Introduzione al Corso di Matematica

Anno Accademico 2025-2026

Corso di Laurea in Scienze e Tecnologie Alimentari &Viticoltura ed Enologia

Introduzione alla matematica

Primi concetti e nozioni di base

Definizione di matematica

La MATEMATICA è la scienza che studia i problemi concernenti le quantità (intese come numeri) attraverso l'uso di strumenti logici.

Più concretamente la MATEMATICA è la scienza che a partire da un insieme di definizioni e assiomi riguardanti gli oggetti di studio, si occupa di definire nuove proprietà meno intuitive riguardanti gli oggetti stessi, attraverso l'utilizzo di dimostrazioni e processi deduttivi.

Esempio Teorema di Pitagora

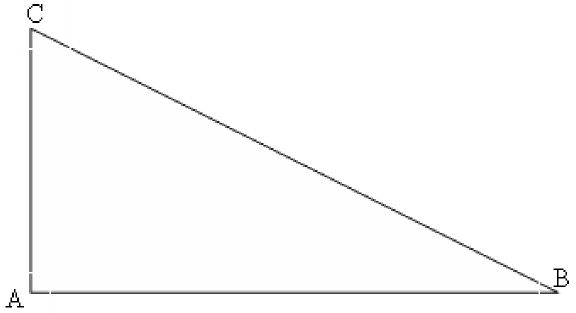
Per esempio, nella figura è rappresentato un triangolo rettangolo, ma grazie al Teorema di Pitagora e ad altre conseguenze logiche possiamo asserire:

- Che l'area del quadrato costituito sull'ipotenusa è equivalente alla somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti del triangolo.

Ma ancora…

- È abbastanza semplice e intuitivo pensare che la somma delle lunghezze dei due cateti sono maggiori della lunghezza dell'ipotenusa,
- invece è meno intuitivo stabilire che l'ipotenusa è equivalente alla radice quadrata della somma dei quadrati delle lunghezze dei cateti:

$$CB = \sqrt[2]{AC^2 + AB^2}$$



I NUMERI

L'elemento principale con cui opera la matematica sono i numeri. Di seguito si riportano alcuni tipologie di numeri tra le più conosciute:

-numeri naturali,

-numeri interi,

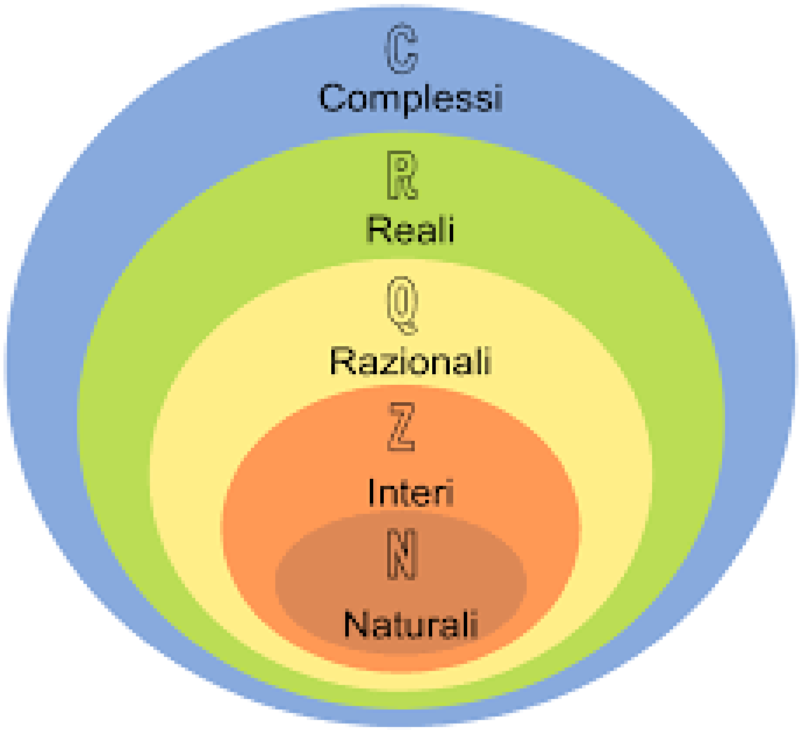
-numeri razionali,

-numeri Reali.

Le categorie appena citate vengono raggruppate in insiemi numerici.

Gli insiemi numerici

- Gli insiemi numerici sono collezioni ben definite di numeri che includono i numeri naturali (N), i numeri interi (Z), i numeri razionali (Q), i numeri reali (R) e i numeri complessi (C), organizzati gerarchicamente in modo che ogni insieme più ampio contenga quelli più piccoli.
- Ciascun insieme soddisfa determinate proprietà e viene utilizzato per estendere le operazioni matematiche, come nel caso dei numeri razionali che servono a "tappare i buchi" lasciati dai numeri reali per definire le frazioni.



Relazione di inclusione degli insiemi numerici

C'è una relazione di inclusione tra questi insiemi:

→i numeri naturali sono un sottoinsieme degli interi,

→che sono a loro volta un sottoinsieme dei numeri razionali, e così via.

Questa struttura gerarchica permette di estendere progressivamente il campo di applicazione delle operazioni e di risolvere problemi matematici che non sarebbero possibili con un insieme più ristretto.

Ad esempio, l'esistenza di numeri irrazionali porta all'introduzione dell'insieme dei numeri reali per rappresentarli completamente.

Proprietà degli insiemi numerici

- Ecco una descrizione dei principali insiemi numerici:
- Numeri Naturali (N): Include tutti gli interi positivi (1, 2, 3...) e, in alcune definizioni, lo zero.
- Numeri Interi (Z): Comprende tutti i numeri naturali, i loro opposti negativi (come -1, -2, -3...) e lo zero.
- Numeri Razionali (Q): Formati da tutte le frazioni di numeri interi, cioè ogni numero che può essere scritto come a/b, dove a e b sono numeri interi e b è diverso da zero. Comprendono Naturali, interni, decimali finiti e decimali periodici
- Numeri irrazionali: sono i numeri che non possono essere espressi sotto forma di frazione (come la radice quadrata di 2 o pi greco, π),
- Numeri Reali (R): Includono tutti i numeri razionali e i numeri irrazionali, che non possono essere espressi come frazioni esatte di interi.
- Numeri Complessi (C): Sono l'insieme più esteso, e comprendono tutti i numeri reali e quelli che hanno una parte immaginaria, rappresentabili con la forma a + bi.

NUMERI NATURALI

I numeri NATURALI sono i numeri interi positivi a partire dal numero 0.

L'INSIEME DEI NUMERI NATURALI si rappresenta con la lettera N.

$$N = \{0,1,2,3 \ldots, n, \ldots\}$$

Caratteristiche:

-Si compone di infiniti numeri,

-si può definire il minimo dell'insieme (il numero minimo è 0)

Operazioni ammesse:

-somma e moltiplicazione

NUMERI INTERI

L'INSIEME DEI NUMERI INTERI contiene tutti i numeri interi, sia negativi che positivi.

L'INSIEME DEI NUMERI INTERI si rappresenta con la lettera Z.

$$Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

Caratteristiche:

-Si compone di infiniti numeri.

Operazioni ammesse:

-somma, moltiplicazione e sottrazione

NUMERI RAZIONALI

L'INSIEME DEI NUMERI RAZIONALI sono l'insieme di numeri frazionari.

L'INSIEME DEI NUMERI INTERI si rappresenta con la lettera Q.

$$Q = \{ {}^{m}/_{n} | \; m \; \in Z \;, n \; \in N \; e \; n \; \neq 0 \, \}$$

Caratteristiche:

-Si compone di infiniti numeri,

-tra un numero frazionario e un altro numero frazionario esistono infiniti numeri,

-non esiste il concetto di successivo.

Operazioni ammesse:

-somma, moltiplicazione, sottrazione e divisione.

NUMERI REALI

L'INSIEME DEI NUMERI REALI è l'insieme di tutti i numeri che si possono rappresentare con la virgola, siano essi finiti, periodici o infiniti.

L'insieme dei numeri REALI si rappresenta con la lettera R.

Operazioni ammesse:

-somma, moltiplicazione, sottrazione e divisione,

-operazioni con i radicali.

*esistono infiniti numeri tra qualsiasi numero ed un altro

GLI INSIEMI

INSIEMI

Si definisce INSIEME una collezione di oggetti detti elementi dell'insieme.
Es.: insieme A composto da i primi 5 numeri:

$$A = \{1,2,3,4,5\}$$

Notazioni matematiche:

$x \epsilon A$ indica che l'elemento x appartiene all'insieme A

$x \notin A$ indica che l'elemento x NON appartiene all'insieme A

OPERATORI DI CONFRONTO TRA INSIEMI

Dati due insiemi è possibile confrontarli in base agli elementi da essi contenuti.

Per esempio dati due insiemi A e B:

$A \subseteq B$ e $B \supseteq A$ indicano che ogni elemento di A è contenuto i n B

$A \subset B$ e $B \subset A$ indicano che ogni elemento di A è contenuto i n B

OPERAZIONI TRA INSIEMI

Si definiscono anche operazioni tra insiemi:

-Intersezione tra due insiemi

$A \cap B$

Cioè un nuovo insieme composto dagli elementi che appartengono contemporaneamente sia ad A che a B.

OPERAZIONI TRA INSIEMI - 2

-unione tra due insiemi

$$A \cup B$$

cioè un nuovo insieme composto dagli elementi che appartengono solo ad A, dagli elementi che appartengono solo a B e dagli elementi che appartengono contemporaneamente sia ad A che a B.

Esempio:

Insieme A={a,b,c}

Insieme B={e,f,g}

Insieme A U B = {a,b,c,e,f,g}

OPERAZIONI TRA INSIEMI - 3

-differenza tra due insiemi

$$A \backslash B$$

cioè un nuovo insieme composto dagli elementi che appartengono solo ad A, esclusi gli elementi che appartengono contemporaneamente sia ad A che a B.

OPERAZIONI TRA INSIEMI - 4

-prodotto cartesiano tra due insiemi:

$$A \, X \, B$$

cioè tutte le coppie ordinate in cui il primo elemento appartiene ad A e il secondo elemento a B insieme composto dagli elementi che appartengono solo ad A, esclusi gli elementi che appartengono contemporaneamente sia ad A che a B.

Esempio:

Insieme A={a,b,c}

Insieme B={e,f,g}

Insieme A X B = {(a,e), (a,f), (a,g), (b,e), (b,f), (b,g), (c,e), (c,f), (c,g)}

RELAZIONI TRA INSIEMI NUMERICI

Rispetto quanto indicato per gli insiemi numerici possiamo quindi scrivere che:

$$N \subset I \subset Q \subset R \subset C$$

INTERVALLI NUMERICI E NOTAZIONE

Si definisce **intervallo** un sottoinsieme dei numeri reali.

Notazione degli intervalli:

]a , b[

]a , b]

[a , b[

[a , b]

]a , +∞[

[a , +∞[

]-∞ , a[

]-∞ , a]

INTERVALLI NUMERICI E NOTAZIONE - per elencazione

$]a, b[\rightarrow \{a, a+1, a+2 \ldots, b\}$

INTERVALLI NUMERICI E NOTAZIONE - costruzione per selezione

]a , b[→ $\{x \in R | x > a$ e $x < b\}$ oppure $\{x \in R | a < x < b\}$

Le operazioni negli insiemi numerici

OPERAZIONI TRA NUMERI: ADDIZIONE

L'addizione è un operazione matematica tra due numeri detti addendi, il cui risultato è detto "somma".

Proprietà:

commutativa

$a+b = b+a$

associativa

$a+b+c =(a+b)+c=a+(b+c)$

distributiva

$k(a+b)=ka+kb$

elemento neutro

$a+0=a$

OPERAZIONI TRA NUMERI: MOLTIPLICAZIONE

La moltiplicazione è una delle operazioni matematiche fondamentali è fornisce un modo per rappresentare velocemente la somma di molti numeri uguali. La moltiplicazione è un operazione tra due numeri detti fattori, e il risultato è chiamato prodotto.

Proprietà

Proprietà:

commutativa

a*b = b*a

associativa

a*b*c =(a*b)*c=a*(b*c)

distributiva

k*(a+b)=ka+kb

elemento neutro

a*1=a

esistenza dell'inverso

$$x = \frac{1}{x} = 1$$

OPERAZIONI TRA NUMERI: SOTTRAZIONE

La sottrazione è una delle operazioni matematiche fondamentali tra due numeri, il primo, detto sottraendo, il secondo, detto minuendo, e il risultato è chiamato differenza.

Proprietà:

proprietà invariantiva della sottrazione

$a-b = (a+c)-(b+c)$

OPERAZIONI TRA NUMERI: DIVISIONE

- La divisione è una delle operazioni matematiche fondamentali e rappresenta l'inverso della moltiplicazione. La divisione è un'operazione tra due numeri, il primo detto divisore, il secondo detto dividendo. La divisione può generare un resto. Il risultato di una divisione se c'è resto si chiama quoziente, se non c'è resto si chiama divisore.

- Non è ammessa la divisione per 0

- Proprietà:
- proprietà invariantiva della divisione
- a:b = (a*c):(b*c)

ESPRESSIONI NUMERICHE

ESPRESSIONI NUMERICHE o ALGEBRICA

Un ESPRESSIONE NUMERICA o ALGEBRICA è un insieme di numeri legati da operazioni matematiche quali: somma, moltiplicazione, sottrazione e divisione.

Regole per la risoluzione di un ESPRESSIONE NUMERICA:

-si risolvono prima le operazioni all'interno delle parentesi tonde ( ), poi quelle all'interno delle parentesi quadre [ ] e poi quelle all'interno delle parentesi graffe { }.

-tra le varie operazioni presenti si risolvono prima moltiplicazioni e divisioni, poi addizioni e sottrazioni.

Esempio

$$\left\{7+\left[4+\left(3*2+\frac{1}{2}*6\right)+5*(6+2)\right]\right\}=$$

$$=\{7+[4+(6+3)+5*(8)]\}=$$

$$=\{7+[4+(9)+40]\}=$$

$$=\{7+53\}=$$

$$=60$$

MCD e mcm

Si definisce MASSIMO COMUNE DIVISORE il numero più grande con il quale due o più numeri possono essere divisi.

Si definisce il MINIMO COMUNE MULTIPLO il numero più piccolo che risulta essere multiplo di due o più numeri.

MCD e mcm (1)

$$\left\{\frac{9}{2} * \frac{4}{3} + \left[\frac{12}{5} + \frac{7}{4} - \frac{3}{20}\right] - \left(5 + \frac{3}{2} + \frac{1}{3}\right)\right\} =$$

$$= \left\{6 + \left[\frac{48 + 35 - 3}{20}\right] - \left(\frac{30 + 9 + 2}{6}\right)\right\} =$$

$$= \left\{6 + \left[\frac{80}{20}\right] - \left(\frac{30 + 9 + 2}{6}\right)\right\} =$$

$$= \left\{6 + 4 - \frac{41}{6}\right\} =$$

$$= \frac{36 + 24 - 41}{6} =$$

$$= \frac{19}{6}$$

Esempi di esercizi di espressioni - 1

1. $$\frac{\left[\left(\frac{2}{5}\right)^4 \times \left(\frac{15}{4}\right)^4 \times \left(\frac{1}{9}\right)^4\right]^{-2} : \left(\frac{1}{6}\right)^{-6} \times 6^{-2}}{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 \times (-1)^7 \times \left(-\frac{3}{2}\right)^4}$$

2. $$\left\{\left[\left(-\frac{12}{5}\right)^{-8} : \left(-\frac{4}{5}\right)^{-8}\right]^{-3} : \left[15^5 \times \left(-\frac{1}{5}\right)^5\right]^4\right\}^3 \times \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right]^{-6}$$

3. $$\left\{\left[\left(1+\frac{2}{5}-\frac{1}{2}\right)^2 : \left(-\frac{9}{10}\right)^2 + \left(-2+\frac{5}{3}\right)^2\right]^2 : \left(-\frac{10}{9}\right)^2\right\}^4 - 3 + \frac{2}{5}$$

4. $$\left[\left(-\frac{1}{3}+\frac{5}{7}-\frac{1}{2}\right) \times \frac{21}{20} - \frac{1}{4}\right] \times \left(-1+\frac{1}{11}\right) \times \left\{\frac{4}{5} - \left[1 - \left(-2-\frac{3}{5}\right)\right] - \left(-1+\frac{2}{5}\right)\right\}$$

Esempi di esercizi di espressioni - 2

5. $\left[(-5)^2 \times (-5)^3 : (-5)^4\right]^2 - \left(8 - 2^2 - 3^2\right)$
$\times \left(5^6 : 5^4 - 30\right)$

6. $-\left[-3^2 : (-3)\right]^3 \times [2 - 5 + (-3) \times (-2)]$
$: [3^2 \times (-3)]$

7. $\left\{\left[(-21)^2\right]^3\right\}^6 : \left\{\left[(-21)^5\right]^2\right\}^3 \times \left[(-21)^6\right]^7$
$: \left[(-21)^8\right]^5 \Big\}$

8. $\left(1 + \frac{1}{5} - \frac{13}{15}\right) + \left[3 - \left(\frac{7}{4} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{6}\right) + \frac{1}{5}\right]$
$- \frac{11}{6}$

9. $\left[\left(\frac{7}{6} - \frac{1}{4}\right) : \frac{1}{4} + \left(\frac{5}{4} - \frac{4}{9}\right) \times \frac{12}{29}\right]$
$: \left[\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) : \frac{1}{4} - \left(1 + \frac{1}{5}\right) \times \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) - \frac{4}{5} + \frac{4}{5}\right.$
$\left. \times \left(1 + \frac{8}{7}\right)\right]$

Esempi di esercizi di espressioni - 3

10. $\left(\frac{2}{3}+3\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)\times\frac{4}{3}-\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{6}\right)\times 2$

11. $\sqrt{\frac{17}{12}+\frac{9}{7}:\left\{\frac{2}{5}+\frac{7}{8}:\left[\left(\frac{11}{15}-\frac{1}{3}\right)^2:\left(\frac{8}{5}\right)^2+\left(\frac{5}{2}-\frac{9}{8}-\frac{9}{16}\right)\right]^2\right\}}$

Altri concetti

Uguaglianza

Si definisce UGUAGLIANZA una relazione di equivalenza tra due espressioni numeriche.

$$\frac{9}{2}+\frac{7}{3}=\frac{7}{2}+\frac{10}{3}$$

Proprietà:

Se indicassimo con A e B due espressioni numeriche equivalenti possiamo scrivere:

$$A = B$$

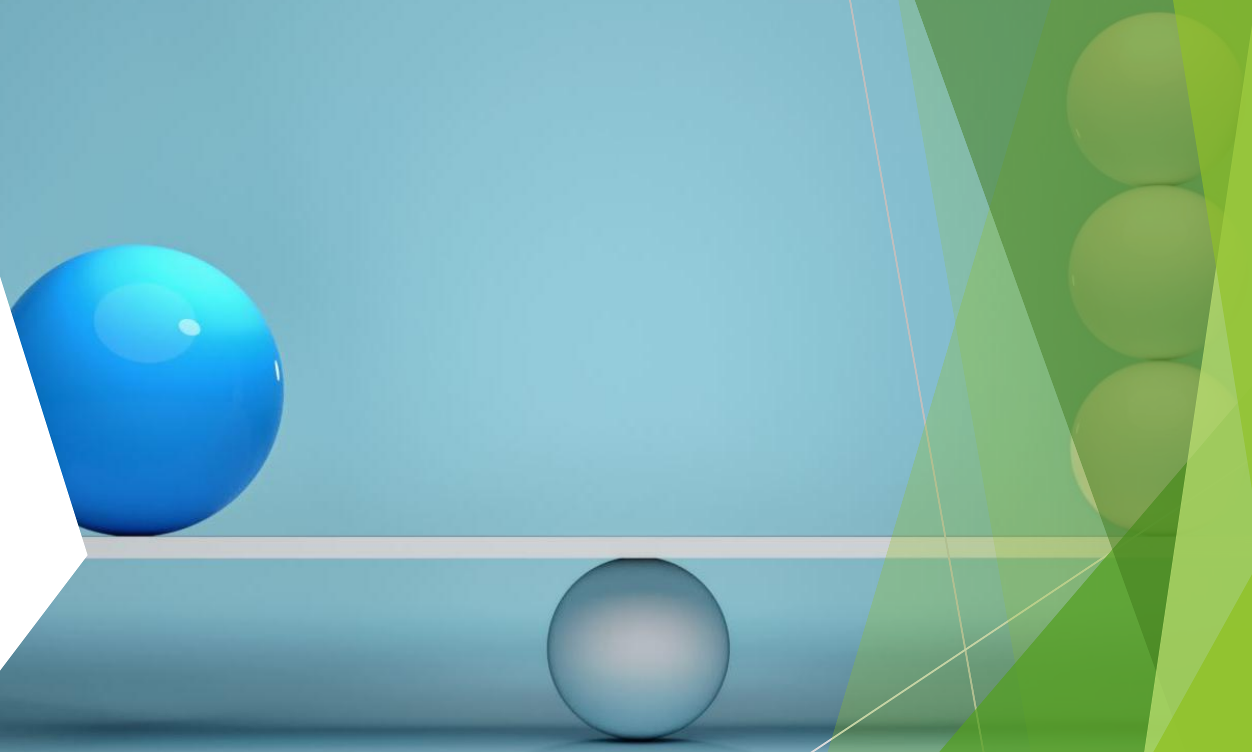
Allora vale che:

moltiplicando A e B per una stessa quantità la relazione di equivalenza non varia,

dividendo A e B per una stessa quantità (diversa da 0) la relazione di equivalenza non varia,

sommando A e B per una stessa quantità la relazione di equivalenza non varia,

sottraendo A e B per una stessa quantità la relazione di equivalenza non varia.



POTENZE (NUMERICHE)

Si definisce POTENZA l’associazione tra una coppia di numeri a ed n e il risultato del prodotto di n fattori uguali ad a:

$$a^n = a * a * a \ldots * a$$

Esempio:

$$3^4 = 3 * 3 * 3 * 3$$

$$2^5 = 2 * 2 * 2 * 2 * 2$$

POTENZE (NUMERICHE) - 2

PROPRIETà DELLE POTENZE:

Il prodotto di due potenze con la stessa base è equivalente ad un'unica potenza con la stessa base e la somma degli esponenti:

$$3^4 * 3^3 = 3^7$$

$$\frac{3^7}{3^3} = 3^4$$

La potenza di una potenza è equivalente ad una potenza con la stessa base ma con esponente il prodotto degli esponenti:

$$(a^n)^m = a^{n*m}$$

POTENZE (NUMERICHE) - 3

Il prodotto di più potenze aventi base diverse ma esponenti uguali è equivalente ad una potenza con il prodotto delle basi e con lo stesso esponente:

$$a^n * b^n = (a * b)^n$$

POTENZE (NUMERICHE) - 4

La divisione tra due potenze con lo stesso esponente ma basi diverse è equivalente ad una potenza con base la divisione delle basi e come esponente lo stesso esponente delle potenze iniziali:

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

POTENZE (NUMERICHE) - 5

La potenza che ha come esponente 0 è equivalente ad 1 qualsiasi sia la base:

$$a^0 = 1$$

$[(5^2)^3 \times 5^4] : [5^5 \times 5^2]$;

$[(3^3)^9 : 3^6] : [3^8 \times 3^4]$;

$\{[(4^3)^2 : (4^3 \times 4^2)]\}^5 \times [(4^2)^2 \times (4^0)^2]$

POTENZE (NUMERICHE) - 6

La potenza che ha come esponente -1 è equivalente ad all'inverso della potenza con lo stesso esponente:

$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a};$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n};$ $a^{-1} = \frac{1}{a};$

POTENZE (NUMERICHE) - 7

La potenza che ha come esponente un numero compreso tra 0 e 1 è equivalente alla radice con lo stesso esponente:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a};$$

Esempi potenze

I) $2^5 \cdot 2^3$

II) $3^7 \cdot 3^5$

III) $5^2 \cdot \frac{1}{5}$

IV) $2^7 \cdot 2^{-5} \cdot 2^{\frac{1}{2}}$

V) $\frac{2^2 \cdot 3^2}{2^3 \cdot 3^3} \cdot 2^0$

VI) $\frac{7^9 \cdot 7^{\frac{2}{3}} \cdot 7^{-\frac{1}{3}}}{7^{\frac{1}{4}}}$

VII) $\frac{3^2}{(3^3)^2} \cdot \frac{(3^2)^3}{3^5} \cdot 3^3$

VIII) $9^0 \cdot 3^0 \cdot 121^0 + 2^0$

IX) $6^3 \cdot 2^5 \cdot 3^2 \cdot \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{1024}$

X) $\frac{\left(\frac{25}{5^3}\right)}{5^{-2}} \cdot \frac{10^2}{4} \cdot \frac{4^{\frac{1}{2}}}{16^{\frac{1}{2}}}$

LOGARITMI

Un LOGARITMO di un numero in una data base, è il numero a cui deve essere elevata la base per ottenere l'argomento.

Il logaritmo si rappresenta così:

$$\log_{base}(argomento)$$

Esempi:

$$\log_2(4) = 2$$
$$\log_3(9) = 2$$
$$\log_5(25) = 2$$
$$\log_{10}(1000) = 3$$
$$\log_6(36) = 2$$
$$\log_2(8) = ?$$

Logaritmi Esercizi - 1

1.I) $Log(10)$; $\log_2(8)$

1.II) $\ln\left(e^{\frac{3}{2}}\right)$; $\log_2\left(\frac{1}{4}\right)$

1.III) $\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{64}\right)$; $\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{9}{4}\right)$

1.IV) $\log_{\frac{5}{4}}\left(\frac{64}{125}\right)$; $\log_3\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{2}{3}}$

1.V) $\log_{\frac{3}{4}}\left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{3}{2}}$; $\log_{\sqrt{2}}(2)^{\frac{3}{4}}$

Logaritmi Esercizi - 2

1.I) $Log(10) = 1; \quad \log_2(8) = 3$

1.II) $\ln\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{2}; \quad \log_2\left(\frac{1}{4}\right) = -2$

1.III) $\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{64}\right) = 3; \quad \log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{9}{4}\right) = -2$

1.IV) $\log_{\frac{5}{4}}\left(\frac{64}{125}\right) = -3; \quad \log_3\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{2}{3}} = \frac{4}{3}$

1.V) $\log_{\frac{3}{4}}\left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{3}{2}} = 3; \quad \log_{\sqrt{2}}(2)^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{2}$

Proprietà dei Logaritmi

Modo alternativo per scrivere un logaritmo:

$$\log_a(b) = c$$

$$a^c = b$$

$$a^{\log_a b} = b$$

Proprietà dei Logartmi - 2

Il logaritmo di un prodotto è uguale alla somma dei logaritmi con la stessa base e con argomento i due fattori:

$$\log_a(b * c) = \log_a b + \log_a c$$

Il logaritmo di un rapporto è uguale alla differenza dei logaritmi con la stessa base e con argomento i due fattori:

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

Proprietà dei Logartmi - 3

Il logaritmo di una potenza è uguale al prodotto dell'esponente della potenza per il logaritmo con la stessa base e con argomento la base della potenza:

$$\log_a(b^c) = c * \log_a b$$

Cambiamento di base:

$$\log_a(b) = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Inversione di base:

$$\log_a(b) = \frac{1}{\log_b a}$$

Altri esercizi Logaritmi

I) $\log_2\left(16\sqrt{2}\right)$

II) $\log_{\frac{1}{3}}\left(\sqrt[3]{3\sqrt{27}}\right)$

III) $\log_{\frac{1}{10}}\left(\frac{\sqrt{10}}{100^2}\right)$

IV) $\log_2\left(\frac{4\sqrt{8}}{\sqrt[3]{2}}\right)$

V) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[3]{4}}\right)$

VI) $\log_3\left(\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{3}}{9}\right)^5$

VII) $\log_6(9)+\log_6(48)+\log_6(3)$

VIII) $\log_2(9)-\log_2(3)-\log_2(6)$