \quad w = 10; \quad r = 20; \quad \text{dove anni}$$

$$\text{STRT} = \frac{w}{r} \Rightarrow \frac{P_{ML}}{P_{MK}} = \frac{w}{r}; \quad \frac{8K}{8L} = \frac{10}{20}; \quad \boxed{K = \frac{1}{2}L}$$

SENTIERO DI
ESPANSIONI

Del sentiero di espansione ricaviamo le funzioni del costo: adienti:

$$\text{se } K = \frac{1}{2}L \Rightarrow Q = 8KL \Rightarrow Q = 8\left(\frac{1}{2}L\right)L; \quad Q = 4L^2;$$

$$L^2 = \frac{1}{4}Q; \quad L = \sqrt{\frac{1}{4}Q}; \quad L = \frac{1}{2}\sqrt{Q} \quad \text{domande di lavoro di lungo periodo}$$

Possiamo, a questo punto, ricavare la "funzione" di costo totale partendo dalle "equazioni" di costo:

$$C = r \cdot K + w \cdot L; \quad C = 20 \cdot K + 10 \cdot L; \quad C = 20 \cdot \frac{1}{2}L + 10L$$

$$C = 10 \cdot L + 10 \cdot L; \quad C = 20 \cdot L; \quad C = 20 \cdot \left[\frac{1}{2}\sqrt{Q}\right];$$

$$TC(Q) = 10\sqrt{Q} \quad \text{FUNZIONI DEL COSTO TOTALI DI LUNGO PERIODO}$$

$$ATC(Q) = \frac{TC(Q)}{Q}; \quad ATC(Q) = \frac{10\sqrt{Q}}{Q}; \quad ATC(Q) = \frac{10}{\sqrt{Q}}; \quad \text{costo medio}$$

$$MC(Q) = \frac{dTC(Q)}{dQ}; \quad MC(Q) = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot Q^{-\frac{1}{2}}; \quad MC(Q) = \frac{5}{\sqrt{Q}} \quad \text{costo marginale}$$

2) Se l'impresa sta "già" impiegando 100 unità di capitale
 siamo nel "BREVE PERIODO" e la tecnologia è, in qualche
 misura, "bloccata". Avremo quindi:

$$Q = 8 \cdot K \cdot L; \quad Q = 800 \cdot L; \quad C = 20 \cdot 100 + 10 \cdot L;$$

$$C = 2000 + 10 \cdot L; \text{ ma dalle funzioni di produzione}$$

se $Q = 800 \cdot L$ avremo che la domanda di lavoro sarà

$$L = \frac{1}{800} Q; \text{ per cui avremo:}$$

$$STC(Q) = 2000 + 10 \cdot \left(\frac{1}{800} \cdot Q \right); \quad STC(Q) = 2000 + \frac{1}{80} Q$$

$$SAC(Q) = \frac{2000}{Q} + \frac{1}{80}$$

$$STC(Q) = \frac{1}{80}$$

3) Se vogliamo produrre $Q = 80000$, nel breve periodo avremo
 le seguenti costanti relative quantità di lavoro impiegate:

$$STC(Q=80000) = 2000 + \frac{1}{80} (80000); \quad STC/Q = 1000$$

$$L(Q=80000) = \frac{1}{800} \cdot (80000); \quad L(Q=80000) = 100$$

4) Per produrre 80000 unità di Q nel lungo periodo,
 avremo prodotto entrambi i fattori variabili,
 avremo:

$$LTC(Q=80000) = 10 \cdot \sqrt{80000}; \quad LTC(Q=80000) = 2828,43$$

$$L(Q=80000) = \frac{1}{2} \sqrt{80000}; \quad L(Q=80000) = 141,42$$

$$K(Q=80000) = \frac{1}{2} \cdot L; \quad \leftarrow \text{DAL SOSTITUIRE DI ESPANSIONI}$$

$$K(Q=80000) = \frac{1}{2} \cdot 141,42; \quad K(Q=80000) = 70,71$$

ESERCIZIO N.2

1. Imprenditore cerca la combinazione di ottimo dell'impresa:

$$STST = \frac{w}{r} \quad \text{dove} \quad STST \equiv \frac{P_{ML}}{P_{MK}}; \quad \text{dove}$$

$$P_{ML} = \frac{dq}{dL}; \quad P_{MK} = \frac{dq}{dK}; \quad \text{avremo quindi:}$$

$$P_{ML} = 0,4 \cdot 10 \cdot L^{-0,6} \cdot K^{0,4}; \quad P_{MK} = 0,4 \cdot 10 \cdot L^{0,4} \cdot K^{-0,6}$$

La combinazione di ottimo sarà scelta quindi come:

$$\frac{0,4 \cdot 10 \cdot L^{-0,6} K^{0,4}}{0,4 \cdot 10 \cdot L^{0,4} K^{-0,6}} = \frac{10}{20}; \quad \frac{K}{L} = \frac{1}{2}; \quad K = \frac{1}{2} L \quad \left. \begin{array}{l} \text{SENTIERO} \\ \text{DI} \\ \text{ESPANSIONI} \end{array} \right\}$$

2. Se $\bar{C} = 100000$ avremo:

$$100000 = r \cdot K + w \cdot L; \quad 100000 = 20 \cdot \left(\frac{1}{2} L\right) + 10 \cdot L;$$

$$100000 = 10 \cdot L + 10 \cdot L; \quad 100000 = 20 \cdot L; \quad L^* = 5000$$

$$K = \frac{1}{2} L; \quad K = \frac{1}{2} \cdot 5000; \quad K^* = 2500$$

$$q = 10 \cdot (2500)^{0,4} (5000)^{0,4}; \quad q^* = 9102,82$$

3. Se $w=5$ e $r=10$ il settore di espansione non si modifica; infatti avremo:

$$\frac{K}{L} = \frac{5}{10}; \quad K = \frac{1}{2} L, \quad \text{ma dato il budget, con } r=10 \text{ e } w=5$$

$$100000 = 10 \left(\frac{1}{2} L\right) + 5 \cdot L; \quad 100000 = 5 \cdot L + 5 \cdot L;$$

$$100000 = 10 \cdot L; \quad L^* = 10000; \quad K^* = 5000 \quad \text{da cui}$$

$$q^* = 10 (5000)^{0,4} (10000)^{0,4}; \quad q^* = 12011,24$$

La quantità dei fattori produttivi raddoppia, ma la quantità prodotta aumenta "meno del doppio" (l'aumento è di circa il 32%).

Questo è dovuto alla presenza dei rendimenti di scala decrescenti sintetizzati dai parametri tecnologici della funzione di produzione (0,4 per il capitale e 0,4 per il lavoro): $0,4 + 0,4 = 0,8 < 1$

ESERCIZIO 1.3

1. Impariamo la condizione ottimale:

$STST = \frac{W}{2}$; e calcoliamo i prodotti marginali

$$PTL = \frac{dq}{dL}; \quad PTL = 0,6 \cdot 500 \cdot L^{-0,4} K^{0,8};$$

$$PTK = \frac{dq}{dK}; \quad PTK = 0,8 \cdot 500 \cdot L^{0,6} K^{-0,2}; \quad \text{da cui}$$

$$\frac{3 \cdot 0,6 \cdot 500 \cdot L^{-0,4} K^{0,8}}{4 \cdot 0,8 \cdot 500 \cdot L^{0,6} K^{-0,2}} = \frac{153}{10}; \quad \frac{3K}{4L} = \frac{3}{10}$$

$$K = \frac{2}{5} \cdot L \quad \text{SENTIZIO DI ESPANSIONE}$$

2. Dato il budget $\bar{C} = 850000$ sostituiamo:

$$850000 = 50 \cdot K + 15 \cdot L; \quad 850000 = 50 \cdot \frac{2}{5} L + 15 L$$

$$850000 = 20 \cdot L + 15 \cdot L; \quad 850000 = 35 \cdot L;$$

$$L^* = 24285,7; \quad K = \frac{2}{5} (24285,7); \quad K^* = 9714,3$$

$$q^* \approx 33121468$$

3. Se $W = 22,5$ la condizione ottimale diventa:

$$\frac{3K}{4L} = \frac{22,5}{50}; \quad K = \frac{3}{5} \cdot L; \quad K = \frac{3}{5} L \quad \text{NONO DI ESPANSIONE}$$

da cui, a parte il budget:

$$850000 = 50 \cdot \left(\frac{3}{5} \cdot L\right) + 22,5 \cdot L; \quad 850000 = 30 \cdot L + 22,5 \cdot L$$

$$850000 = 52,5 \cdot L; \quad L^* = 16190,5; \quad K = \frac{3}{5} (16190,5);$$

$$K^* = 9714,3;$$

$$q^* \approx 289690086$$

L'utilizzo del lavoro si è ridotto di circa il 33%, ma la produttività si è ridotta meno del 33% (circa il 21%), questo

a causa del rendimento di scala di livello sono crescenti su entrambi i fattori ($0,6 + 0,8 = 1,4 > 1$)

EXERCICE N. 4

1. Sentiers d'expansion: introduisons la même règle d'ordre:

$STPST = \frac{w}{r}$ et calculons la productivité marginale:

$$PTL \equiv \frac{dq}{dL}; \quad PTL = 0,5 \cdot 10 \cdot L^{-0,5} \cdot K^{0,5};$$

$$PTK \equiv \frac{dq}{dK}; \quad PTK = 0,5 \cdot 10 \cdot L^{0,5} \cdot K^{-0,5};$$

$$STPST = \frac{40}{60} \cdot \frac{0,5 \cdot 10 \cdot L^{-0,5} \cdot K^{0,5}}{0,5 \cdot 10 \cdot L^{0,5} \cdot K^{-0,5}} = \frac{40}{60};$$

$$\frac{K}{L} = \frac{2}{3}; \quad K = \frac{2}{3} \cdot L \quad \text{SUIVANT LES PROPORTIONS}$$

2. Cas $\bar{C} = 10000$ ans:

$$10000 = 60 \cdot K + 40 \cdot L; \quad 10000 = 60 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot L\right) + 40 \cdot L;$$

$$10000 = 40 \cdot L + 40 \cdot L; \quad 10000 = 80 \cdot L; \quad L^* = 125$$

$$K = \frac{2}{3} \cdot 125; \quad K^* = \frac{250}{3}; \quad q = 10 \cdot (125)^{0,5} \cdot \left(\frac{250}{3}\right)^{0,5};$$

$$q^* = 1020,6$$

3. Si $K = 100$ ans:

$$q = 10 \cdot (100)^{0,5} \cdot L^{0,5}; \quad q = 100 L^{0,5}; \quad \text{de cui, elevando a}$$

$$q^2 = 10000 \cdot L \quad \text{e quindi} \quad L = \frac{q^2}{10000} \quad \text{olomando de}$$

$$C = 60 \cdot 100 + 40 \cdot L; \quad C = 6000 + 40 \cdot \frac{q^2}{10000} \quad \text{brevi periodo}$$

4. le fijos de esta planta son:

$$FC = 6000$$

$$STC = 0,004 q^2$$

$$SAC = \frac{6000}{q} + 0,004 q$$

$$SMC = 0,008 q$$

$$AFC = \frac{6000}{q}$$

$$SAC = 0,004 q$$