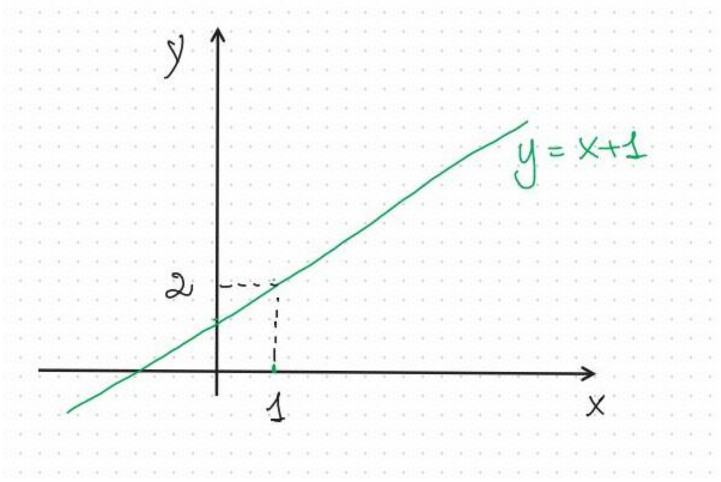
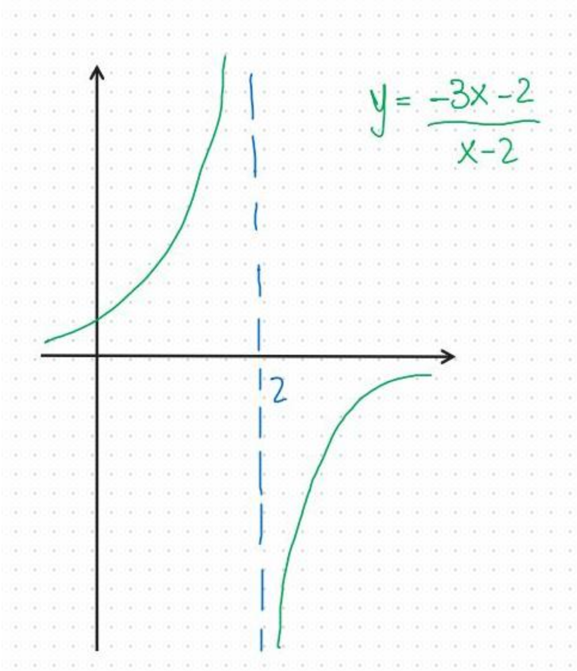
- **LIMITI DI FUNZIONI**

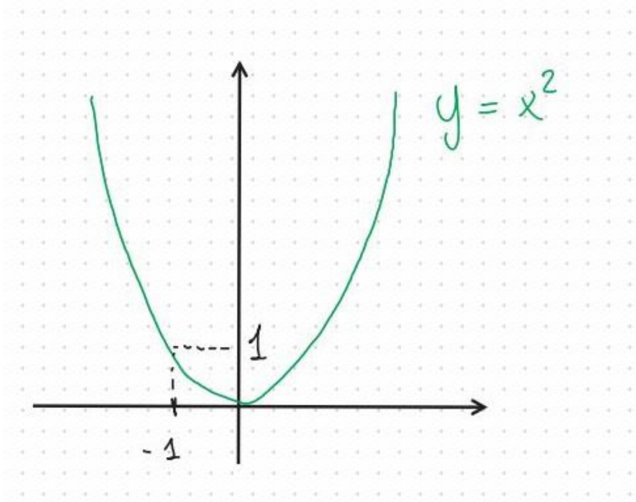
Concetto di limite $\lim_{x \to x_0} f(x) = l\ , con\ l \in \mathbb{R}$



$$\lim_{x \to 1} x + 1 =$$



$$\lim_{x \to 2} \frac{-3x - 2}{x - 2} =$$

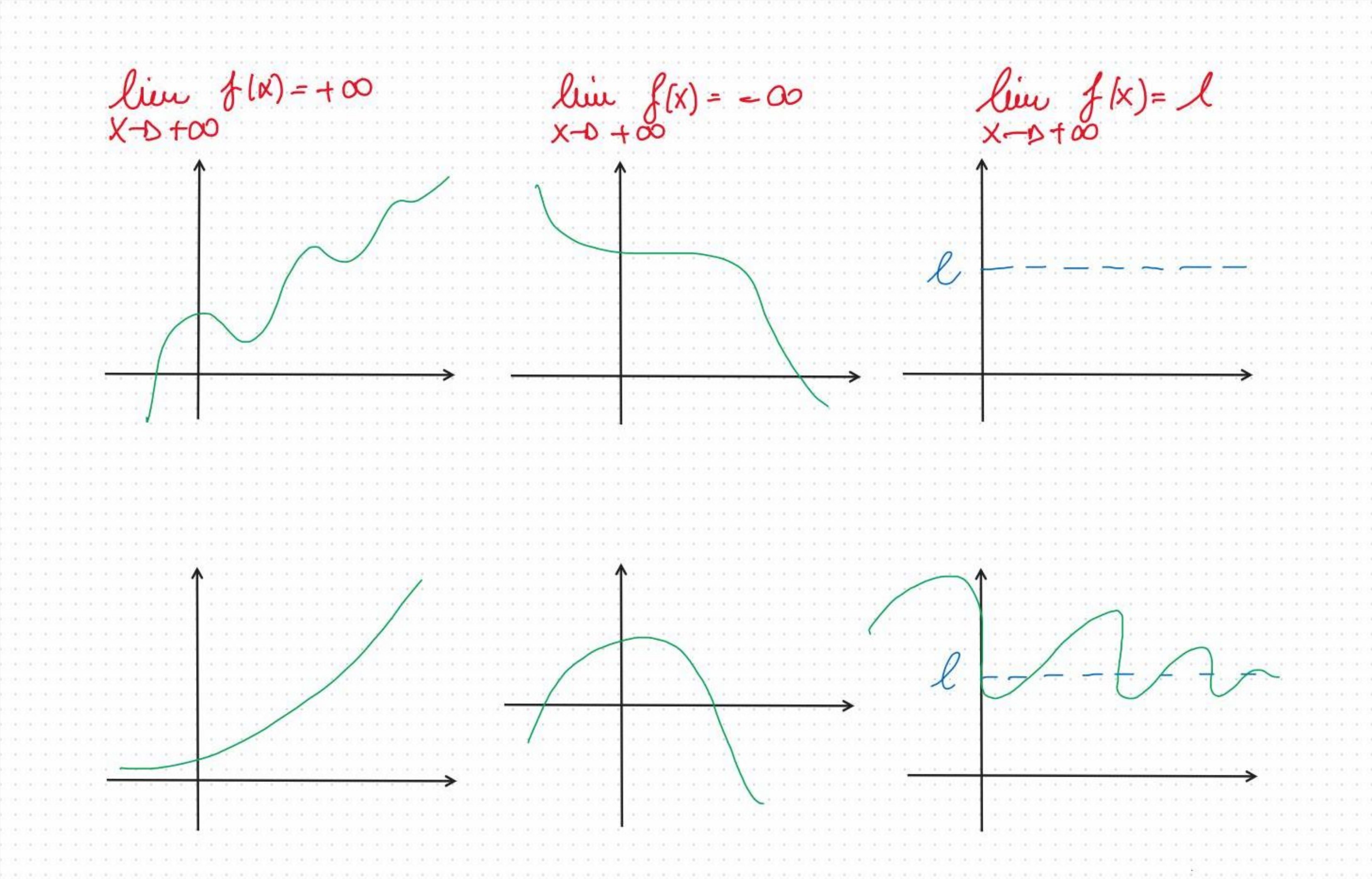


$$\lim_{x \to -1} x^2 =$$

Concetto di limite

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

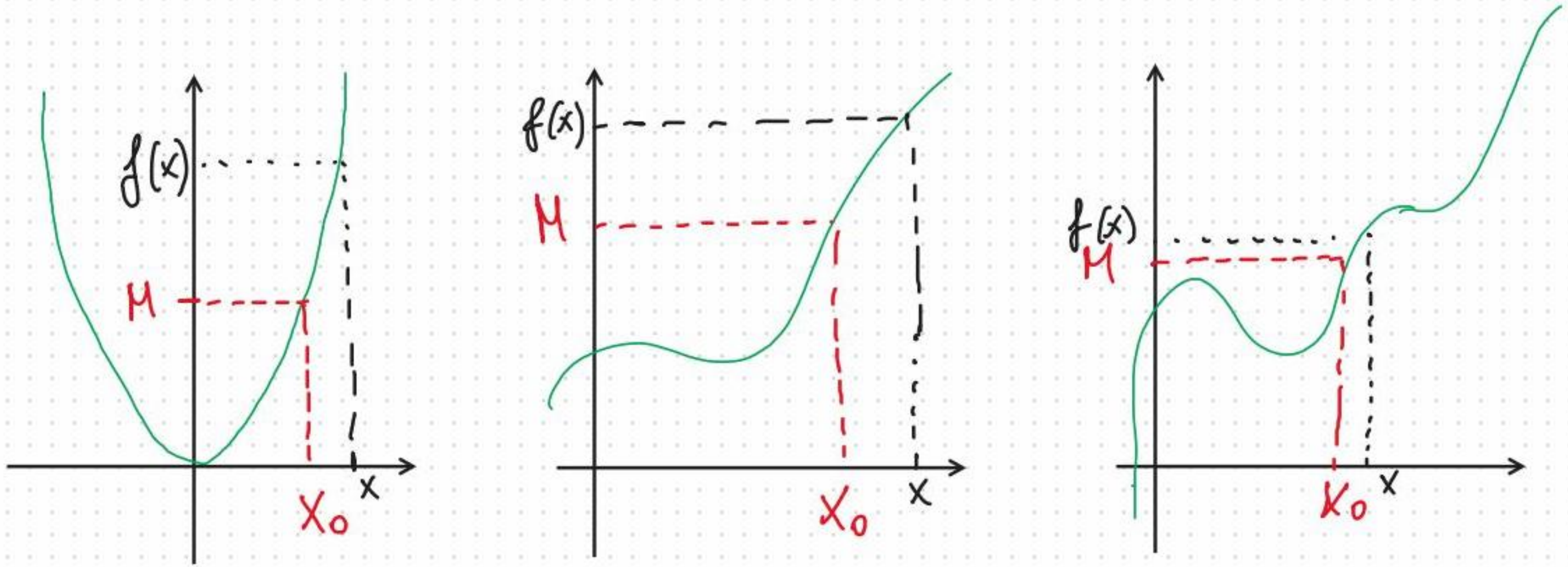
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = k \ , con\ k \in \mathbb{R}$$



Concetto di limite

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = k \ , con\ k \in \mathbb{R}$$



Infiniti e infinitesimi

Sia f un funzione a valori reali definita in un intervallo I (limitato o illimitato) fatta eccezione per un punto $x_0 \in I$ (con x_0 punto al finito o all'infinito),

- Si dice che f è **infinitesima** per $x \to x_0$ oppure $x \to \pm\infty$ se risulta che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \quad oppure \quad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$$

- Si dice che f è **infinita** per $x \to x_0$ oppure $x \to \pm\infty$ se risulta che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \quad oppure \quad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

Intorno di un punto

Def. Dato un numero reale x_0 e un numero reale positivo δ, si chiama intorno di x_0 di ampiezza δ, l'intervallo aperto $I_\delta(x_0)$ di centro x_0:

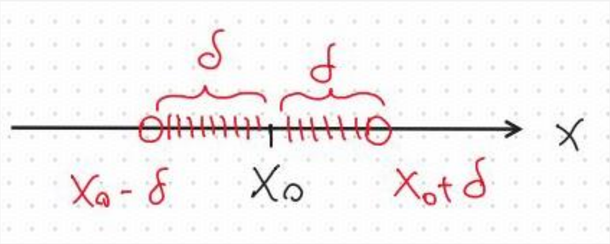
$$I_\delta(x_0) =]x_0 - \delta;\ x_0 + \delta[$$

Poiché l'intorno di x_0 è l'insieme dei punti $x \in \mathbb{R}$ tali che:

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$$

$$-\delta < x - x_0 < \delta$$

Riscriviamo: $I_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta\}$



- **Intorno destro** di x_0 l'intervallo $I_\delta^+(x_0) =]x_0;\ x_0 + \delta[$

- **Intorno sinistro** di x_0 l'intervallo $I_\delta^-(x_0) =]x_0 - \delta;\ x_0[$

Intorno di un punto

Def. Un intervallo è un sottoinsieme di numeri reali che corrisponde a una semiretta (intervallo illimitato) o a un segmento (intervallo limitato) della retta reale r.

Intervalli LIMITATI di estremi *a* e *b*, dove $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathbb{R}$ e $a \ < b$:

- $[a, b] = \{x \in \ \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$: $\boldsymbol{intervello\ chiuso}$
- $]a; b[= \{x \in \ \mathbb{R} \mid a < x < b\}$: $\boldsymbol{intervello\ aperto}$
- $[a, b[= \{x \in \ \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$: $\boldsymbol{intervello\ chiuso\ a\ sinistra\ e\ aperto\ a\ destra}$
- $]a, b] = \{x \in \ \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$: $\boldsymbol{intervello\ chiuso\ a\ destra\ e\ aperto\ \ a\ sinistra}$

a : estremo inferiore
b : estremo superiore

Intorno di un punto

Def. Un intervallo è un sottoinsieme di numeri reali che corrisponde a una semiretta (intervallo illimitato) o a un segmento (intervallo limitato) della retta reale.

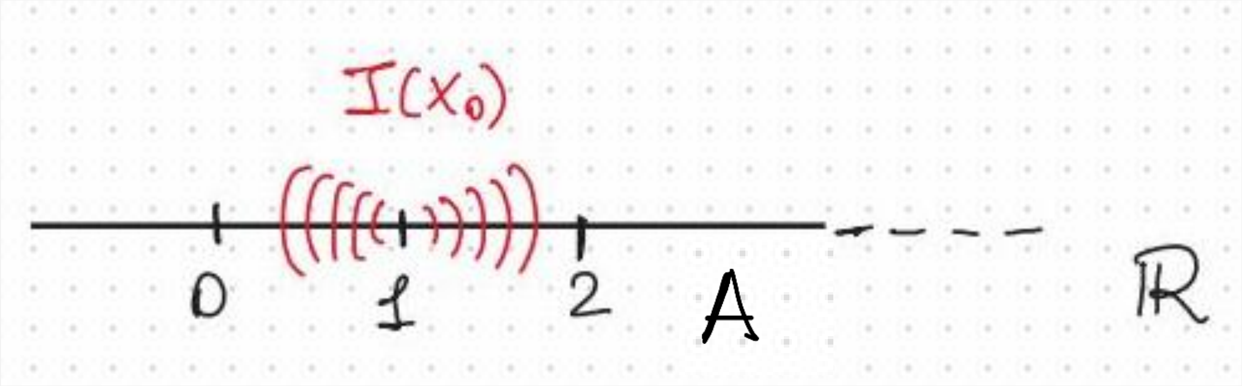
Intervalli ILLIMITATI presentano un solo estremo a $\in \mathbb{R}$:

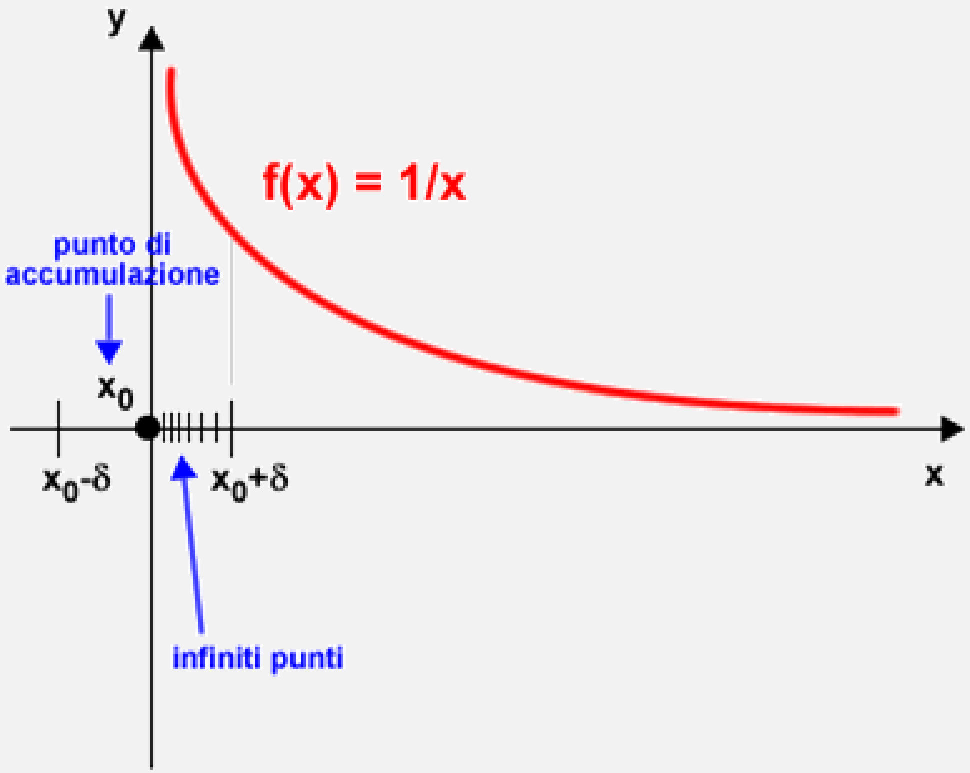
- $[a, +\infty] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$: $\boldsymbol{intervello\ chiuso\ illimitato\ superiormente}$
- $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$: $\boldsymbol{intervello\ aperto\ illimitato\ superiormente}$
- $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$: $\boldsymbol{intervello\ chiuso\ illimitato\ inferiormente}$
- $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$: $\boldsymbol{intervello\ aperto\ illimitato\ inferiormente}$

Punti di accumulazione

Def. Si dice che il numero reale x_0 è un punto di accumulazione di A, sottoinsieme di $\mathbb{R}$, se ogni intorno completo di x_0 contiene infiniti punti di A.

$$\forall\, I(x_0)\ \cap\ \mathbb{X}\ - \{x_0\}\ \neq\ \emptyset$$





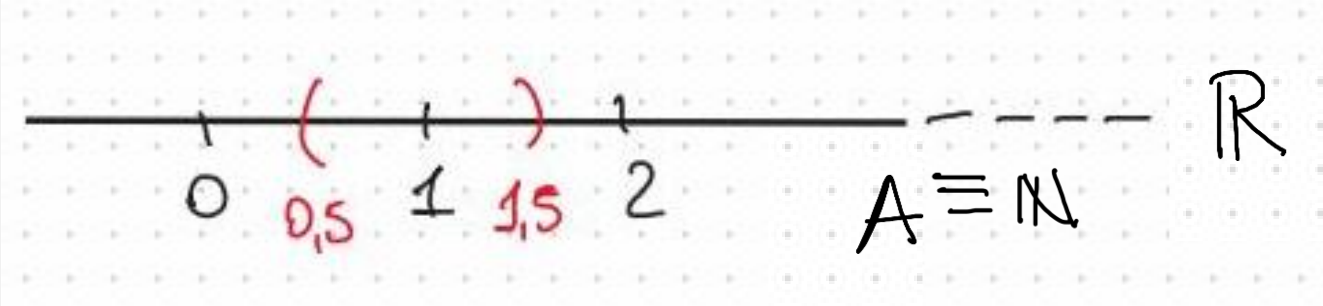
*Diremo che x_0 è punto di accumulazione di A se **ogni** intorno di x_0 contiene almeno un elemento di A diverso da x_0 stesso.*

*Un punto di accumulazione è un punto nel cui intorno cadono **infiniti punti** di I_r distinti dal punto stesso*

Punti isolati

Def. Sia x_0 un numero reale appartenente a un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$. Si dice che x_0 è un punto isolato di A se esiste almeno un intorno I di x_0 che non contiene altri elementi di A, diversi da x_0.

$$\forall\, I(x_0) \cap \mathbb{X} - \{x_0\} = \emptyset$$



Un punto isolato di un insieme A è un punto appartenente all'insieme per il quale esiste almeno un intorno completo del punto stesso tale da non contenere alcun punto dell'insieme A oltre ad x_0

Definizione di limite

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}$ una funzione e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione di A,
Si dice che:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L, \qquad L \in \mathbb{R}$$

Se, $\forall I_\epsilon(L) \ \exists \ I_\delta(x_0) \mid x \in I_\delta(x_0) - \{x_0\} \Longrightarrow f(x) \in I_\epsilon(L)$

- Non è importante sapere cosa fa la funzione esattamente in x_0, poichè la stiamo studiando in Valori prossimi a x_0.
- L'intorno può essere scelto arbitrariamente, quindi possiamo considerare un δ qualsiasi.

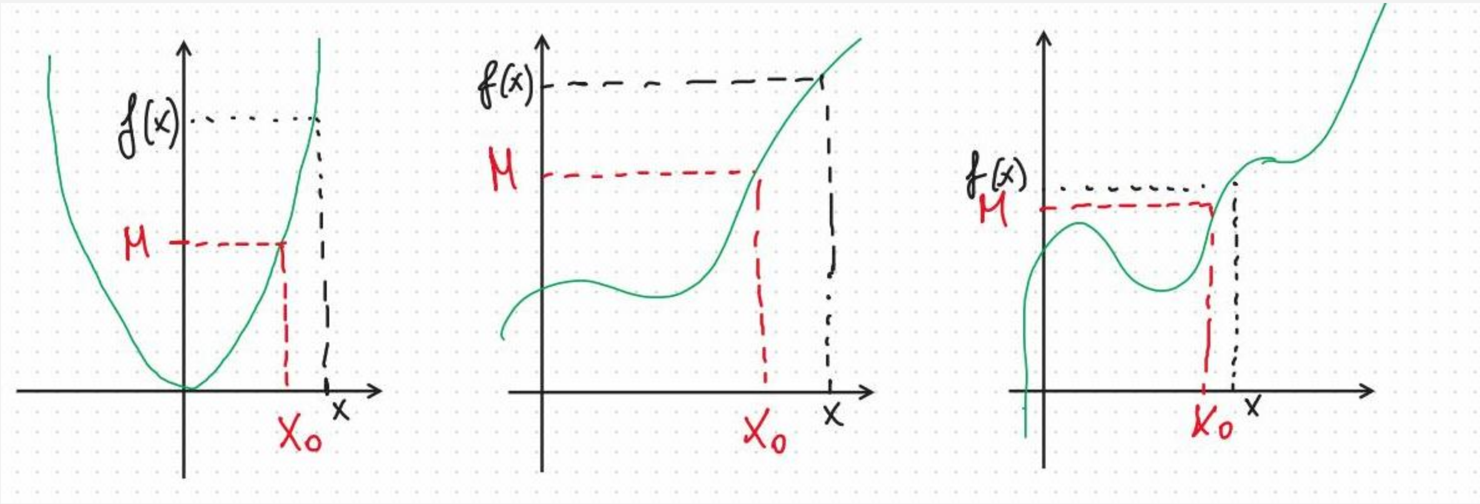
Definizione di limite

$f: A \subseteq \mathbb{R}$

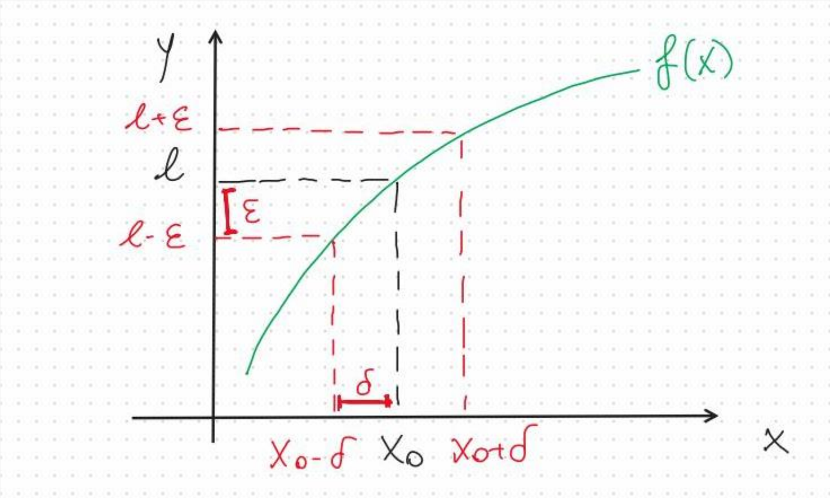
Si dice che:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

Se, $\forall M > 0 \;\; \exists \;\; k > 0 \;\; | \; x \in \;]k; +\infty[\;\; \Longrightarrow f(x) > \mathrm{M}$

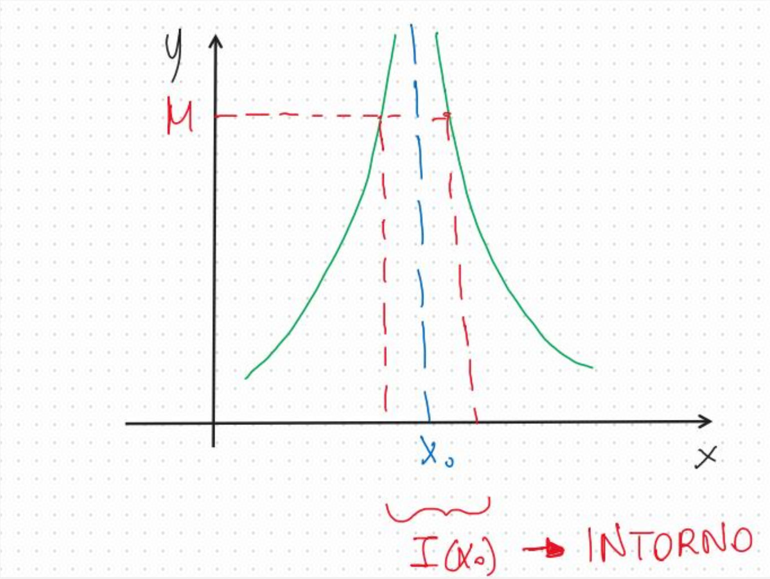


Definizione di limite



$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \text{ , con } l \in \mathbb{R}$$

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \, \delta > 0 :$$
$$\forall \, x \in \,]x_0 - \delta; x_0 + \delta[\, - \{x_0\} \Rightarrow$$
$$l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon$$
$$|f(x) - l| < \epsilon$$



$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$$

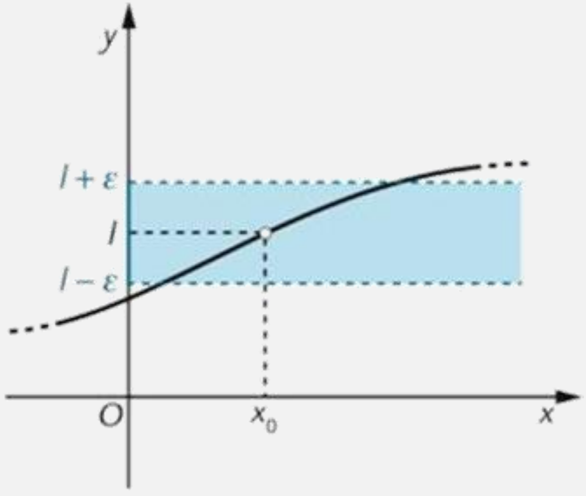
$$\forall \, M > 0 \; \exists \, I(x_0) :$$
$$\forall \, x \in I(x_0) - \{x_0\} \Rightarrow$$
$$f(x) > M, oppure \; f(x) < -M$$
$$|f(x)| > M$$

➢ Limite finito calcolato in un punto finito: $L, x_0 \in \mathbb{R}$ $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

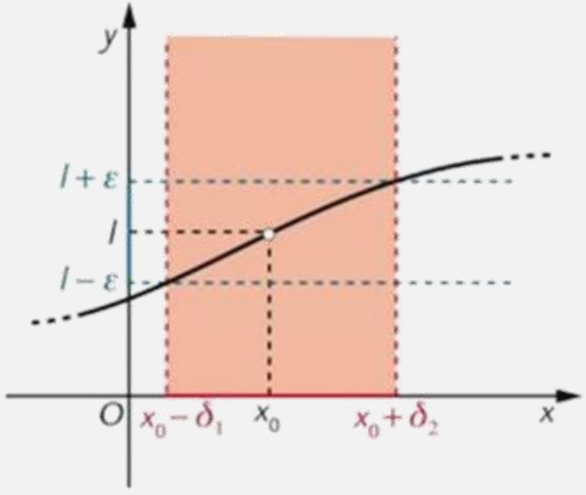
Sia una funzione $f(x)$ una funzione definita in un intervallo (a, b) escluso un punto x_0, si dice che la funzione $f(x)$ per x che tende a x_0 ha per limite il numero L, quando in corrispondenza di un numero arbitrario positivo ε, si può sempre determinare un intorno completo del punto x_0 tale che, per ogni x di tale intorno, risulti soddisfatta la disequazione:

$$|f(x) - L| < \varepsilon \rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

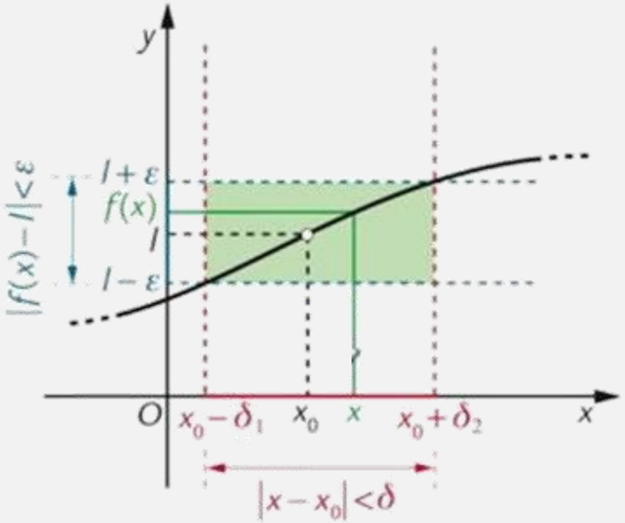
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \, I_{x0} : \; \forall x \in I_{x0} - \{x_0\} \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$



a. Per ogni $\varepsilon > 0$ (con la scelta di ε scegliamo un arbitrario intorno di l sull'asse y)...



b. ... esiste $\delta > 0$ (il quale individua un opportuno intorno di x_0 sull'asse x)...

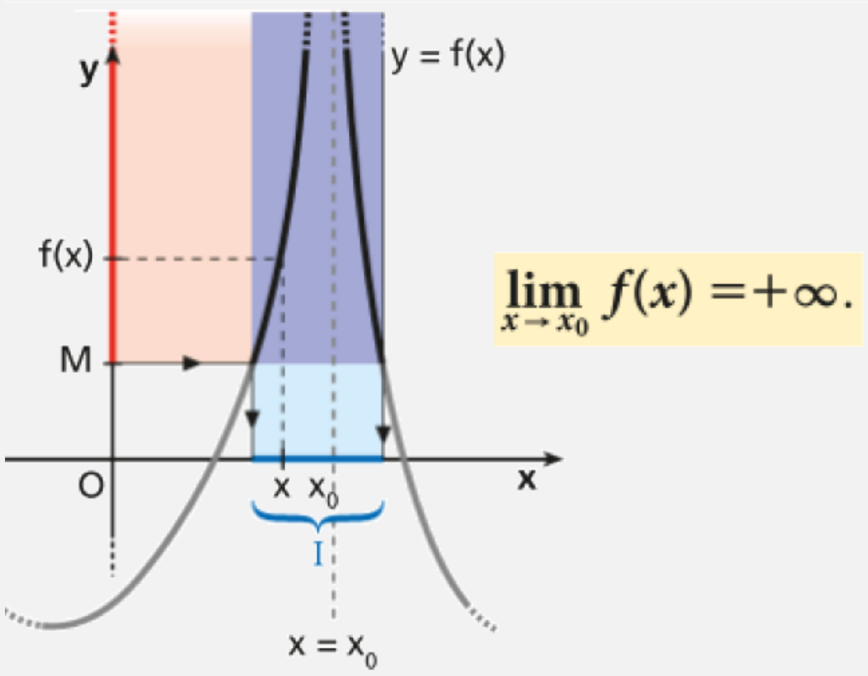


c. ... tale che per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ con $x \neq x_0$ risulta: $f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$.

Limite infinito calcolato in un punto finito: $L = \infty, x_0 \in \mathbb{R}$ $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$

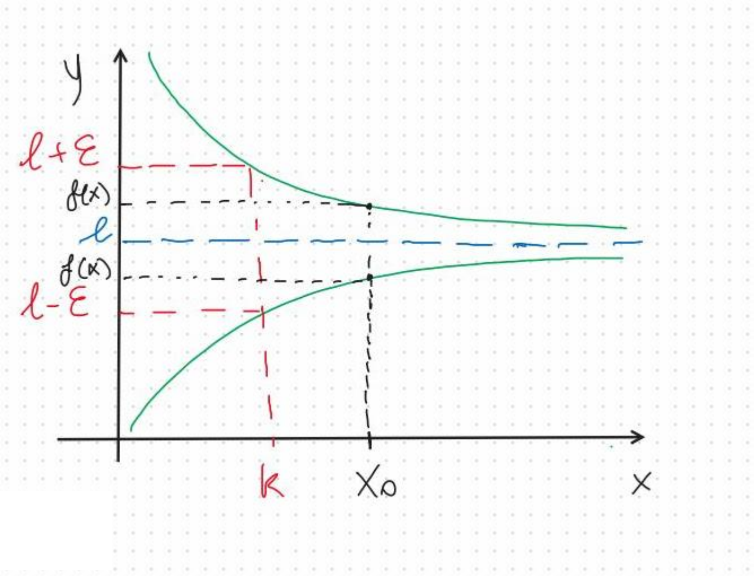
Sia una funzione $f(x)$ una funzione definita in un intervallo (a, b) escluso un punto x_0, si dice che la funzione $f(x)$ per x che tende a x_0 ha per limite ∞, quando in corrispondenza di un numero arbitrario positivo M, si può sempre determinare un intorno completo del punto x_0 tale che, per ogni x di tale intorno, risulti soddisfatta la disequazione:

$$|f(x)| > M$$



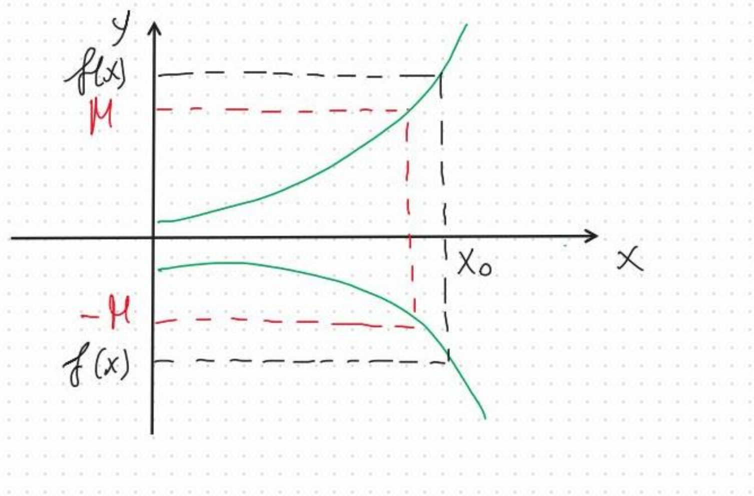
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall n > 0\ \exists\ I_{x0} :\ \forall x \in I_{x0} - \{x_0\} \Longrightarrow |f(x) - L| > M$$

Definizione di limite



$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = k \text{ , } con\ k \in \mathbb{R}$$

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, k > 0:$$
$$\forall\, x > k \Rightarrow$$
$$l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon$$
$$|f(x) - l| < \epsilon$$

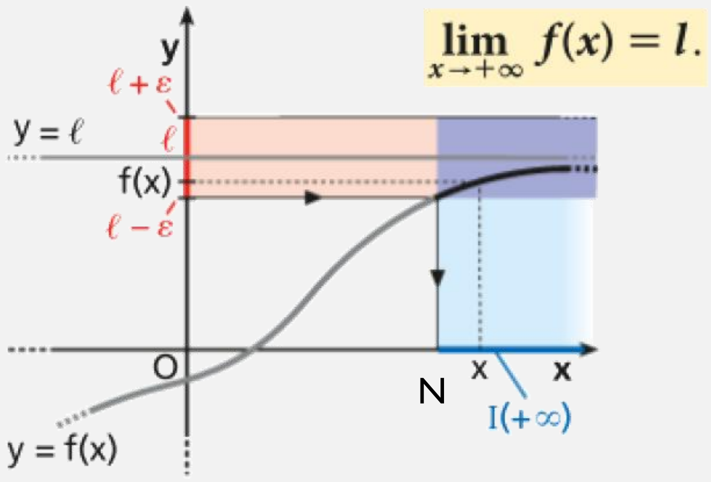


$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

$$\forall\, M > 0\ \exists\ k > 0:$$
$$\forall\, x > k \Rightarrow$$
$$f(x) > M, oppure\ f(x) < -M$$
$$|f(x)| > M$$

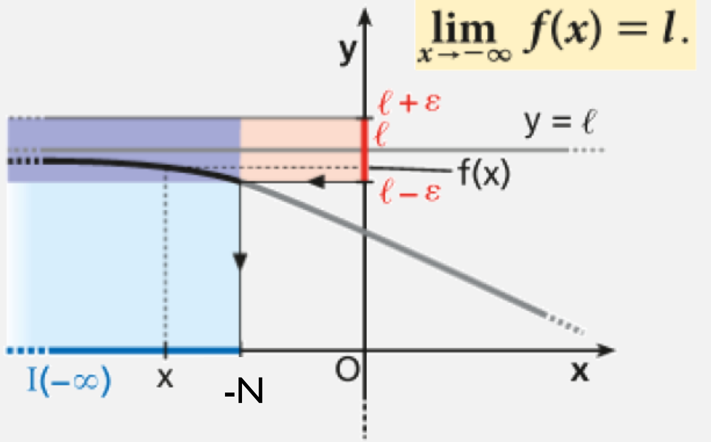
- **Limite finito calcolato in un punto infinito**:

$L \in \mathbb{R}, x_0 = \infty \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = L$



Sia una funzione $f(x)$ una funzione definita in un intervallo (a, b) escluso un punto x_0, si dice che la funzione $f(x)$ per x che tende all'infinito ha per limite L, quando in corrispondenza di un numero arbitrario positivo ε, si può sempre determinare un numero $N > 0$ tale che, per ogni x che verifica la condizione $|x| > N$, risulta verificata la condizione:

$$|f(x) - L| < \varepsilon \rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$



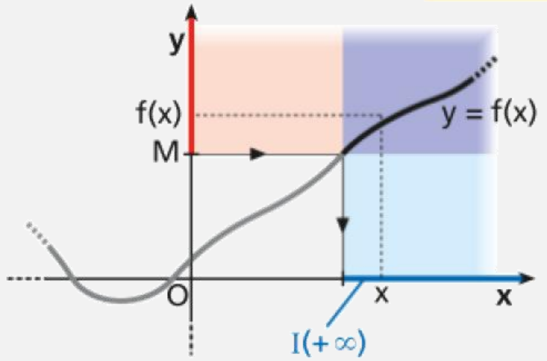
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists \, N > 0 : \forall x : |x| > N \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

➢ Limite infinito calcolato in un punto infinito: $L, x_0 = \infty \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

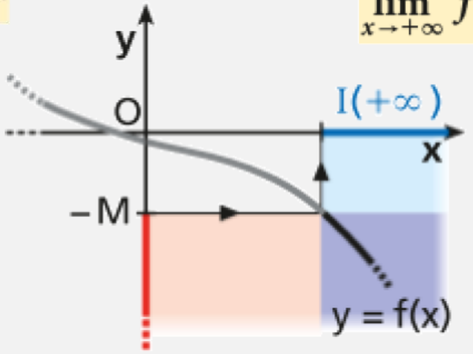
Sia una funzione $f(x)$ una funzione definita in un intervallo (a,b) escluso un punto x_0, si dice che la funzione $f(x)$ per x che tende all'infinito ha per limite l'infinito, quando in corrispondenza di un numero arbitrario positivo M, si può sempre determinare un numero $N > 0$ tale che, per ogni x che verifica la condizione $|x| > N$, risulta verificata la condizione:

$$|f(x)| > M$$

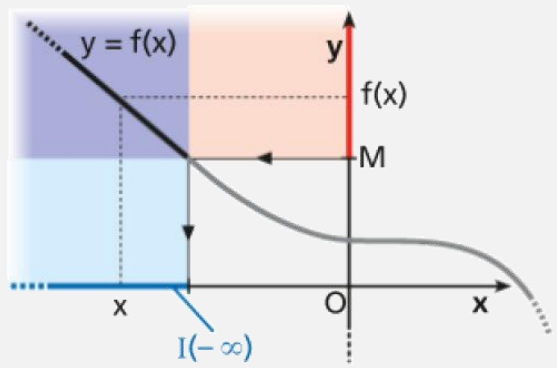
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$



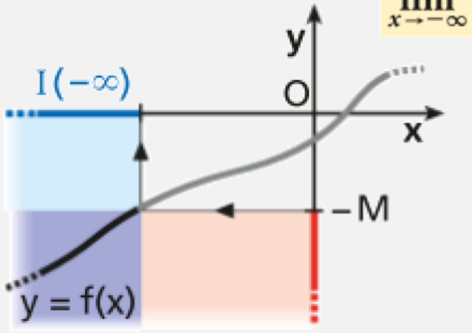
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$



$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$



$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$



$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0\ \exists\, N > 0 : \ \forall x : |x| > N \Longrightarrow |f(x)| > M$$

Esempi di Limiti di funzioni razionali per $x \to x_0$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x+1}{x-1} = \frac{2+1}{2-1} = \frac{3}{1} = 3$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-x}{x+2} = \frac{1-1}{1+2} = \frac{0}{3} = 0$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{-3x-2}{x-2} = \frac{-6-2}{2-2} = \left[\frac{-8}{0}\right]$$

LIMITE SINISTRO

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{-3x-2}{x-2} = \frac{-6-2}{2^--2} = \frac{-8}{0^-} = +\infty$$

LIMITE DESTRO

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{-3x-2}{x-2} = \frac{-6-2}{2^+-2} = \frac{-8}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(x + \frac{5}{x}\right) = -\infty + \frac{5}{-\infty} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{6-3x} = \frac{1}{6-3(-\infty)} = \frac{1}{-\infty} = 0^-$$

Limite destro

Siano $x_0 \in \mathbb{R}$ e $f : D_f \to \mathbb{R}$, si supponga x_0 punto di accumulazione per l'insieme $D_f \cap (x_0, +\infty)$.

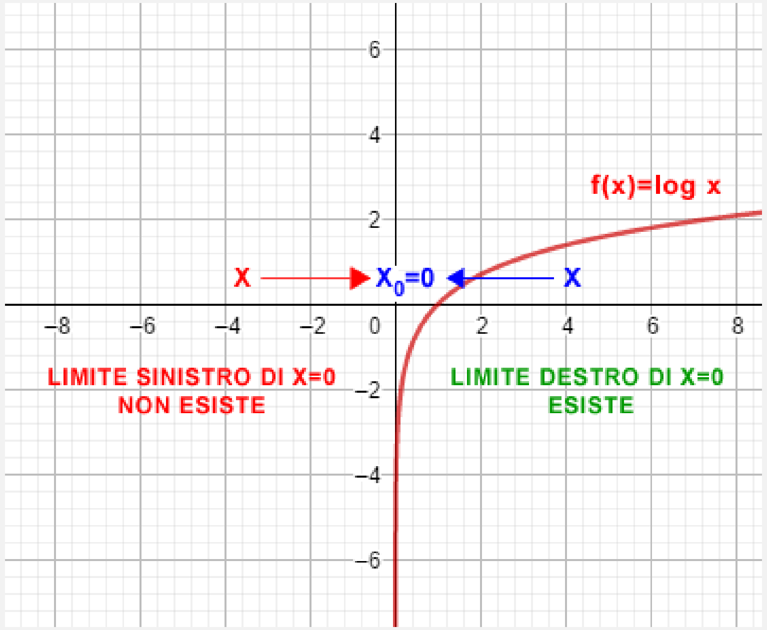
Se esiste il limite per $x \to x_0$ della <u>restrizione</u> di f a $D_f \cap (x_0, +\infty)$, allora tale valore è detto **limite destro** di f in x_0, denotato:

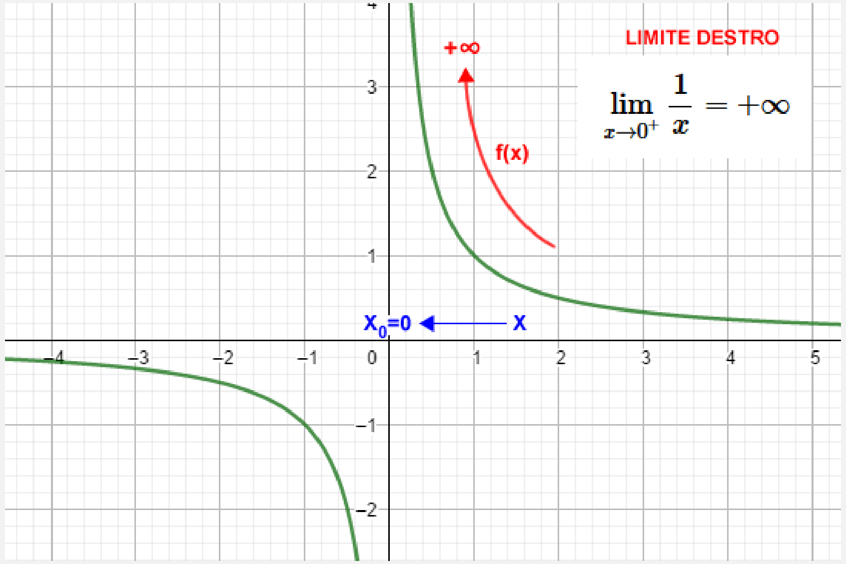
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Dicitura con i quantificatori (nel caso $L \in \mathbb{R}$):

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap D_f \ \to \quad |f(x) - L| \leq \varepsilon$$

$$x_0 < x < x_0 + \delta$$





Limite sinistro

Siano $x_0 \in \mathbb{R}$ e $f : D_f \to \mathbb{R}$, si supponga x_0 punto di accumulazione per l'insieme $D_f \cap (-\infty, x_0)$.

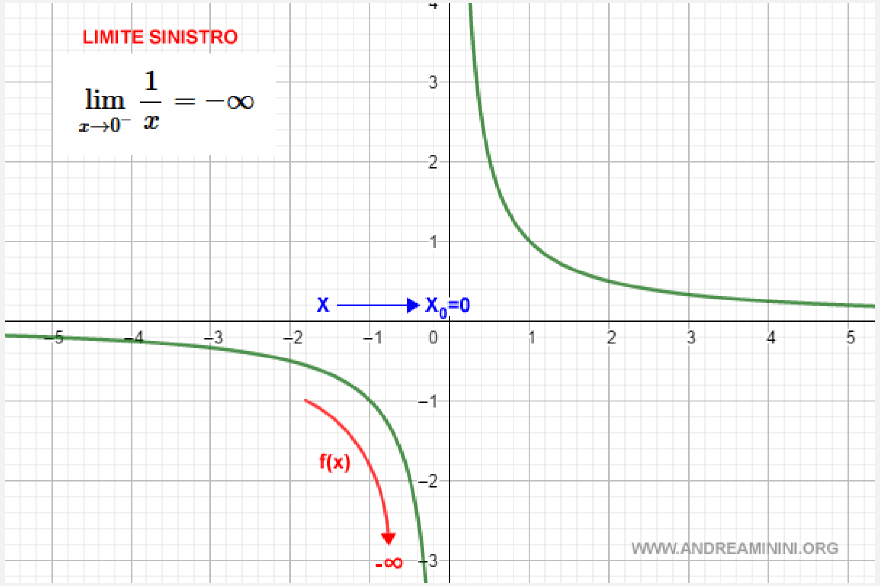
Se esiste il limite per $x \to x_0$ della <u>restrizione</u> di f a $D_f \cap (-\infty, x_0)$, allora tale valore è detto **limite sinistro** di f in x_0, denotato:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

Dicitura con i quantificatori (nel caso $L \in \mathbb{R}$):

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap D_f \;\to\; |f(x) - L| \leq \varepsilon$$

$$x_0 - \delta < x < x_0$$



Proprietà dei limiti

Siano x_0 un punto di accumulazione di A e $c \in \mathbb{R}$ una costante,

$$f, g : A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$$

Se:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \quad \& \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = l_2, con\ l_1, l_2 \in \mathbb{R}$$

Allora:

1. $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = l_1 + l_2$

2. $\lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to 0} f(x) - \lim_{x \to x_0} g(x) = l_1 - l_2$

3. $\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to 0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) = l_1 \cdot l_2$

4. $\lim_{x \to x_0} (f(x)/g(x)) = \dfrac{\lim_{x \to 0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} = l_1/l_2, \quad l_2 \neq 0$

5. $\lim_{x \to x_0} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \to 0} f(x) = c \cdot l_2$

6. $\lim_{x \to x_0} \left(f(x)\right)^{\frac{p}{q}} = (\lim_{x \to x_0} f(x))^{\frac{p}{q}}, \quad p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$

Casi dei limiti

Generale: Il limite per x che tende a x_0 di $f(x)$ è uguale a L se e solo se per ogni intorno di L esiste un intorno di x_0 tale che, per ogni x appartenente all'intorno di x_0 (escluso al più x_0), risulta che $f(x)$ appartiene all'intorno di L

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall I_L \; \exists \, I_{x0} : \; \forall x \in I_{x0} - \{x_0\} \Longrightarrow f(x) \in I_L$$

I casi possono vedere:

$$L = \begin{cases} \in \mathbb{R} \to I_L = (L - \varepsilon, L + \varepsilon) \\ +\infty \to I_L \quad = (n, +\infty) \\ -\infty \to I_L = (-\infty, -n) \end{cases}$$

$$x_0 = \begin{cases} \in \mathbb{R} \to I_L = (L - \varepsilon, L + \varepsilon) \\ +\infty \to I_L \quad = (n, +\infty) \\ -\infty \to I_L = (-\infty, -n) \end{cases}$$

Limiti di funzioni polinomiali

Dalle regole di calcolo dei limiti, si deduce che esiste il limite per $x \to x_0 \in \mathbb{R}$ di ogni funzione polinomiale

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

Tramite la definizione di limite, è facile verificare che:

$$\lim_{x \to x_0} a_0 = a_0, \qquad \lim_{x \to x_0} a_1 x = a_1 x_0, \qquad \lim_{x \to x_0} a_n x^n = a_n x_0$$

Quindi, in generale:

$$\lim_{x \to x_0} p(x) = p(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n$$

Limiti del quoziente di due polinomi: funzioni razionali fratte

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \begin{array}{c} 1.\, n > m \to \lim = \pm\infty \\ 2.\, n < m \to \lim = 0 \\ 3.\, n = m \to \lim = a_n/b_m \end{array}$$

Esempi.

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1-x^2+3x^3}{2x^2-1+5x^3} = \frac{3}{5} \to n = m$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5x^3+2}{12x^4-x+7} = 0^- \to n < m$

3. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^3-7x+1}{x^2-1} = \frac{x^3}{x^2} = \frac{x}{1} = \pm\infty \to n > m$

Forme indeterminate

Le forme indeterminate sono operazioni che coinvolgono infiniti e infinitesimi nel calcolo dei limiti per le quali non è possibile determinare un risultato a priori:

$$+\infty-\infty \quad 0\cdot\infty \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \frac{0}{0} \quad 0^0 \quad 1^\infty \quad \infty^0$$

Non sono forme indeterminate:

$$k+\infty=+\infty$$
$$k-\infty=-\infty$$
$$\infty+\infty=\infty$$
$$k\cdot\infty=\infty$$
$$\infty\cdot\infty=\infty$$
$$\frac{k}{\infty}=0$$
$$\frac{0}{\infty}=0$$
$$\frac{\infty}{k}=\infty$$
$$\frac{k}{0}=\infty$$

Teorema: limiti di funzioni monotone

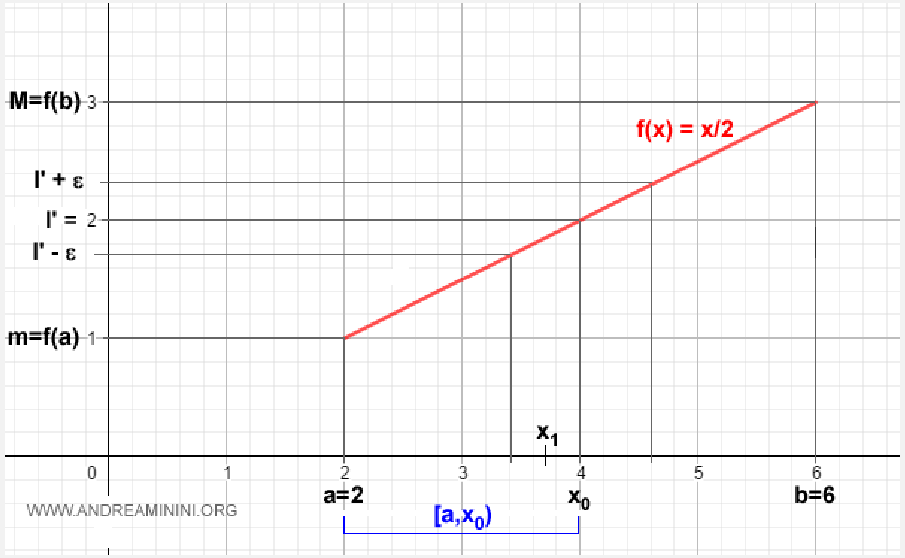
Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$ una <u>funzione crescente</u> e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per D_f. Allora:

$$\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x), \quad \exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) \text{ e si ha:}$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup\{f(x): x \in D_f, x < x_0\}$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf\{f(x): x \in D_f, x > x_0\}$$

Analogamente per le funzioni decrescenti



Forme indeterminate

È necessario risolvere le forme indeterminate.

$$\lim_{x \to \pm\infty} polinomio = +\infty - \infty$$

Raccogliere la x di grado massimo

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{polinomio}{polinomio} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

Raccogliere la x di grado massimo al numeratore e al denominatore; semplificare

$$\lim_{x \to x_0} \frac{polinomio}{polinomio} = \frac{0}{0}$$

Scomporre numeratore e denominatore; semplificare

Forme indeterminate: esempi

$$\lim_{x\to\pm\infty} polinomio = +\infty - \infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} 2x^3 - x^2 + 3 = 2\cdot(+\infty)^3 - (+\infty)^2 + 3 = 2\cdot(+\infty) - (+\infty) + 3 = +\infty - \infty$$

la forma indeterminata $+\infty - \infty$ si risolve raccogliendo la x di grado massimo del polinomio, cioè:

$$\lim_{x\to+\infty} 2x^3 - x^2 + 3 = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^3}\right) = (+\infty)^3\cdot\left(2 - \frac{1}{+\infty} + \frac{3}{(+\infty)^3}\right) =$$

$$= +\infty\cdot(2 - 0 + 0) = +\infty\cdot 2 = +\infty$$

Soluzione alternativa più rapida:

$$\lim_{x\to+\infty} 2x^3 - x^2 + 3 = \lim_{x\to+\infty} 2x^3 = 2\cdot(+\infty)^3 = 2\cdot(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} 2x^3 - x^2 + 3 = \lim_{x\to-\infty} 2x^3 = 2\cdot(-\infty)^3 = 2\cdot(-\infty) = -\infty$$

Forme indeterminate: esempi

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{polinomio}{polinomio} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+2}{2x^2-5} = \frac{(+\infty)+2}{2 \cdot (+\infty)^2 - 5} = \frac{+\infty}{2 \cdot (+\infty) - 5} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

la forma indeterminata $\frac{+\infty}{+\infty}$ si risolve raccogliendo la x di grado massimo al numeratore e al denominatore:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+2}{2x^2-5} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x \cdot \left(1+\frac{2}{x}\right)}{x^2 \cdot \left(2-\frac{5}{x^2}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x \cdot \left(2-\frac{5}{x^2}\right)} = \frac{1+\frac{2}{(+\infty)}}{(+\infty) \cdot \left(2-\frac{5}{(+\infty)^2}\right)} = \frac{1}{(+\infty) \cdot 2} = \frac{1}{(+\infty)} = 0$$

Forme indeterminate: esempi

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{polinomio}{polinomio} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

Soluzione alternativa più rapida: polinomio al numeratore grado maggiore

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^5 - 3x + 2}{2x^2 + 4} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x^2 + 2x - 5}{x - 4} = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4x^5 - 3x + 2}{2x^2 + 4} = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^4 + 5x^3}{x^3 + 2x^2 - 1} = +\infty$$

Soluzione alternativa più rapida: numeratore e denominatore stesso grado

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{7x^3 - 3x + 2}{2x^3 + 4} = \frac{7}{2} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 - x + 2}{4x - 2x^2 - 1} = -\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{7x^3 - 3x + 2}{2x^3 + 4} = \frac{7}{2} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2 - x + 2}{4x - 2x^2 - 1} = -\frac{3}{2}$$

Soluzione alternativa più rapida: polinomio al denominatore grado maggiore

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^3 - 3x + 1}{2x^4 + 4} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{2x^3 + 4} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^3 - 3x + 1}{2x^4 + 4} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{2x + 1}{-2x^2 + 4x + 3} = 0$$

Forme indeterminate: esempi

$$\lim_{x \to x_0} \frac{polinomio}{polinomio} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{1 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ si risolve scomponendo numeratore e denominatore e poi semplificando:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1) \cdot (x + 1)}{x - 1} = \boldsymbol{\lim_{x \to 1} (x + 1)} = 1 + 1 = 2$$

Forme indeterminate: esempi

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{A} - \sqrt{B} = +\infty - \infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{3x+1} - \sqrt{x}\right) = \sqrt{3 \cdot (+\infty)} - \sqrt{(+\infty)} = \sqrt{+\infty} - \sqrt{+\infty} = +\infty - \infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{3x+1} - \sqrt{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{3x+1} - \sqrt{x}\right) \cdot \frac{\left(\sqrt{3x+1} + \sqrt{x}\right)}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(3x+1) - x}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{x}} =$$

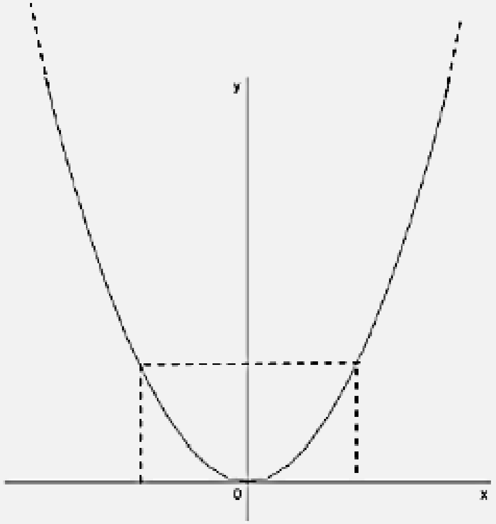
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{x}} = \frac{2 \cdot (+\infty) + 1}{\sqrt{3 \cdot (+\infty) + 1} + \sqrt{(+\infty)}} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

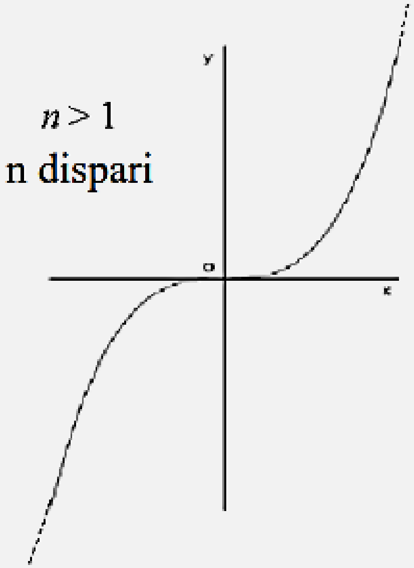
la forma indeterminata $\frac{+\infty}{+\infty}$ si risolve applicando la tecnica vista in precedenza, cioè:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x \cdot \left(2 + \frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x} \cdot \left[\sqrt{3 + \frac{1}{x}} + 1\right]} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x} \cdot \left(2 + \frac{1}{x}\right)}{\sqrt{3 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{\sqrt{+\infty} \cdot \left(2 + \frac{1}{(+\infty)}\right)}{\sqrt{3 + \frac{1}{(+\infty)}} + 1} = \frac{+\infty}{\sqrt{3} + 1} = +\infty$$

Limiti di funzioni elementari

Funzione potenza con esponente intero





$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

n pari

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = +\infty$$

n pari

$$\lim_{x \to 0} x^n = 0$$

n dispari

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty$$

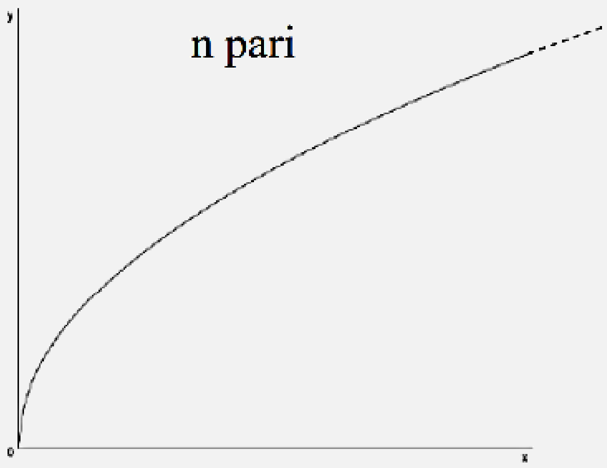
n dispari

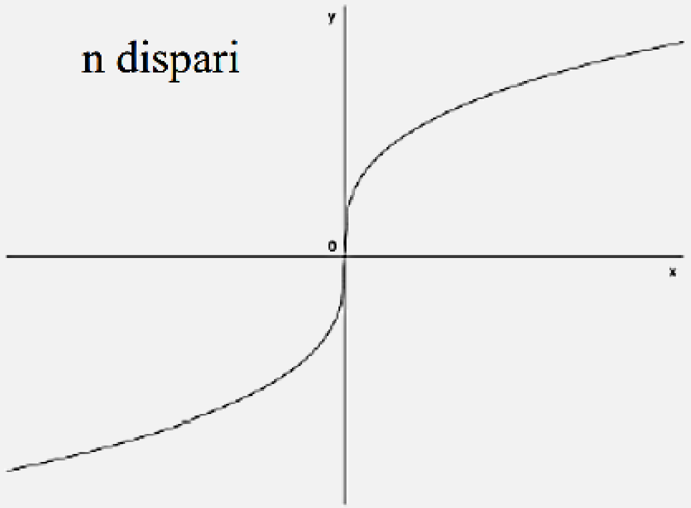
$$\lim_{x \to 0} x^n = 0$$

Limiti di funzioni elementari

Funzione radice ennesima

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty,$$
$$\forall n \in \mathbb{N}$$





$n\ pari$

$$\nexists \lim_{x\to-\infty} \sqrt[n]{x}$$

$n\ dispari$

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty$$

$n\ pari$

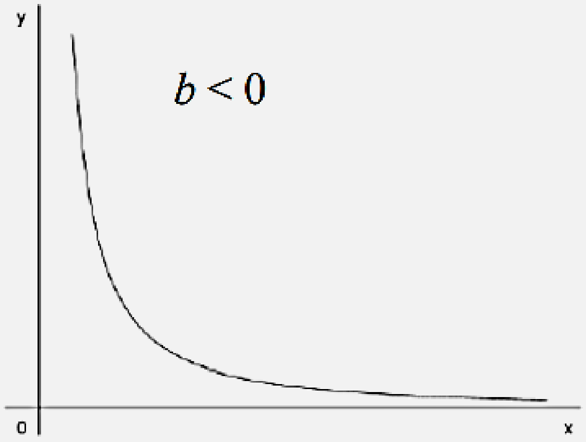
$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt[n]{x} = 0^+$$

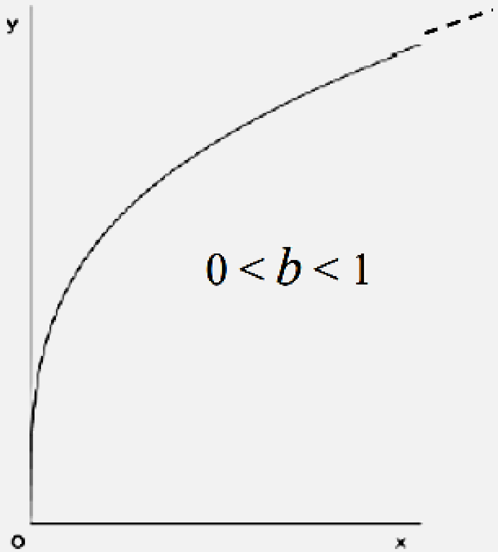
$n\ dispari$

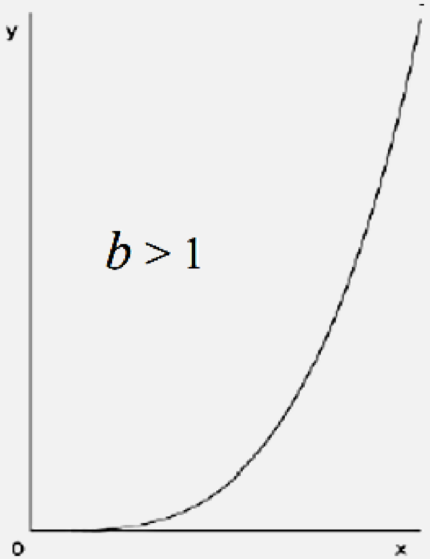
$$\lim_{x\to 0} \sqrt[n]{x} = 0$$

Limiti di funzioni elementari

Funzione potenza con esponente reale







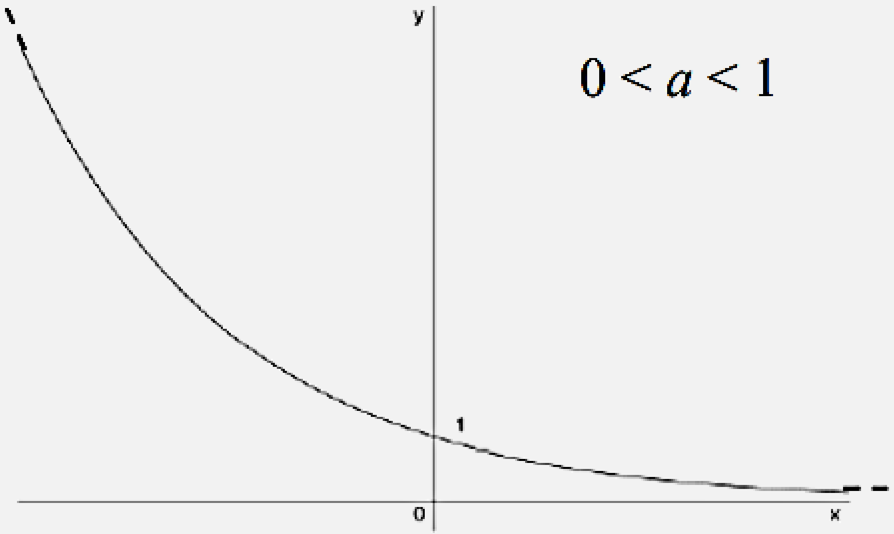
$$\lim_{x\to+\infty} x^b = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} x^b = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} x^b = +\infty$$

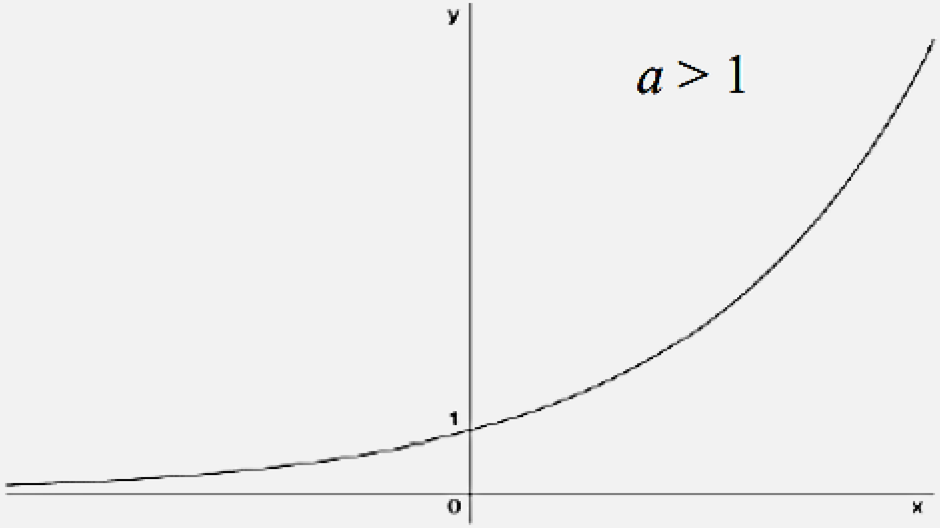
$$\lim_{x\to 0^+} x^b = +\infty \qquad \lim_{x\to 0} x^b = 0 \qquad \lim_{x\to 0} x^b = 0$$

Continuità in zero

Limiti di funzioni elementari

<u>Funzione esponenziale</u>





$$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$$

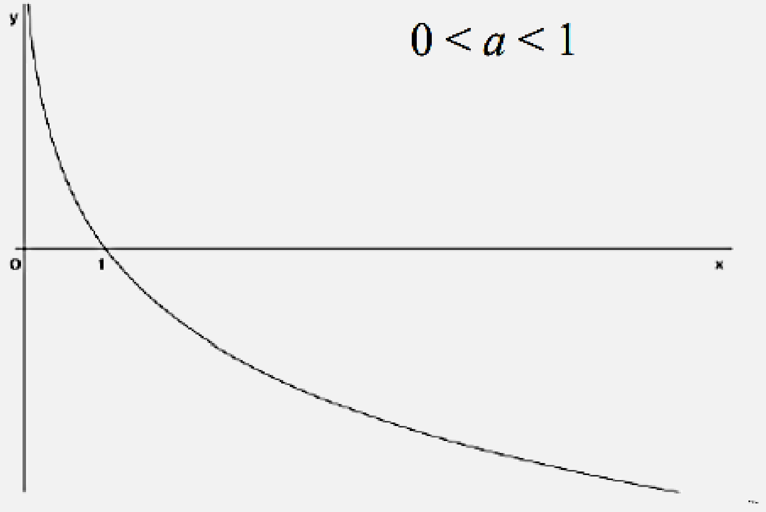
$$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$$

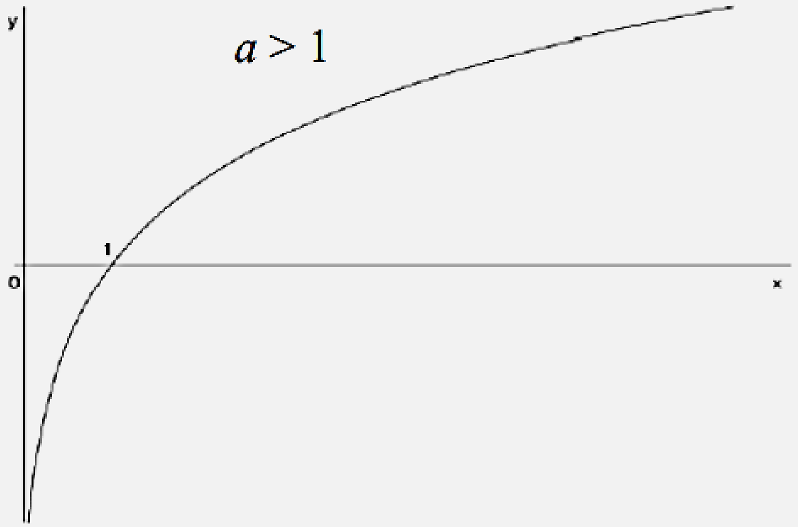
$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$$

Limiti di funzioni elementari

Funzione logaritmo





$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$$

Asintoti orizzontali

Assegnata una funzione f a valori reali definita in un intervallo illimitato I, se il limite all'infinito di risulta finito, cioè se

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = l$$

Allora, la retta $y = l$ è detta **asintoto orizzontale** per il grafico della funzione $f(x)$

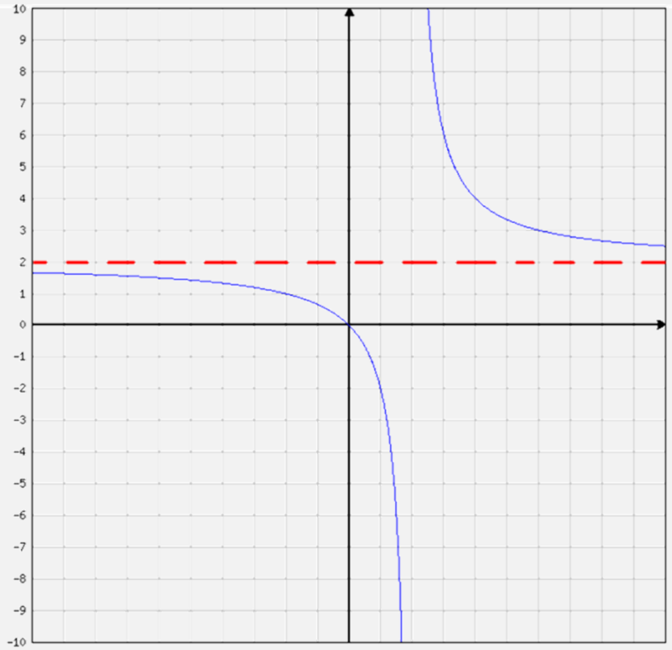
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$$

$$\Downarrow$$

$$y = 2$$

Asintoto orizzontale



Asintoti orizzontali

Se succede che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l_1 \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = l_2$$

Allora, il grafico di $f(x)$ ammette due asintoti orizzontali: $y = l_1$ a $+\infty$ e $y = l_2$ a $-\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$$

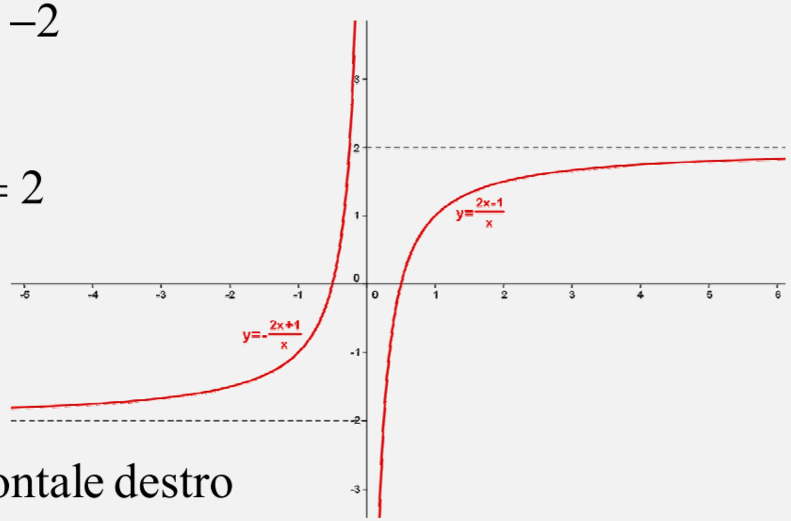
$$\Downarrow$$

$$y = 2$$

Asintoto orizzontale destro

$$y = -2$$

Asintoto orizzontale sinistro



Asintoti orizzontali

Se il limite all'infinito di una funzione f a valori reali definita in un intervallo illimitato I risulta invece infinito, cioè se

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

Allora, la funzione sicuramente NON ammette asintoto orizzontale

Asintoti verticali

Assegnata una funzione f a valori reali definita in un intervallo I privato al più di un punto x_0, se il limite al finito x_0 risulta infinito, cioè se

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$$

Allora, la retta $x = x_0$ è detta **asintoto verticale** per il grafico della funzione $f(x)$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$$

$$x = 2$$

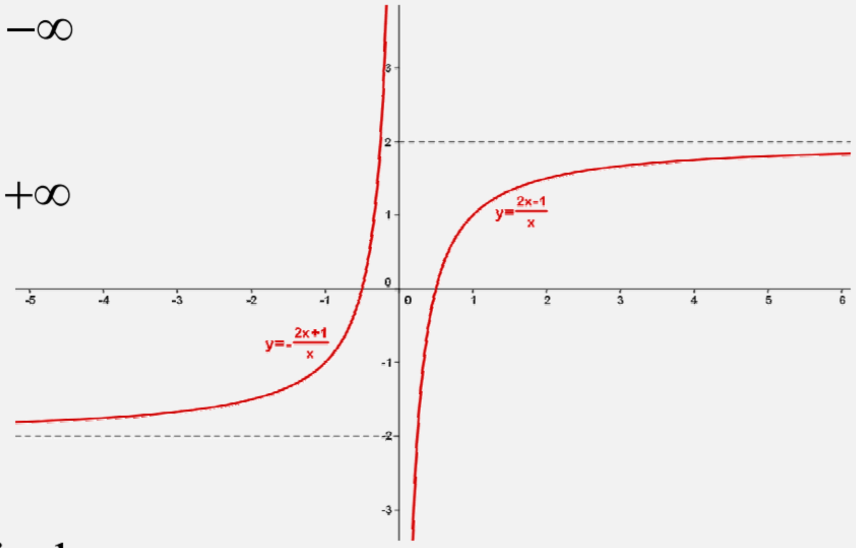
Asintoto verticale

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$$

$$x = 0$$

Asintoto verticale



Teorema: Unicità del limite

Una funzione non può avere due limiti differenti; se:

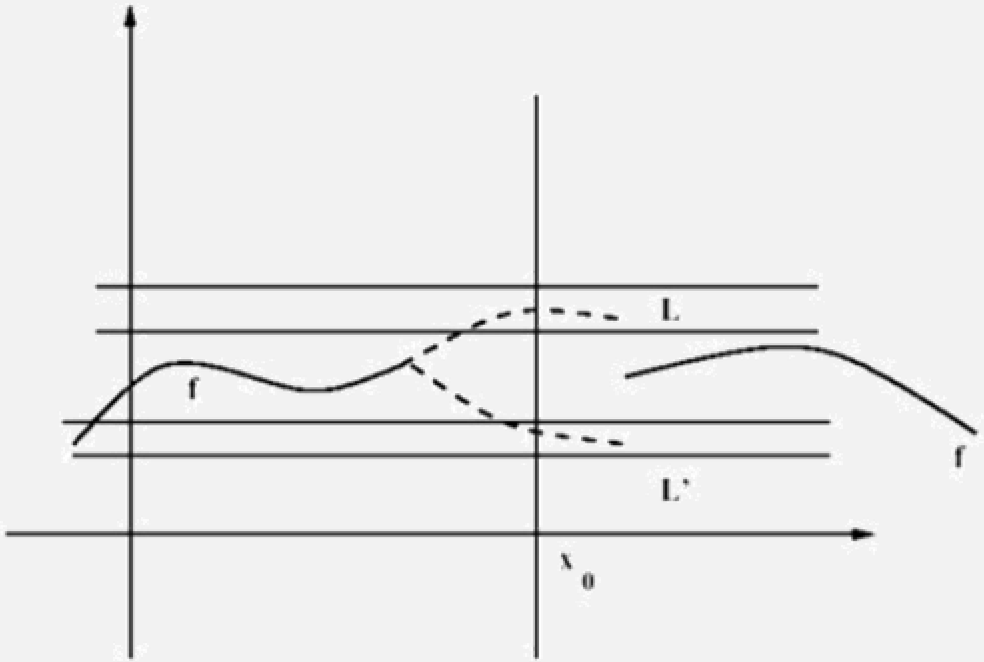
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \ \& \lim_{x\to x_0} f(x) = l' \rightarrow l = l'$$

Dimostrazione:
Se $l = l'$ posso scegliere due intorni di l e l' disgiunti:
$I_1 = I(l, \varepsilon_1), I_2 = I(l', \varepsilon_2), I_1 \cap I_2 = \emptyset$.

$f(x)$ con $x \in I(x_0, \delta)$ a quale intorno apparterrebbe?

Si arriva a una contraddizione: dal punto di vista analitico, esiste δ_1 tale che per $x \in D_f$:

$$0 < |x - x_0| < \delta_1, f(x) \in I_1$$



Teorema: Unicità del limite

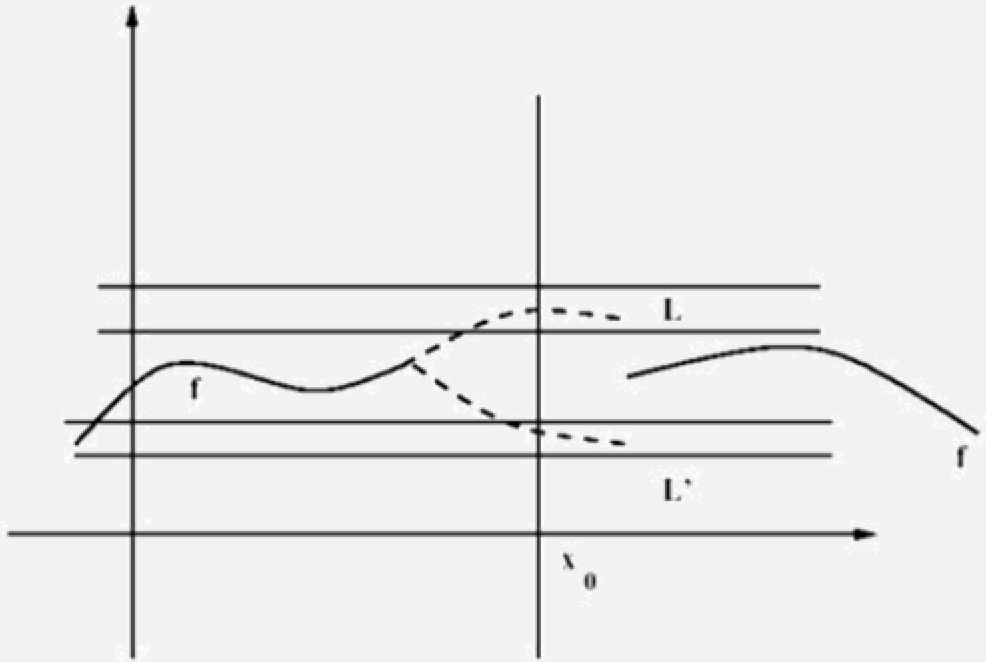
Analogamente, esiste δ_2 tale che per $x \in D_f$:

$$0 < |x - x_0| < \delta_2, f(x) \in I_2$$

Allora, per $x \in D_f$:

$$0 < |x - x_0| < \min\{\delta_1, \delta_2\}, f(x) \in I_1 \ \& \ f(x) \in I_2$$

Ma ciò è impossibile, perché $I_1 \cap I_2 = \emptyset$

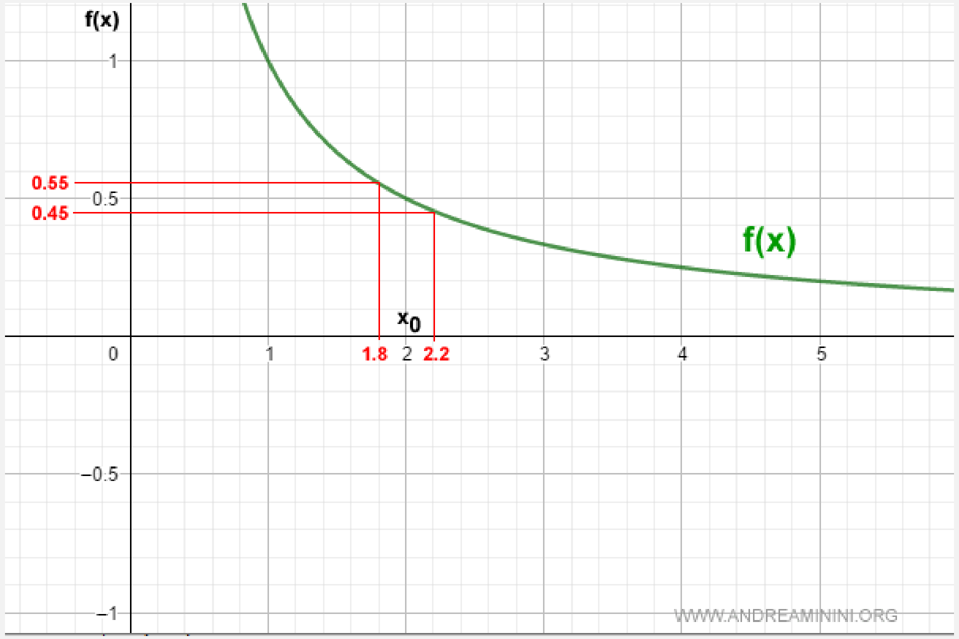


Teorema: Permanenza del segno

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = L > 0$, allora esiste I intorno di x_0 tale che:

$$f(x) > 0 \; \forall x \in I - \{x_0\} \cap D_f$$

Data una funzione $f(x)$ definita e continua in un intorno del punto x_0. Se $f(x_0) > 0$ allora esiste un numero $\delta > 0$ tale che $f(x) > 0$ per ogni x nell'intorno $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$



Sia la funzione: $f(x) = \frac{1}{x}$.

Nel punto $x_0 = 2$ la funzione $f(x_0) = 0.5 \to f(2) = 0.5$

Considero un intorno di $x_0 = 2$ con $\delta = 0.2$:

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) = (2 - 0.2, 2 + 0.2) = (1.8, 2.2)$$

Nell'intorno $(1.8, 2.2)$ la funzione è sempre maggiore di zero:

$$f(1.8) = \frac{1}{1.8} = 0.55$$

$$f(2.2) = \frac{1}{2.2} = 0.45$$