

- **FUNZIONI ELEMENTARI**

- **Funzione lineare**
- **Funzione potenza**
- **Funzione esponenziale**
- **Funzione logaritmo**

- **FUNZIONI ELEMENTARI**
 - **Funzione lineare**

Funzione lineare

Si definisce **funzione lineare** una funzione espressa dalla legge generale:

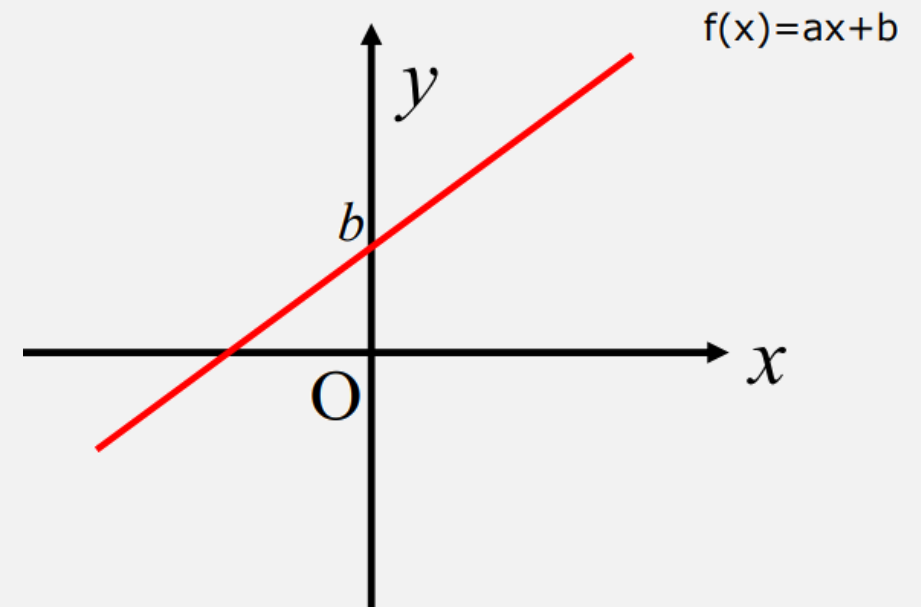
$$f(x) = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$f : x \in \mathbb{R} \rightarrow (ax + b) \in \mathbb{R}$$

a viene definito **coefficiente angolare**

b viene definito **termine noto**

Ogni funzione lineare ha per grafico una **retta**



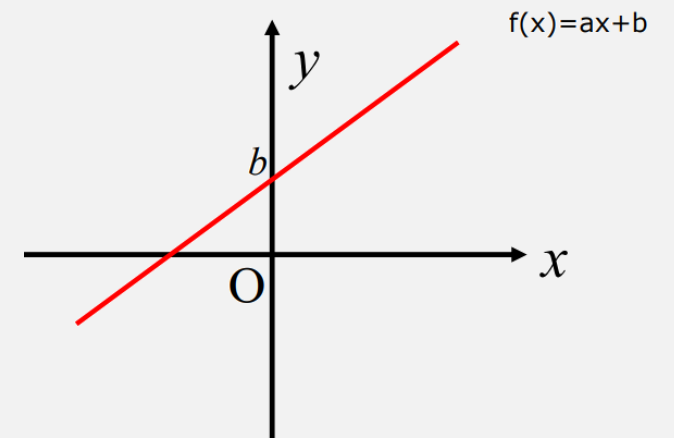
Il termine noto b

La funzione lineare è caratterizzata dalle due costanti a e b .

Se $x = 0 \rightarrow y = b$, e quindi il punto $P(0, b)$ che si trova sull'asse verticale della y appartiene al grafico della funzione.

Il termine noto b è l'ordinata dell'intersezione del grafico della funzione con l'asse y e prende il nome di **INTERCETTA**

Nel caso in cui la variabile indipendente è il tempo, e la legge quindi è $f(t) = at + b$, il coefficiente $b = f(0)$ si chiama VALORE INIZIALE

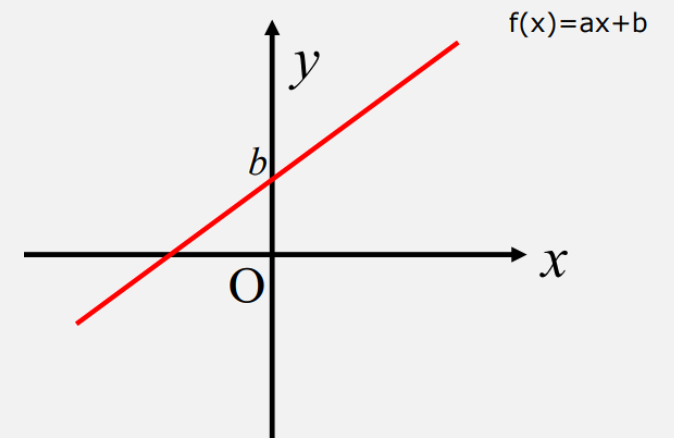


Il coefficiente angolare a

Data la funzione $f(x) = ax + b$, il coefficiente a rappresenta la **VARIAZIONE** delle ordinate di due punti qualunque del grafico rispetto alla corrispondente variazione delle ascisse:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

- Il coefficiente a quantifica l'**inclinazione** della retta rispetto all'asse orizzontale
- Il coefficiente a è costante

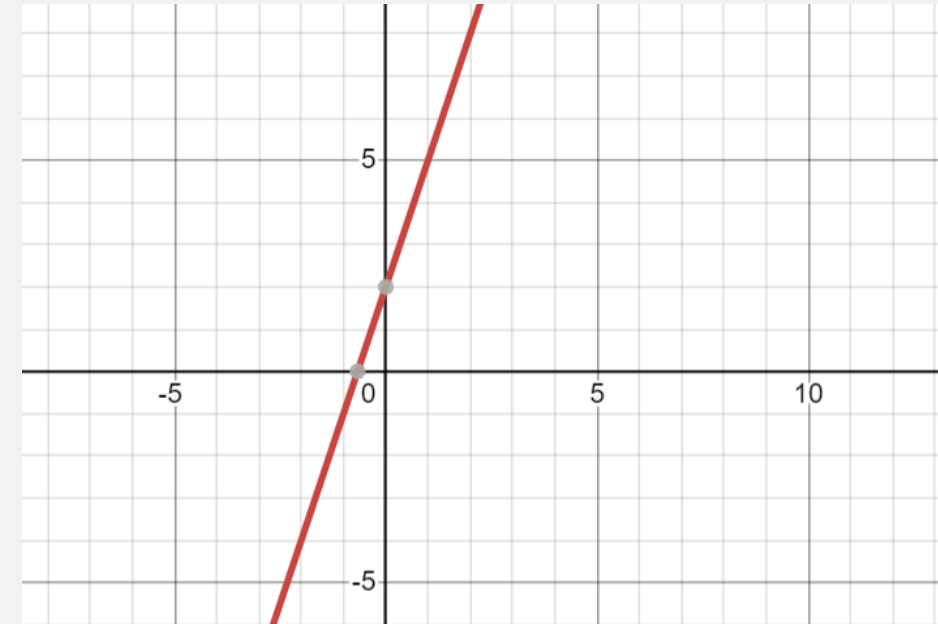


Esempio.

Sia data la funzione $f(x) = 3x + 2$, prendo i punti $x_1 = 2, x_2 = 5, x_3 = 8$ e calcolo la variazione tra i punti x_1, x_2 e tra i punti x_2, x_3

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{17 - 8}{5 - 2} = \frac{9}{3} = 3$$

$$a = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{26 - 17}{8 - 5} = \frac{9}{3} = 3$$

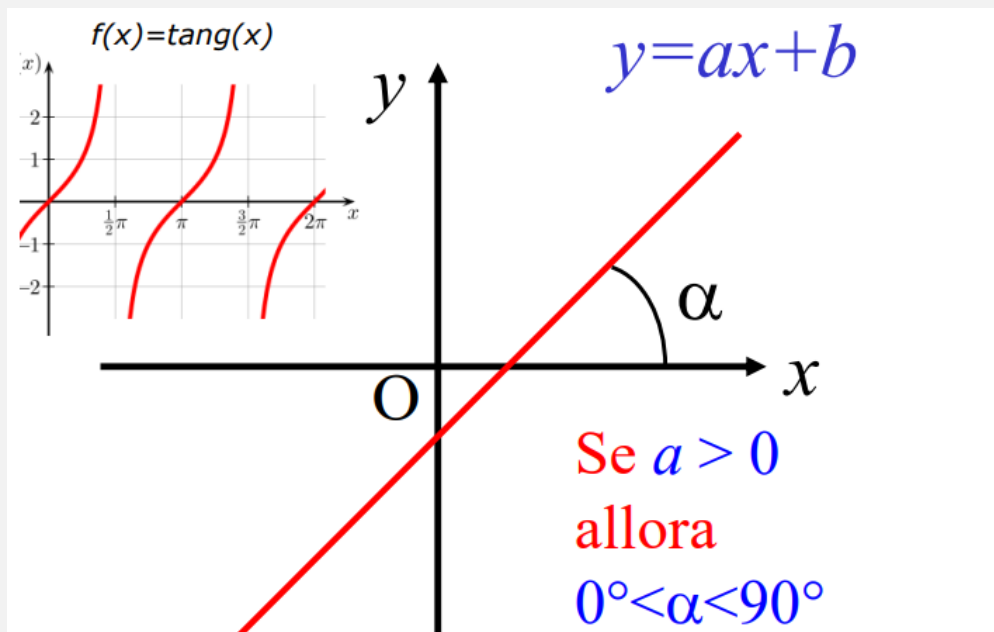


Il coefficiente angolare a

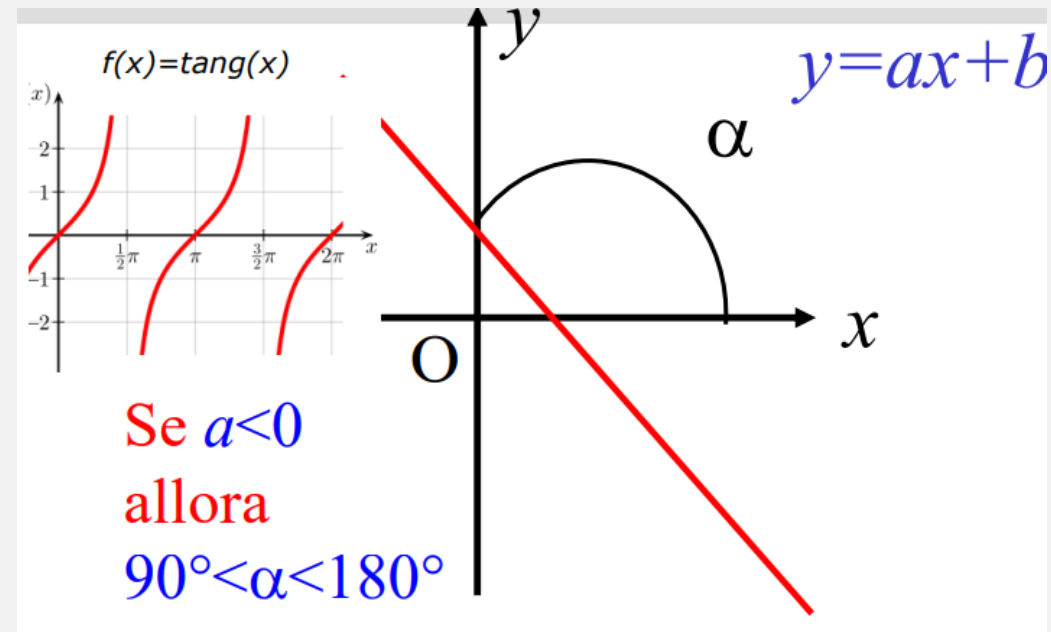
Il coefficiente angolare a vale:

$$a = \tan \alpha$$

Dove α è l'angolo che la retta forma con l'asse orizzontale, misurato in senso antiorario



f strettamente crescente in $\mathbb{R}$
 $\sup(ax + b) = +\infty; \inf(ax + b) = -\infty$



f strettamente decrescente in $\mathbb{R}$
 $\sup(ax + b) = +\infty; \inf(ax + b) = -\infty$

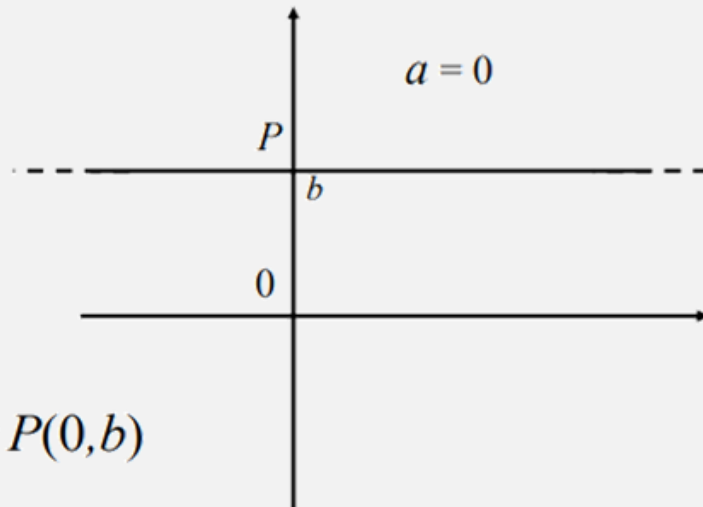
Il coefficiente angolare a

Il coefficiente angolare a vale:

$$a = \tan \alpha$$

Dove α è l'angolo che la retta forma con l'asse orizzontale, misurato in senso antiorario

$$f(x) = b, \quad b \in \mathbb{R}$$



f costante in $\mathbb{R}$ per $P(0, b)$

Esempio.

Verificare se il punto $P = (1,4)$ appartiene alla retta r di equazione $y = 3x + 1$

.

Esempio.

Verificare se il punto $P = (1,4)$ appartiene alla retta r di equazione $y = 3x + 1$

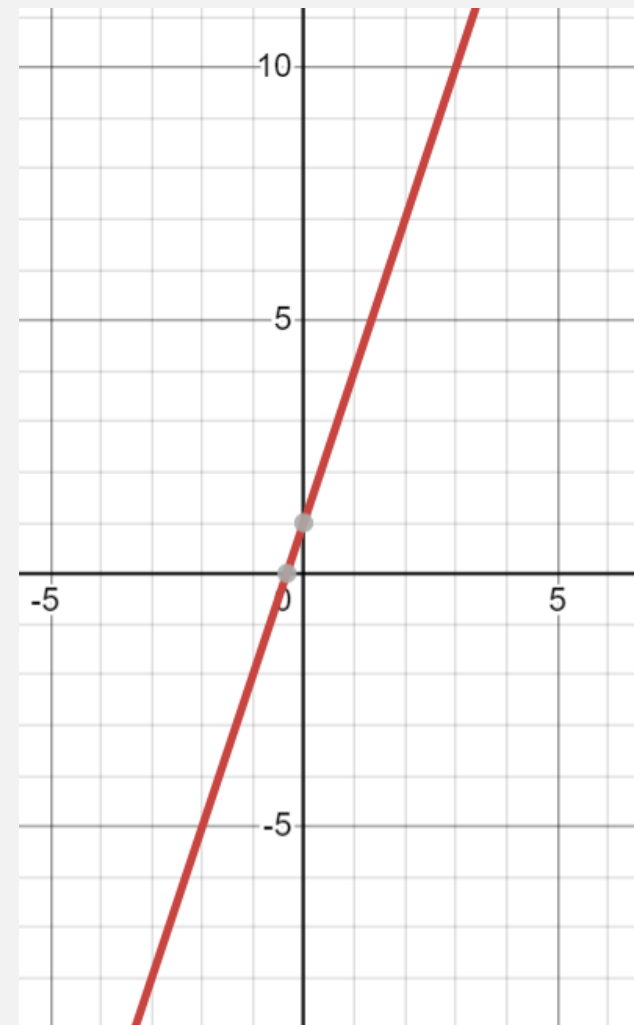
Soluzione.

Se il punto P appartiene alla retta r , le sue coordinate verificano l'equazione di r . Andiamo perciò a sostituire le coordinate di P all'interno dell'equazione e verifichiamo se sussiste l'identità.

$$y = 3x + 1 \rightarrow 4 = 3 \cdot 1 + 1 \rightarrow 4 = 4$$

Il punto P appartiene alla retta r

A partire dall'espressione analitica di una funzione lineare è possibile tracciare il suo grafico individuando due suoi punti.



Viceversa, conoscendo le coordinate cartesiane di due punti appartenenti al grafico di una funzione lineare oppure le coordinate cartesiane di un solo punto ed il coefficiente angolare, è possibile determinare l'espressione analitica di una funzione lineare

- se $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ appartengono al grafico di una funzione lineare, la sua espressione analitica è:

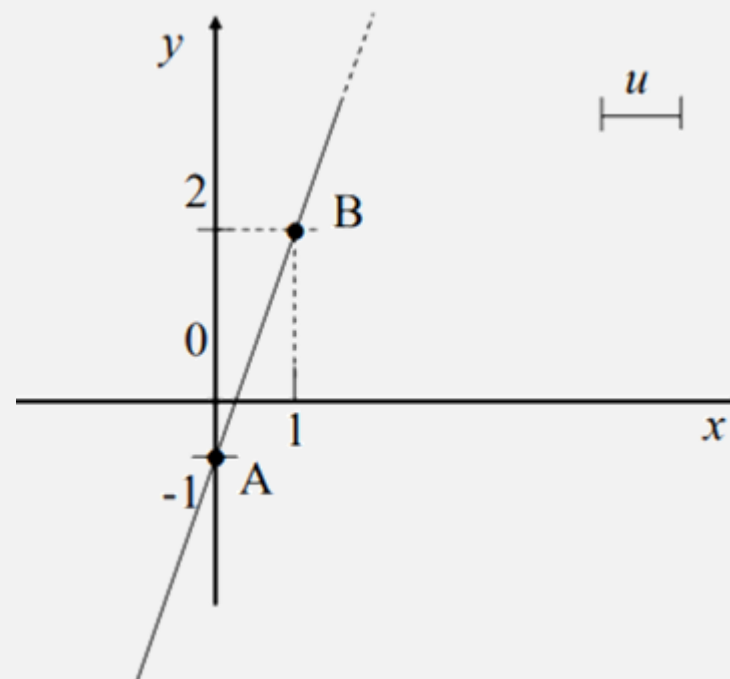
$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \quad \text{con } y_2 \neq y_1 \text{ e } x_2 \neq x_1$$

- se $P(x_1, y_1)$ appartiene al grafico della funzione lineare (retta non parallela all'asse delle ordinate) ed m è il coefficiente angolare, la sua espressione analitica è:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Esempio.

Determinare l'espressione analitica della funzione avente come grafico la retta passante per il punto $B(1,2)$ e di coefficiente angolare $m = 3$ e rappresentarla graficamente.

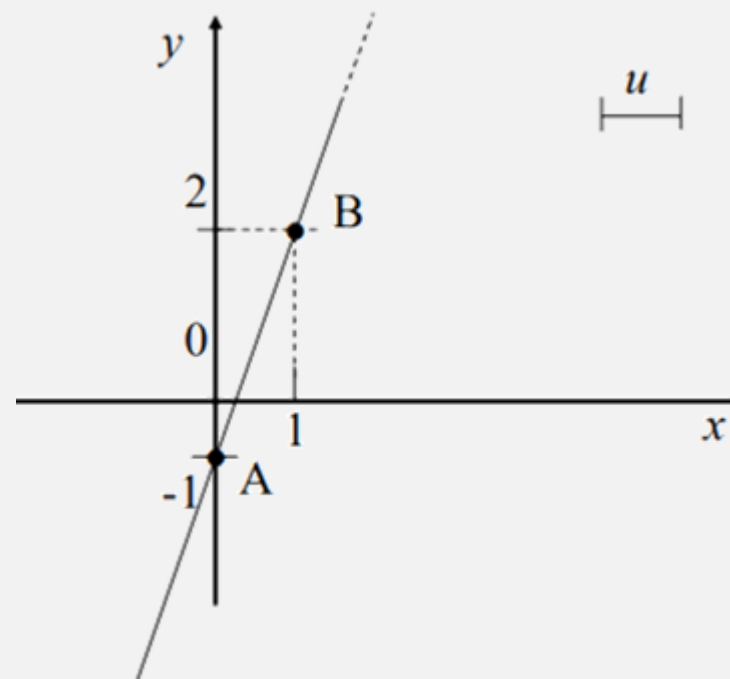


Esempio.

Determinare l'espressione analitica della funzione avente come grafico la retta passante per il punto $B(1,2)$ e di coefficiente angolare $m = 3$ e rappresentarla graficamente.

Dalla formula $y - y_1 = m(x - x_1)$ segue che l'espressione analitica richiesta è:

$$\begin{aligned} y - 2 &= 3(x - 1) \rightarrow y - 2 = 3x - 3 \rightarrow y \\ &= 3x - 3 + 2 \rightarrow y = 3x - 1 \end{aligned}$$



Due particolari funzioni lineari sono le funzioni che hanno come grafico le **bisettrici**.

- Tutti i punti che si trovano sulla bisettrice del I e III quadrante hanno ascissa e ordinata uguali.
- Tutti i punti che si trovano sulla bisettrice del II e IV quadrante hanno ascissa e ordinata opposte

Bisettrice del I e III quadrante

$$f(x) = x$$



$$m = 1 \text{ e } q = 0$$

f strettamente crescente

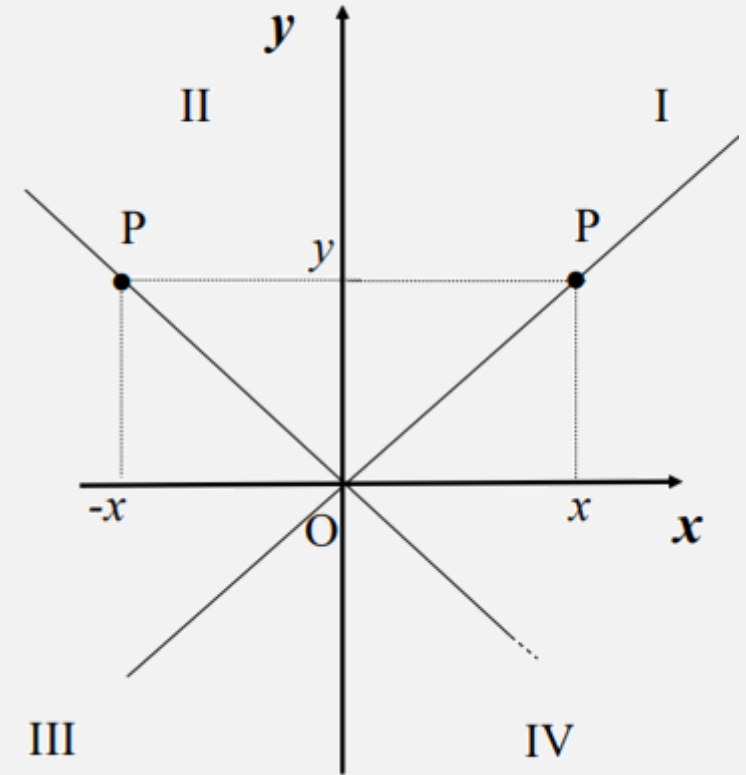
Bisettrice del II e IV quadrante

$$f(x) = -x$$



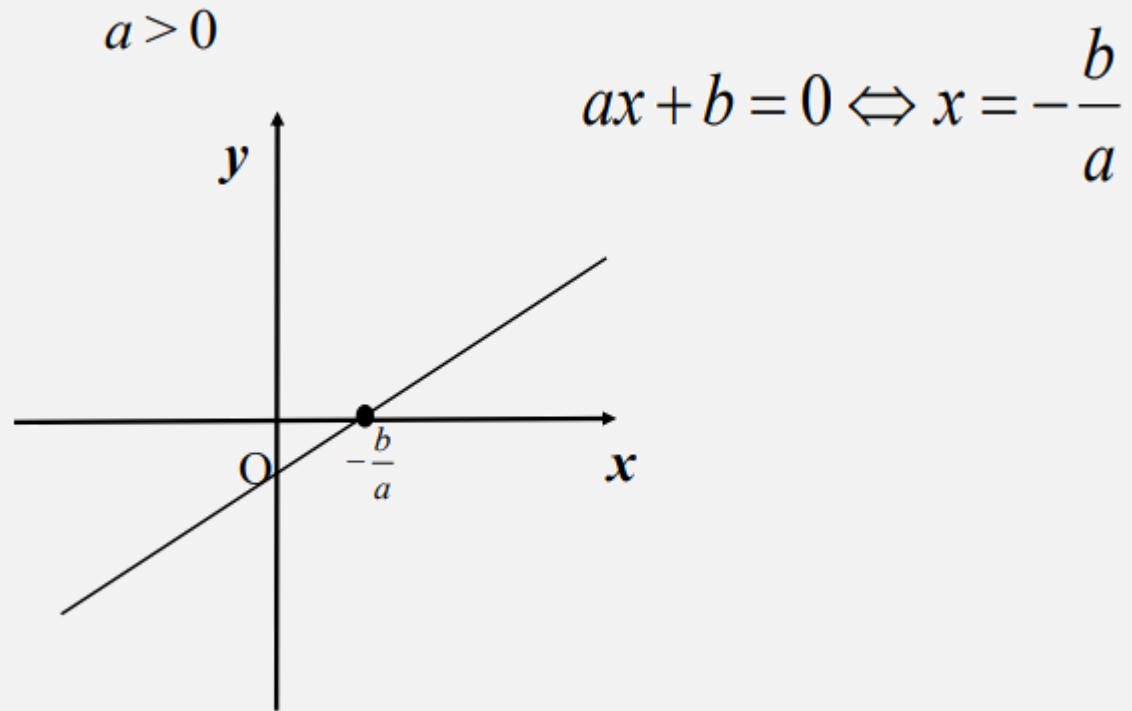
$$m = -1 \text{ e } q = 0$$

f strettamente decrescente



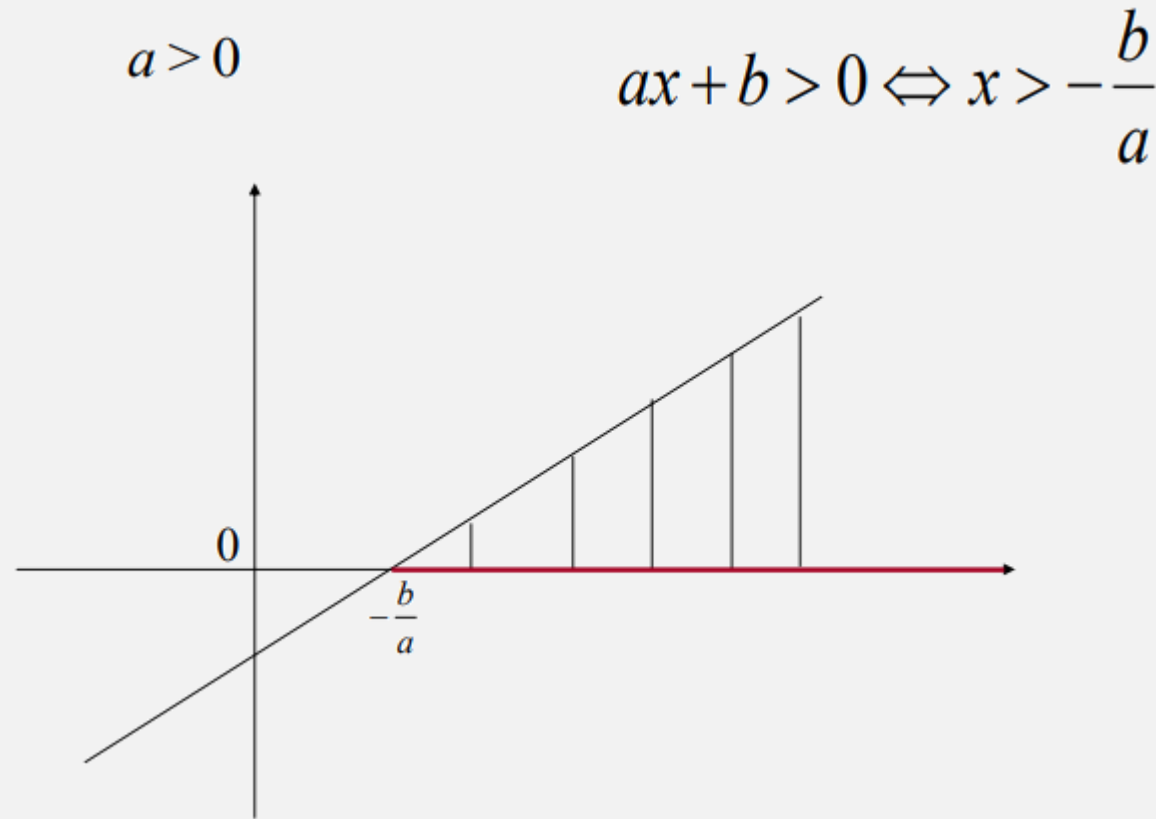
Risoluzione grafica di un'equazione di I grado

Risolvere graficamente un'equazione di I grado del tipo $ax + b = 0$ con $a, b \in \mathbb{R}$ vuol dire determinare i punti di intersezione fra l'asse delle ascisse e il grafico della funzione lineare $f(x) = ax + b$ avente per grafico una retta del piano di coefficiente angolare a e ordinata all'origine b



Risoluzione grafica di una disequazione di I grado

Risolvere graficamente una disequazione di I grado del tipo $ax + b > 0$ con $a, b \in \mathbb{R}$ vuol dire determinare le ascisse dei punti del grafico della funzione lineare $f(x) = ax + b$ che si trovano sopra l'asse delle ascisse



- **FUNZIONI ELEMENTARI**
 - **Funzione potenza**

Funzione potenza

Categorie:

1. Funzione potenza ad esponente naturale
 - Esponente naturale pari
 - Esponente naturale dispari

2. Funzione radice ennesima (esponente razionale)
 - Esponente razionale con base pari
 - Esponente razionale con base dispari

3. Funzione potenza ad esponente reale
 - $b > 0$
 - $b < 0$

Funzione potenza ad esponente naturale

$$f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N} \text{ fissato}$$

$f : x \in \mathbb{R} \rightarrow x^n \in \text{codominio che varia a seconda di } n$

x è la **base** della funzione potenza e varia nel dominio

n è l'**esponente** della funzione potenza e viene fissato

base positiva $\rightarrow$ qualunque esponente

base negativa $\rightarrow$ esponente intero o razionale (frazione) con denominatore dispari

Funzione potenza ad esponente naturale pari

$$f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N} \text{ fissato e pari}$$

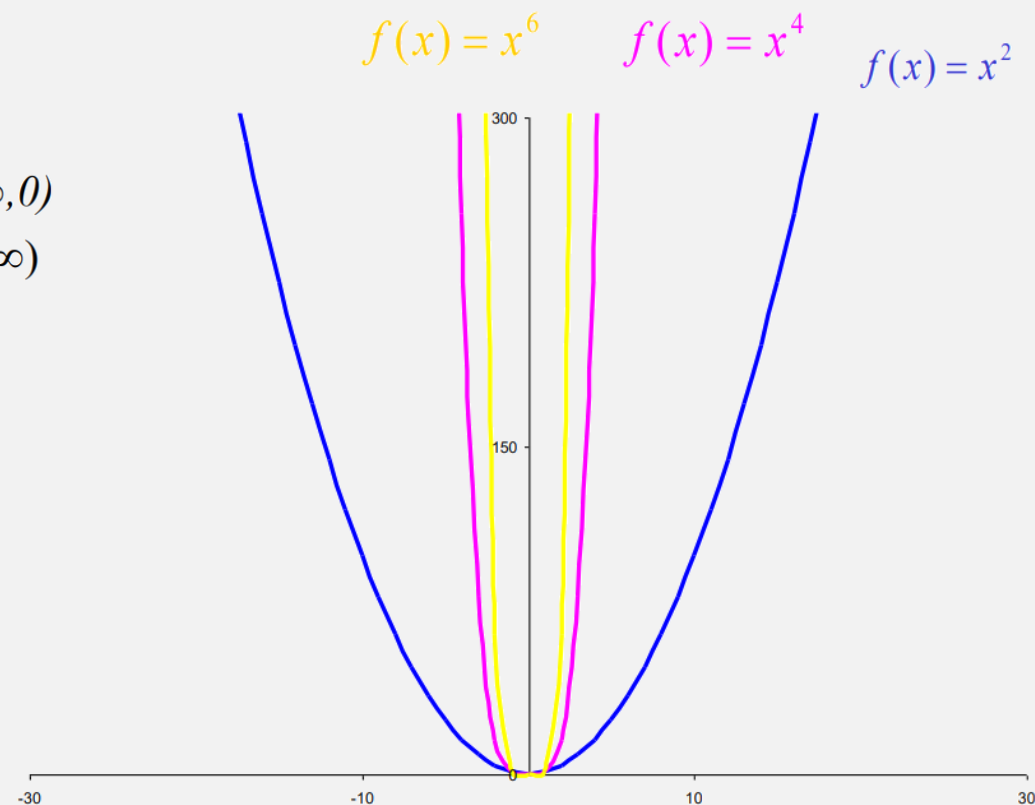
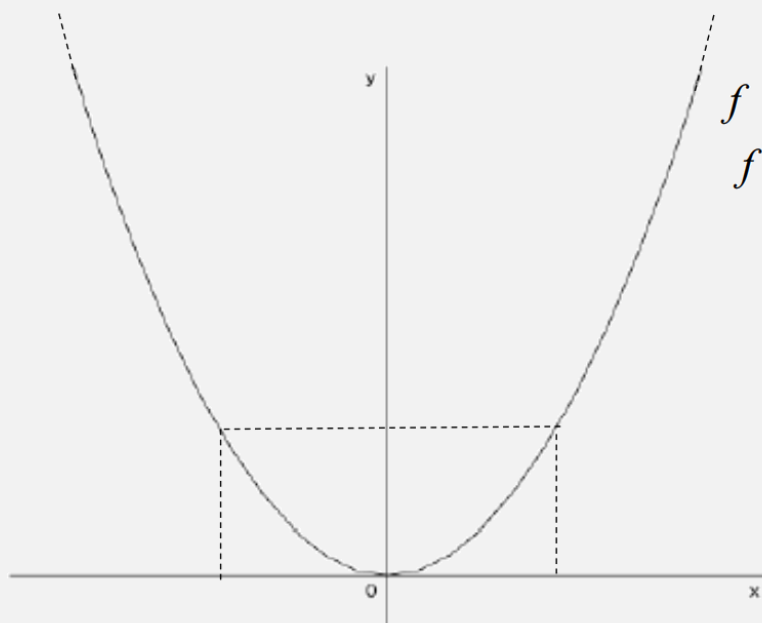
$$f : x \in \mathbb{R} \rightarrow x^n \in [0, +\infty)$$

f strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$

f strettamente crescente in $(0, +\infty)$

$$f \text{ pari} : x^n = (-x)^n$$

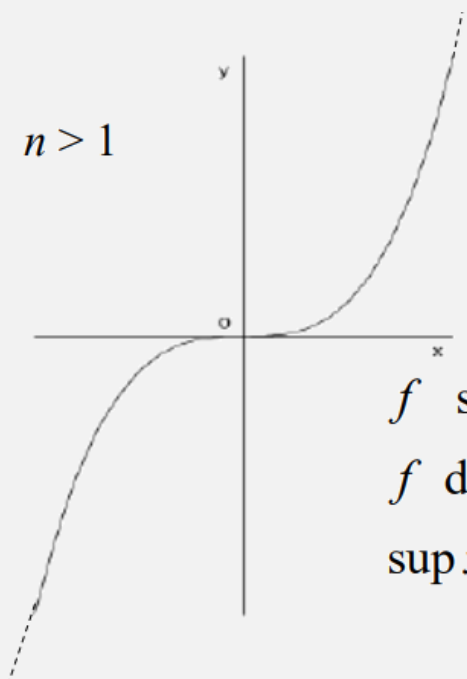
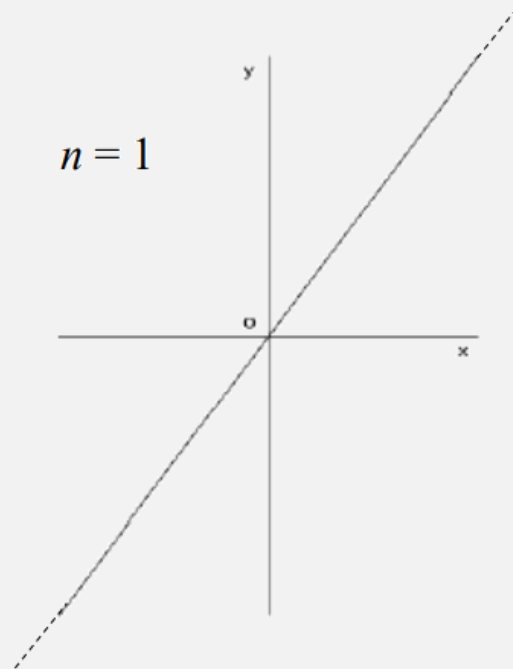
$$\sup x^n = +\infty; \inf x^n = 0$$



Funzione potenza ad esponente naturale dispari

$$f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N} \text{ fissato e dispari}$$

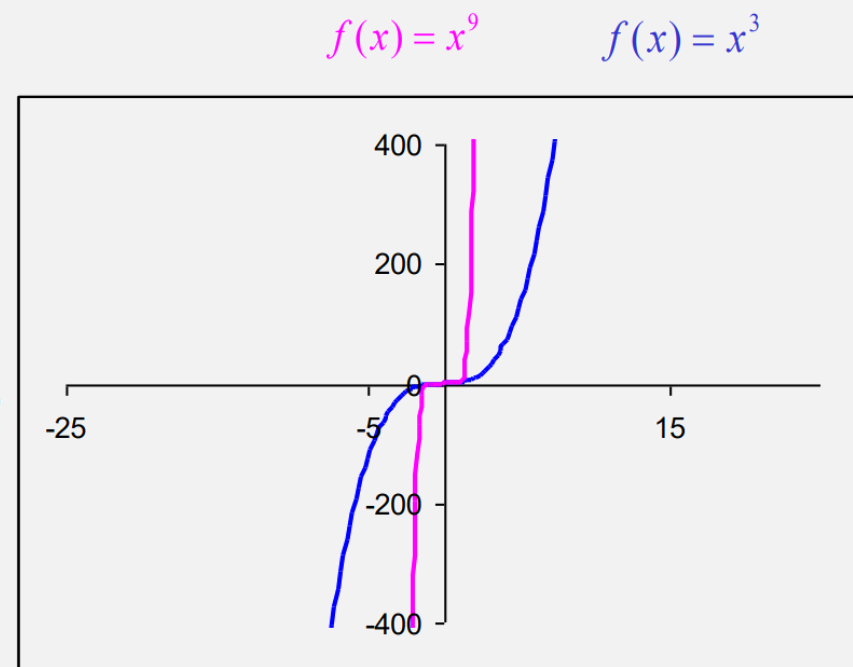
$$f : x \in \mathbb{R} \rightarrow x^n \in \mathbb{R}$$



f strettamente crescente in $\mathbb{R}$

f dispari: $-x^n = (-x)^n$

$\sup x^n = +\infty; \inf x^n = -\infty$



- **FUNZIONI ELEMENTARI**
 - **Funzione esponenziale**

Funzione esponenziale

$$f(x) = a^x, a \in \mathbb{R} \text{ fissato}, a > 0, a \neq 1$$

$$f : x \in \mathbb{R} \rightarrow a^x \in (0, +\infty)$$

a è la **base** della funzione esponenziale e viene fissato

x è l'**esponente** della funzione esponenziale e varia nel dominio

La funzione esponenziale è **sempre positiva**

Funzione esponenziale $a > 1$

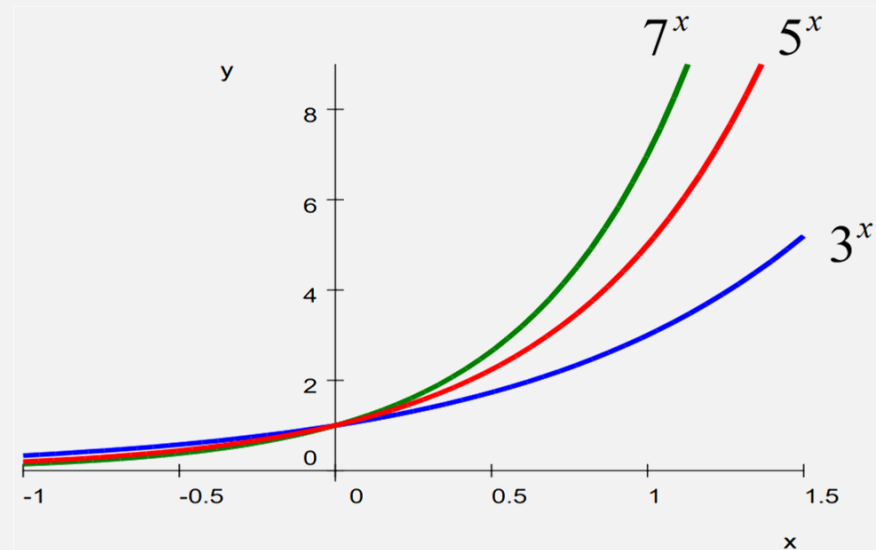
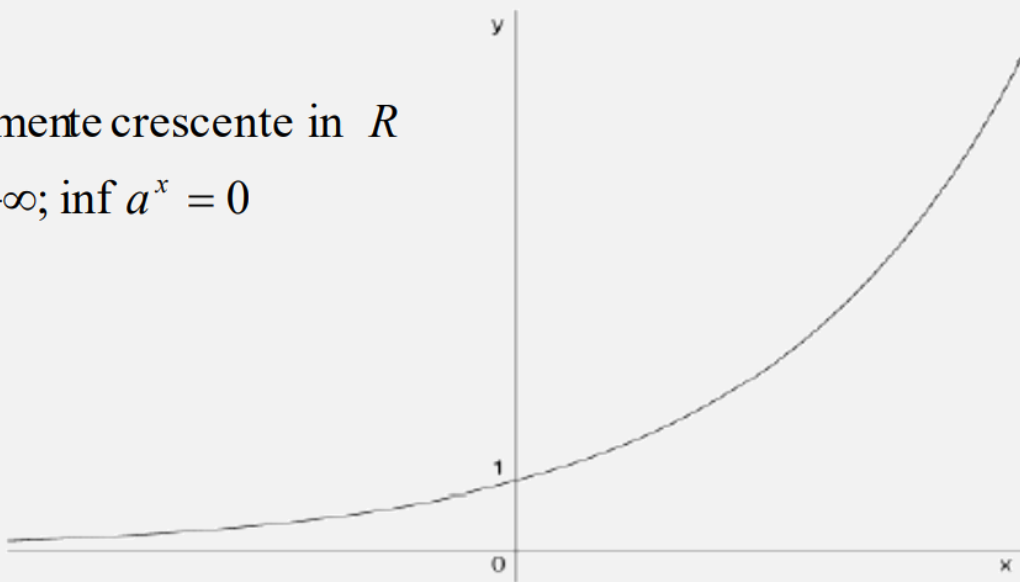
$$f(x) = a^x, a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$$

caso $a > 1$

$$f : x \in \mathbb{R} \rightarrow a^x \in (0, +\infty)$$

f strettamente crescente in $\mathbb{R}$

$$\sup a^x = +\infty; \inf a^x = 0$$

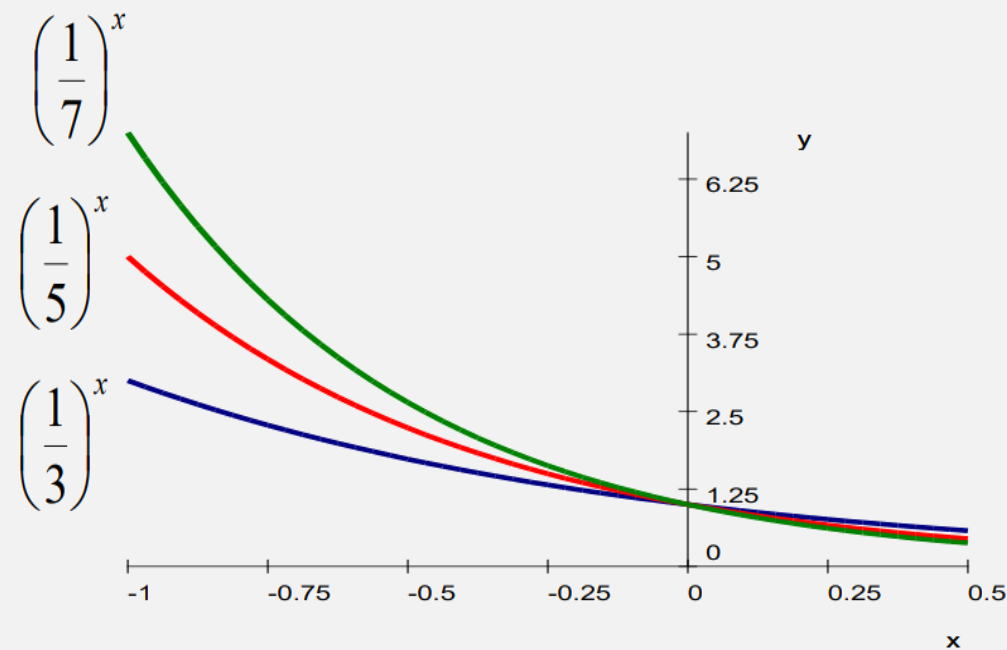
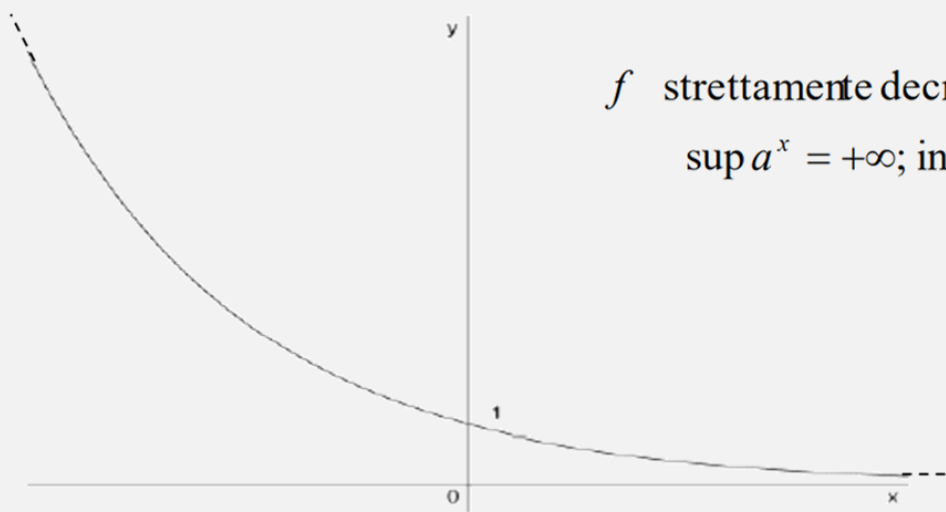


Funzione esponenziale $0 < a < 1$

$$f(x) = a^x, a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$$

caso $0 < a < 1$

$$f : x \in \mathbb{R} \rightarrow a^x \in (0, +\infty)$$



Funzione esponenziale con base e

Una funzione esponenziale molto utilizzata è quella che ha per base il numero irrazionale

$$e = 2.7182$$

detto numero di Nepero

La funzione esponenziale $f(x) = e^x$ è una funzione strettamente crescente poiché $e > 1$

Funzione esponenziale: proprietà

$$1. a^0 = 1, \forall a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$$

$$2. a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}, \forall a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

$$3. (a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2}, \forall a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

$$4. a^x > 0, \forall a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$5. \text{ se } a > 1 \text{ e } x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

$$6. \text{ se } 0 < a < 1 \text{ e } x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

- **FUNZIONI ELEMENTARI**
 - **Funzione logaritmo**

Funzione logaritmo

$$f(x) = \log_a x, a \in \mathbb{R} \text{ fissato}, a > 0, a \neq 1$$

$$f : x \in (0, +\infty) \rightarrow \log_a x \in \mathbb{R}$$

a è la **base** della funzione logaritmo e viene fissata

x è l'**argomento** della funzione logaritmo e varia nel dominio

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$$

Il logaritmo è la funzione inversa dell'esponenziale:

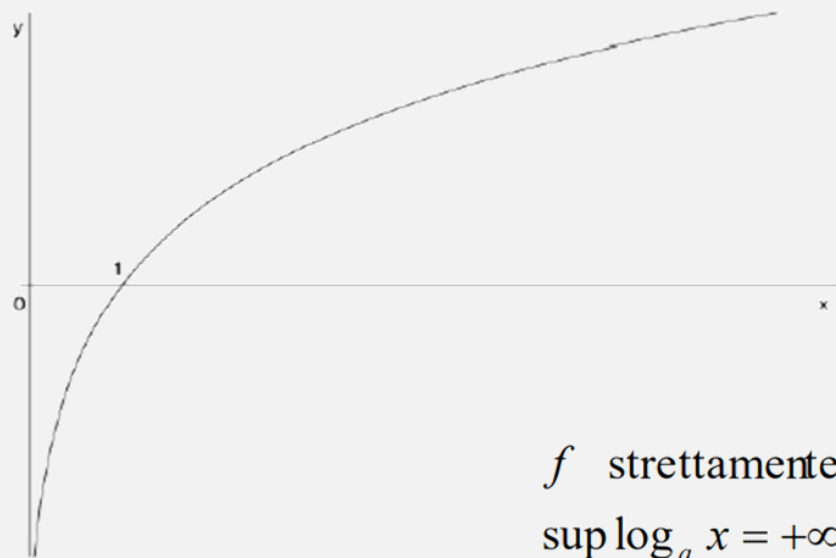
$$x = a^{\log_a x} \quad x = \log_a(a^x)$$

Funzione logaritmo con $a > 1$

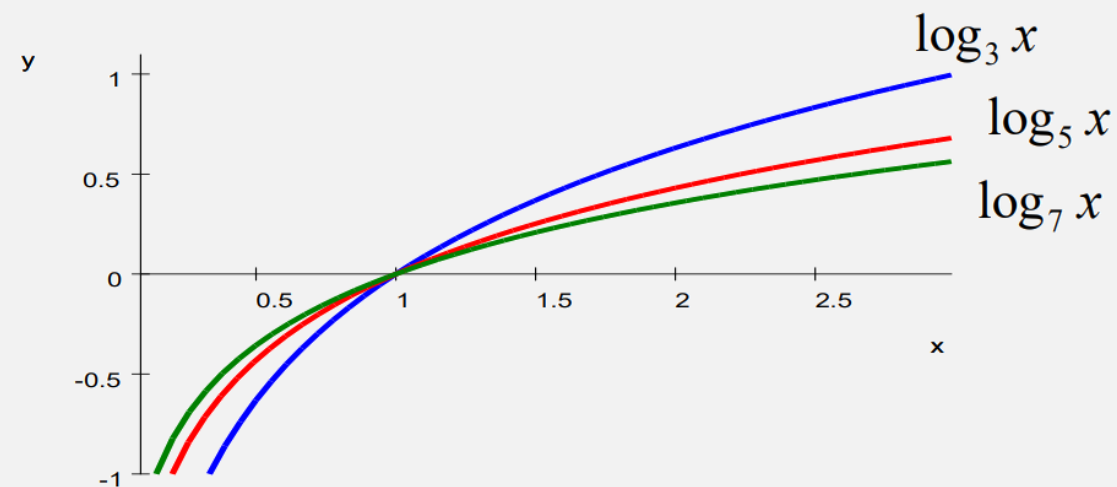
$$f(x) = \log_a x, a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$$

caso $a > 1$

$$f : x \in (0, +\infty) \rightarrow \log_a x \in \mathbb{R}$$



f strettamente crescente in $(0, +\infty)$
 $\sup \log_a x = +\infty; \inf \log_a x = -\infty$

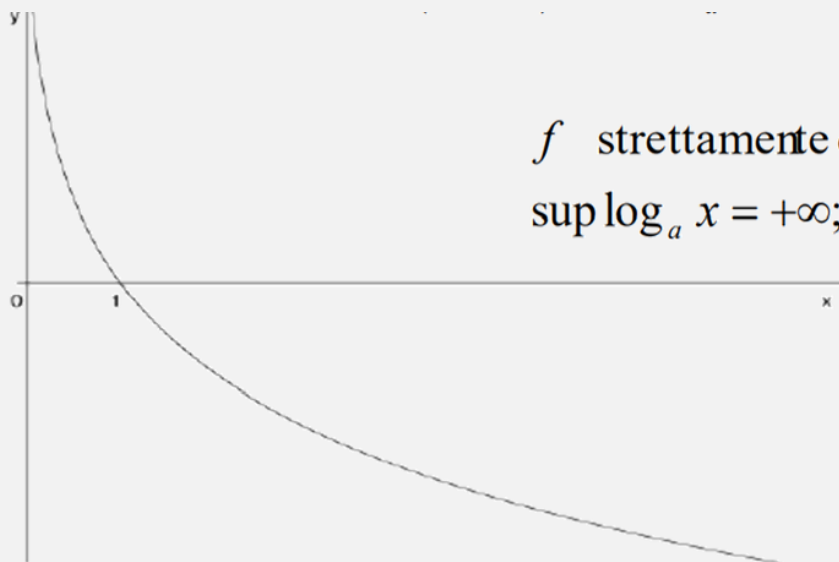


Funzione logaritmo con $0 < a < 1$

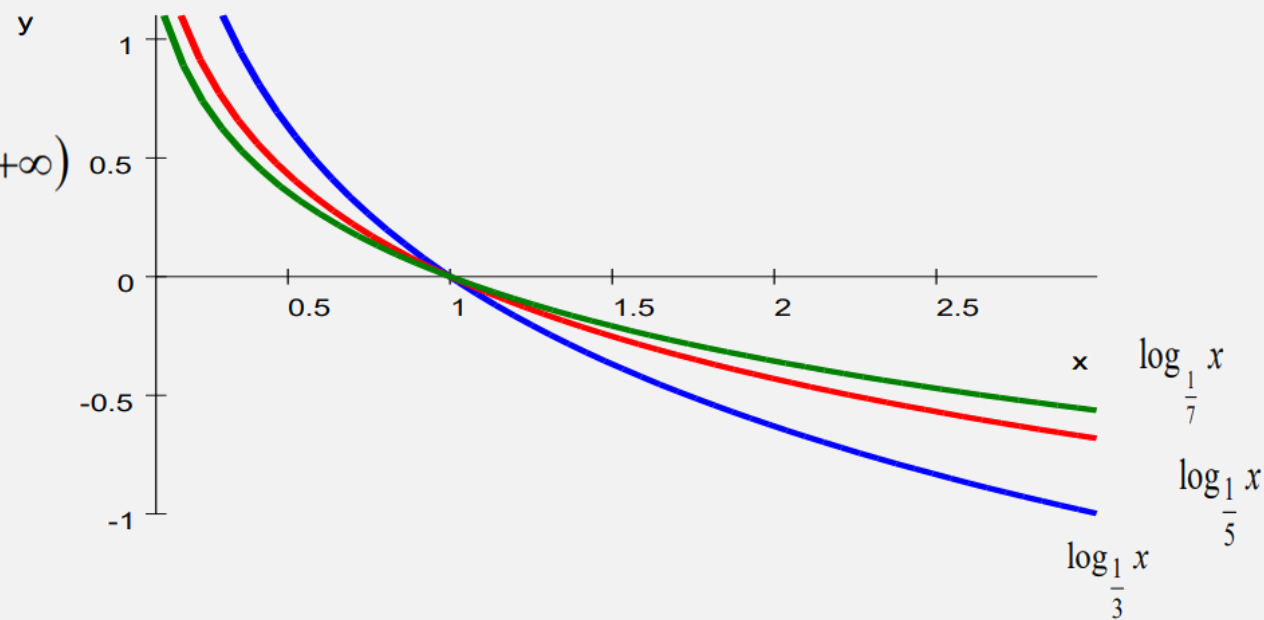
$$f(x) = \log_a x, a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$$

caso $0 < a < 1$

$$f : x \in (0, +\infty) \rightarrow \log_a x \in \mathbb{R}$$



f strettamente decrescente in $(0, +\infty)$
 $\sup \log_a x = +\infty; \inf \log_a x = -\infty$



Funzione logaritmo con base e

Una funzione esponenziale molto utilizzata è quella che ha per base il numero irrazionale

$$e = 2.7182$$

detto numero di Nepero

La funzione esponenziale $f(x) = \log_e x$ è una funzione strettamente crescente poiché $e > 1$

$$f(x) = \log_e x = \log x = \ln x$$

Funzioni esponenziale e logaritmo

La funzione logaritmo è l'inversa della funzione esponenziale (e viceversa). Ciò vuol dire che, se:

$$y = a^x \text{ dove } a \text{ è la base dell'esponenziale}$$

⇓

$$x = \log_a y \text{ dove } a \text{ è la base del logaritmo}$$

Quindi, affermare che $x = \log_a y$ equivale a dire che x è l'esponente da dare alla base del logaritmo per avere l'argomento

$$\log_e 1 = x \quad e^x = 1 \quad x = 0$$

$$\log_2 8 = x \quad 2^x = 8 \quad x = 3$$

$$\log_4 2 = x \quad 4^x = 2 \quad x = 1/2$$

$$\log_3 \frac{1}{3} = x \quad 3^x = 1/3 \quad x = -1$$

$$\text{Log}_{10} 0 = x \quad 10^x = 0 \quad x = \text{non esiste}$$

Funzioni esponenziale e logaritmo

La funzione logaritmo e la funzione esponenziale sono l'una l'inversa dell'altra.

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad e \quad f(f^{-1}(x)) = x$$

quindi

$$a^{\log_a x} = x \quad e \quad \log_a a^x = x$$

$$\log_e e^x = x$$

$$\log_2 2^{3x} = 3x$$

$$\log_4 4^{x^2} = x^2$$

$$3^{\log_3 2x} = 2x$$

$$\frac{1}{2}^{\log_{\frac{1}{2}} x} = x$$

Funzione logaritmo: proprietà

$$1. \log_a x^b = b \cdot \log_a x \quad \forall x > 0, \forall b \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$$

$$2. \log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \quad \forall x > 0, \forall y > 0, a > 0, a \neq 1$$

$$3. \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \quad \forall x > 0, \forall y > 0, a > 0, a \neq 1$$

$$4. \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \quad a, b > 0, a \neq 1$$

$$5. \log_a x = -\log_{\frac{1}{a}} x$$


$$\log_a x = \frac{\log_{\frac{1}{a}} x}{\log_{\frac{1}{a}} a} = \frac{\log_{\frac{1}{a}} x}{-1} = -\log_{\frac{1}{a}} x$$

Schema riassuntivo del dominio delle funzioni

$y = ax^n + bx + c$	$\forall x \in \mathbb{R}$
$y = \frac{f(x)}{g(x)}$	$g(x) \neq 0$
$y = \sqrt[n]{f(x)}$ $(n \in \mathbb{N}, \text{pari e } \neq 0)$	$f(x) \geq 0$
$y = \sqrt[n]{f(x)}$ $(n \in \mathbb{N}, \text{dispari})$	$\forall x \in \mathbb{R}$
$y = \log_a[f(x)]$	$f(x) > 0$
$y = \log_{g(x)}[f(x)]$	$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ g(x) \neq 1 \end{cases}$
$y = [f(x)]^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{I})$	$f(x) > 0$
$y = f(x)^{g(x)}$	$f(x) > 0$

$y = \sin[f(x)]$	$\forall x \in \mathbb{R}$
$y = \cos[f(x)]$	$\forall x \in \mathbb{R}$
$y = \tan[f(x)]$	$f(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
$y = \operatorname{ctan}[f(x)]$	$f(x) \neq k\pi$
$y = \arcsin[f(x)]$	$-1 \leq f(x) \leq 1$
$y = \arccos[f(x)]$	$-1 \leq f(x) \leq 1$