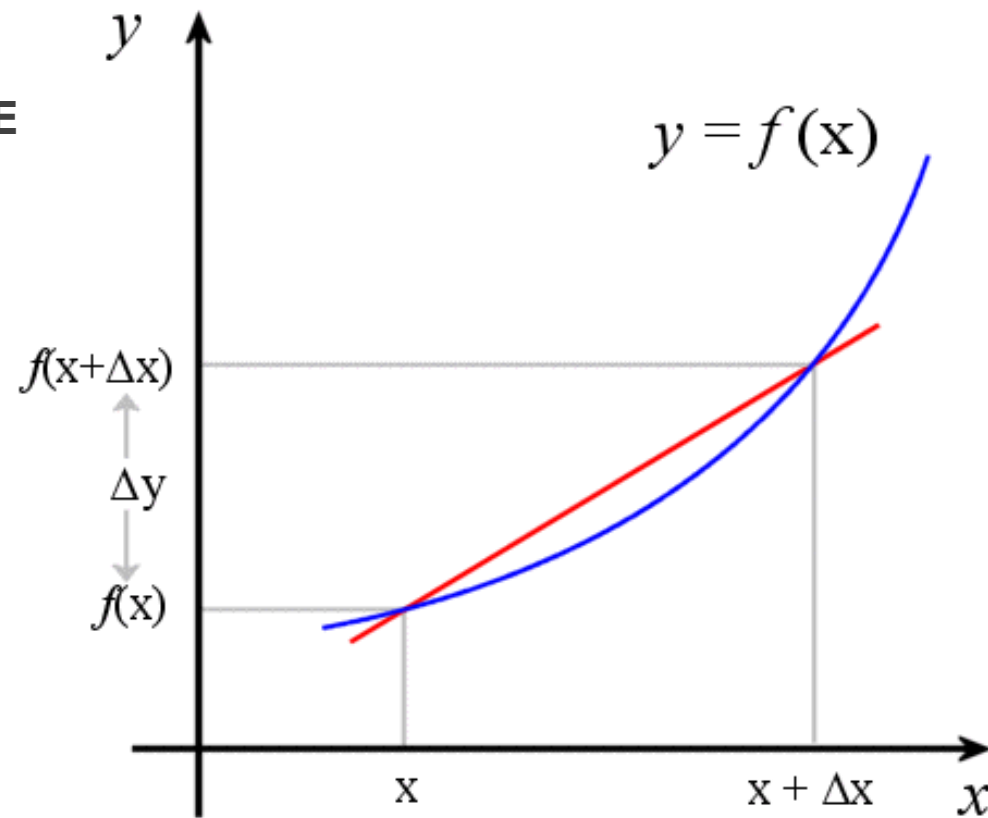


- **DERIVATA DI UNA FUNZIONE**



Definizioni: punto interno e rapporto incrementale

Sia I un intervallo non vuoto. Diciamo che $x_0 \in I$ è **interno** ad I se $\exists r > 0 : (x_0 - r, x_0 + r) \subset I$. Inoltre, $I \subseteq D_f$ (la funzione è definita per ogni punto di I).

Siano $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$, interno ad I . Dato $h \in \mathbb{R}, h \neq 0$, chiamiamo **rapporto incrementale** di f relativo a x_0 e all'incremento h il quoziente:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Rapporto
incrementale
negativo



La funzione $f(x)$
decrece passando
da x a $x+h$

Rapporto
incrementale
positivo



La funzione $f(x)$
cresce passando
da x a $x+h$

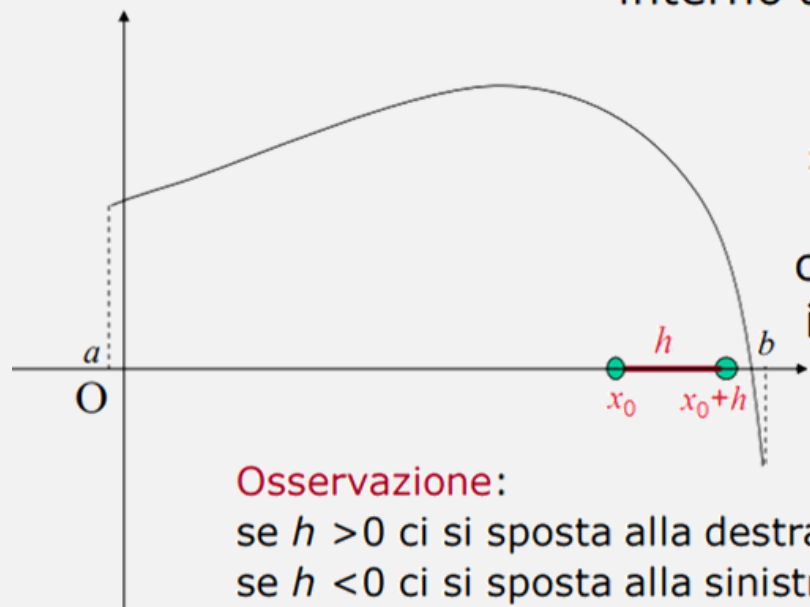
Incremento della variabile x

Sia assegnata una funzione $f(x)$ in un intervallo $[a,b]$ e sia x_0 un fissato punto interno all'intervallo $[a,b]$.

Si passi dal punto x_0 ad un altro punto interno all'intervallo $[a,b]$



si fornisce cioè un certo incremento, che chiamiamo h , al valore x_0 in modo tale da trovarsi ancora nell'intervallo $[a,b]$



Osservazione:

se $h > 0$ ci si sposta alla destra di x_0

se $h < 0$ ci si sposta alla sinistra di x_0

Il passaggio da x_0 ad x_0+h lungo l'asse delle ascisse viene detto

incremento della variabile x

e coincide col valore $h = (x_0+h) - (x_0)$

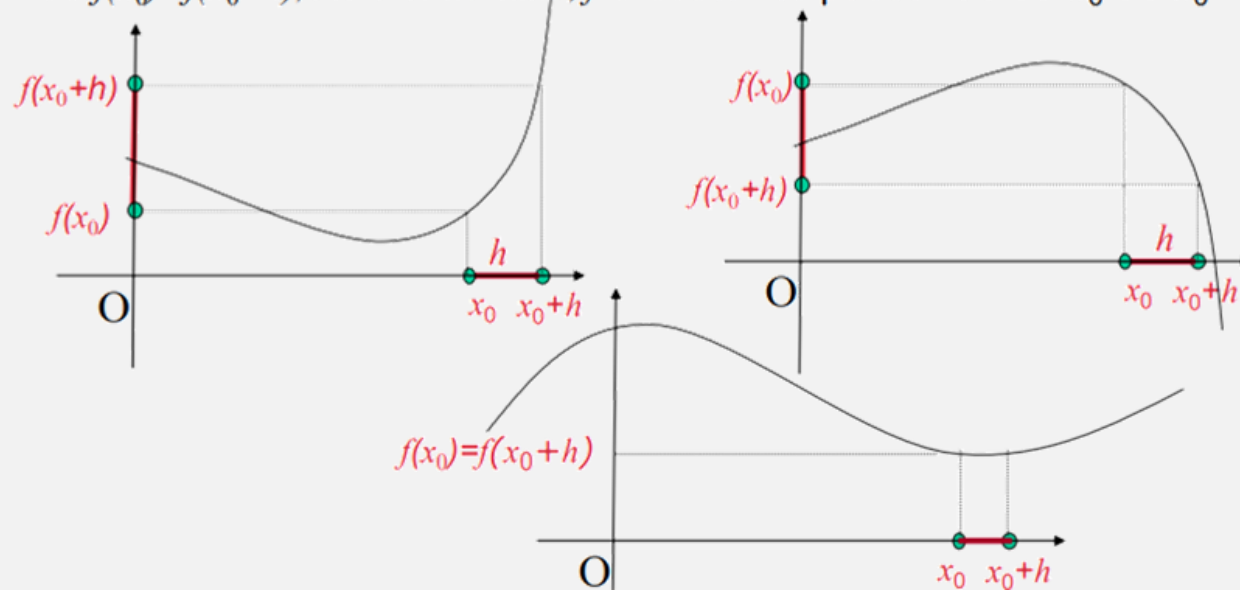
Incremento della funzione $f(x)$

Le immagini mediante f dei punti x_0 e $x_0 + h$ sono rispettivamente $f(x_0)$ ed $f(x_0 + h)$

La differenza $f(x_0 + h) - f(x_0)$ tra i valori che la funzione assume nel passare da x_0 ad $x_0 + h$ si chiama **incremento della funzione f**

Calcoliamo il valore dell'incremento della funzione f nel passaggio da x_0 ad $x_0 + h$ con $x_0 < x_0 + h$

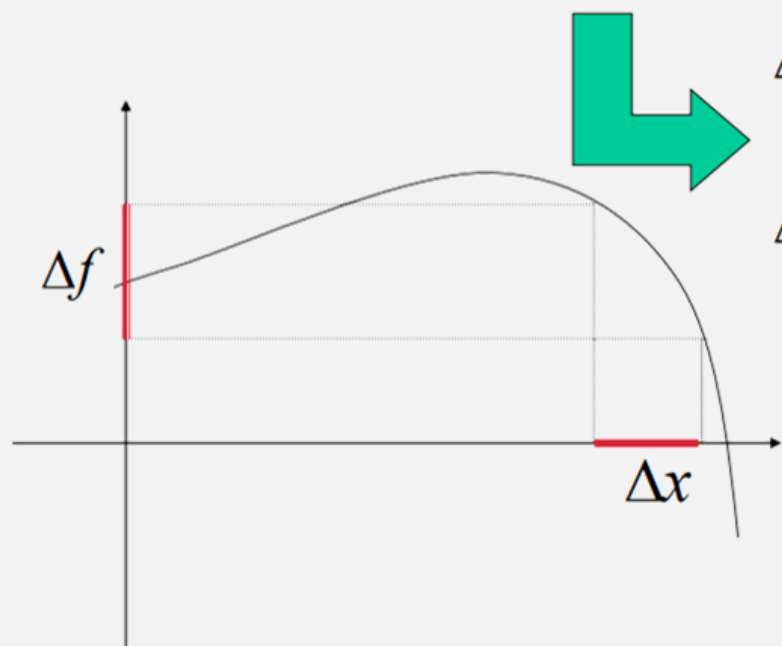
- se $f(x_0) < f(x_0 + h)$, *incremento positivo*, f cresce passando da x_0 ad $x_0 + h$
- se $f(x_0) > f(x_0 + h)$, *incremento negativo*, f decresce passando da x_0 ad $x_0 + h$
- se $f(x_0) = f(x_0 + h)$, *incremento nullo*, f è costante passando da x_0 ad $x_0 + h$



Rapporto incrementale

L'incremento della variabile x viene indicato col simbolo Δx

L'incremento della funzione f viene indicato col simbolo Δf



$$\Delta x = x_0 + h - x_0$$

$$\Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

Il rapporto tra l'incremento della variabile x nel passaggio da x_0 ad $x_0 + h$ e l'incremento della funzione f viene detto **rapporto incrementale** della funzione f relativo al passaggio da x_0 ad $x_0 + h$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

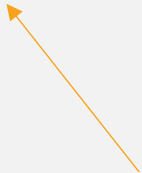
Il rapporto incrementale esprime la "variabilità di f " relativamente ad un certo intervallo

Definizioni: derivata

Sia assegnata una funzione $f(x)$ in un intervallo $[a, b]$ e sia x_0 un fissato punto interno all'intervallo $[a, b]$.

Si definisce derivata della funzione $f(x)$ nel punto x_0 il limite, se esiste ed è finito, del rapporto incrementale di f nel passaggio da x ad $x + h$, al tendere a zero dell'incremento h della variabile indipendente x :

$$D(f(x_0)) = \frac{df(x_0)}{dx} = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



Derivata della funzione f nel
punto x

Definizioni: derivata

$$D(f(x_0)) = \frac{df(x_0)}{dx} = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

La derivata di una funzione $f(x)$ in un punto x_0 interno all'intervallo di definizione, quando esiste, è un **numero**.

Se $f(x)$ è definita in un intervallo $[a, b]$, agli estremi a e b dell'intervallo si può parlare solo di derivata rispettivamente destra e sinistra.

Si dice che una funzione $f(x)$ è **derivabile** in un intervallo $[a, b]$ se è derivabile in ogni punto dell'intervallo $[a, b]$ e se ammette derivata destra in a e derivata sinistra in b .

Esempio.

Verificare la derivabilità della funzione $f(x) = x^2$ nel punto $x_0 = 2$.

$$\begin{aligned}\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} &= \frac{(2 + h)^2 - (2)^2}{h} = \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} = \\ &= \frac{h^2 + 4h}{h} = h + 4 \quad \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} h + 4 = 4\end{aligned}$$

La funzione $f(x) = x^2$ risulta derivabile in $x_0 = 2$: $f'(2) = 4$

Derivabilità e continuità

Se $f(x)$ è derivabile in un punto $x_0 \in (a, b)$, allora $f(x)$ è continua in x_0

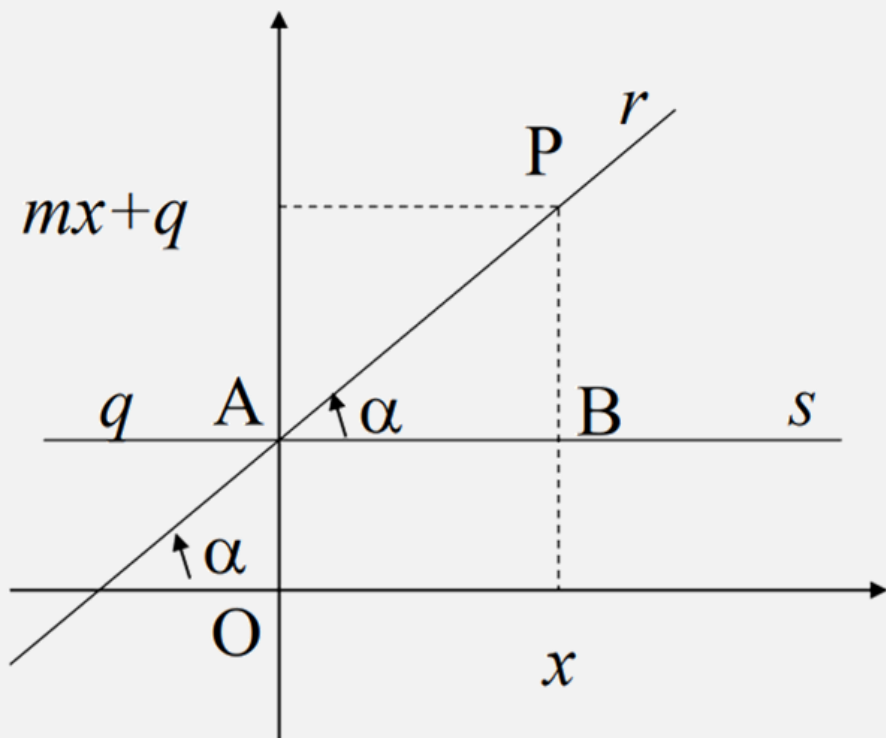
Nei punti di discontinuità una funzione non può ammettere derivata.

Cioè, se $f(x)$ non è continua in un punto $x_0 \in (a, b)$, allora $f(x)$ non è derivabile in x_0

Significato geometrico della derivata

Ricordiamo:

Nel piano cartesiano, consideriamo una retta r non parallela all'asse delle ordinate di equazione $y = mx + q$, con m coefficiente angolare e q termine noto



La retta $r: y = mx + q$ forma l'angolo α con l'asse x e il punto A ha coordinate $A = (0, q)$.

Il generico punto P sulla retta r ha coordinate $P = (x, mx + q)$.

Sia s la retta passante per il punto A e parallela all'asse delle ascisse.

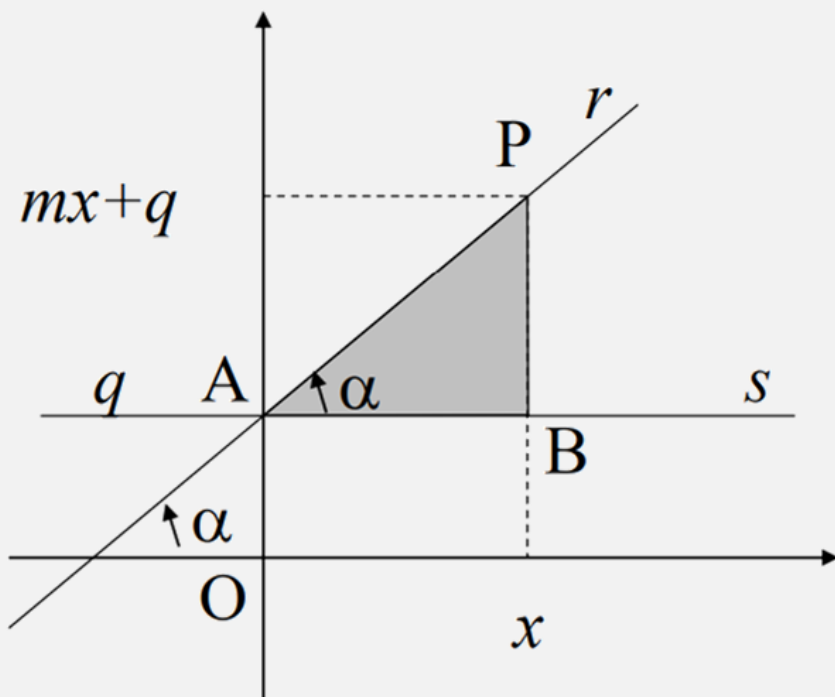
Infine, indichiamo con B il punto di intersezione tra la retta s e la perpendicolare da P all'asse delle ascisse, di coordinate $B(x, q)$.

L'angolo $PAB = \alpha$

Significato geometrico della derivata

Ricordiamo:

Significato geometrico del coefficiente angolare di una retta



$$\begin{aligned} A &= (0, q) \\ P &= (x, mx + q) \\ B &= (x, q) \\ PAB &= \alpha \end{aligned}$$

Consideriamo il triangolo rettangolo in B:

$$\begin{aligned} BP &= AP \sin \alpha & \frac{BP}{AB} &= \frac{AP \sin \alpha}{AP \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha \\ AB &= AP \cos \alpha \end{aligned}$$

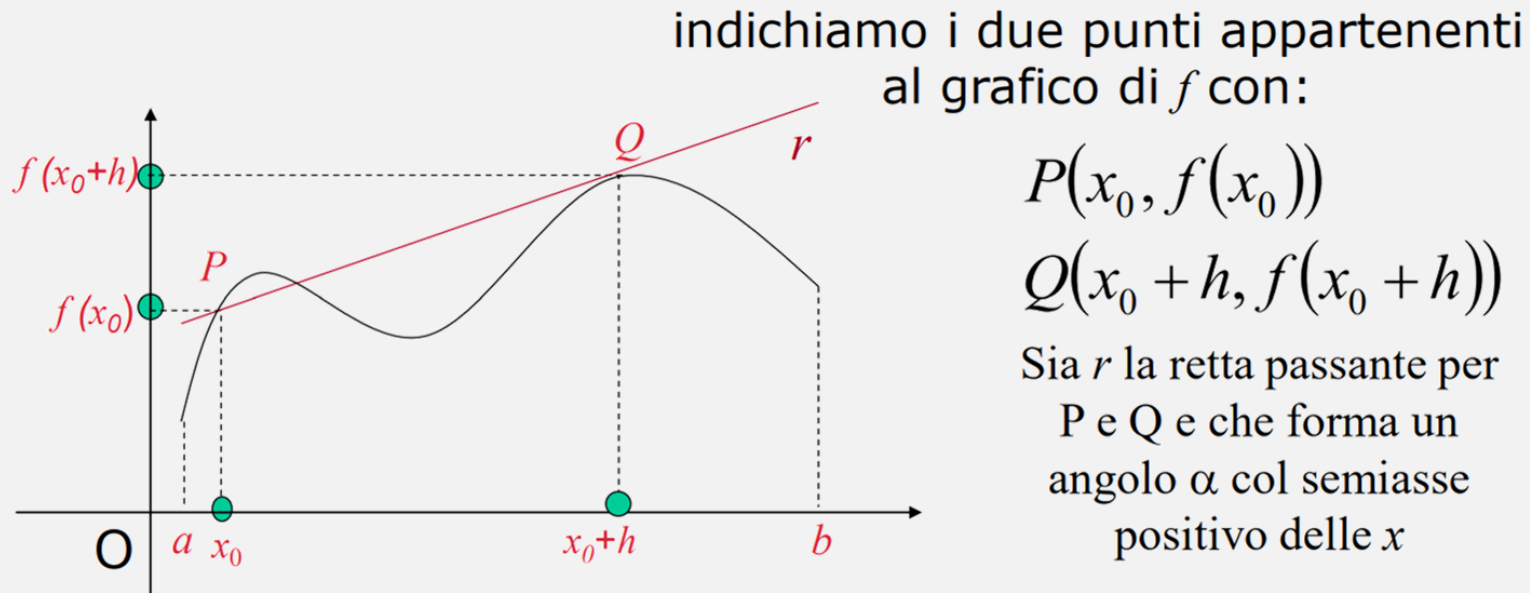
$$\Rightarrow \frac{BP}{AB} = \tan \alpha$$

$$\begin{aligned} BP &= (mx + q) - q = mx & \frac{BP}{AB} &= \frac{mx}{x} = m \\ AB &= (x) - 0 = x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{BP}{AB} = m$$

Significato geometrico della derivata

Sia assegnata una funzione $f(x)$ derivabile in un intervallo $[a, b]$ e sia x_0 un fissato punto interno all'intervallo $[a, b]$. Si passi dal punto x_0 ad un altro punto $x_0 + h$ interno all'intervallo $[a, b]$ in modo tale da potere considerare i corrispondenti valori di f .

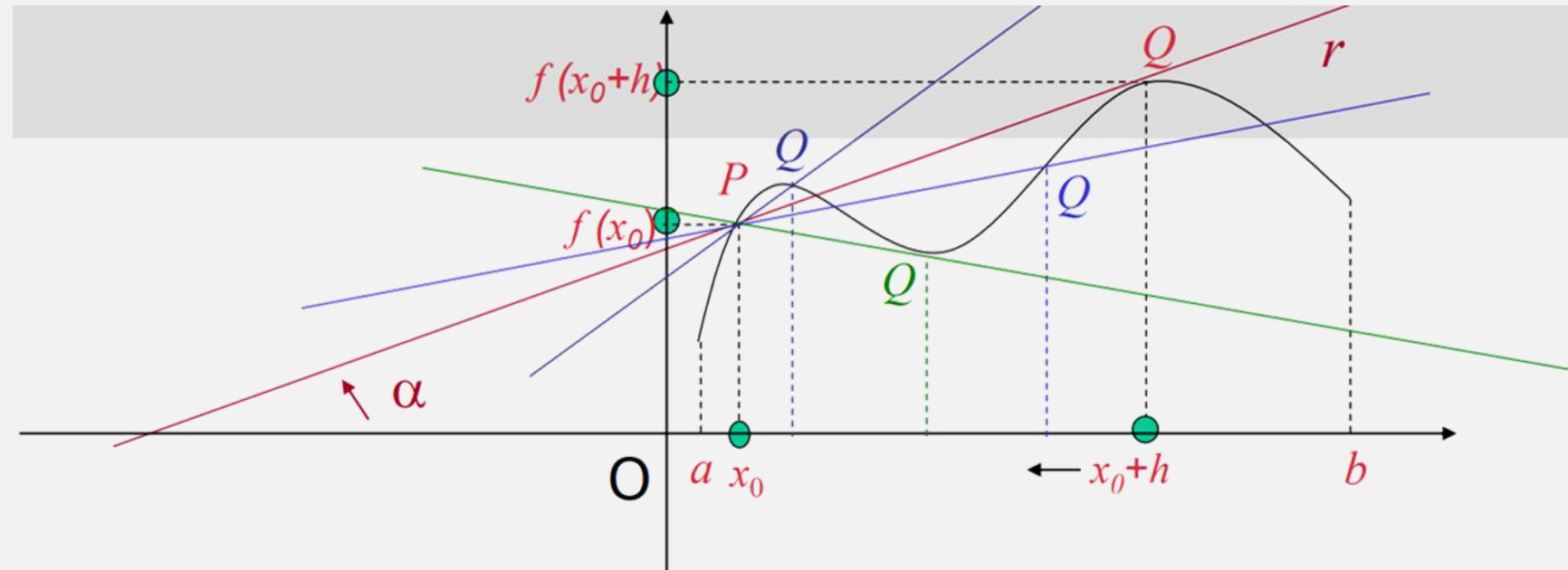


Significato geometrico della derivata

Da un punto di vista geometrico, quando $h \rightarrow 0$ il punto $P(x_0, f(x_0))$ rimane fisso, mentre il punto $Q(x_0 + h, f(x_0 + h))$ si muove verso il punto P lungo la curva grafico della funzione f .

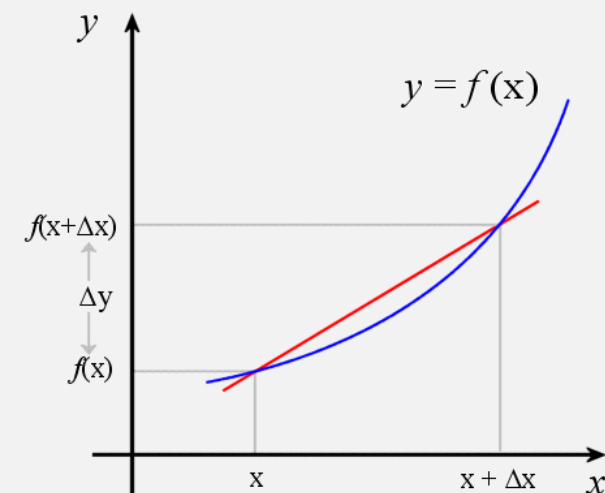
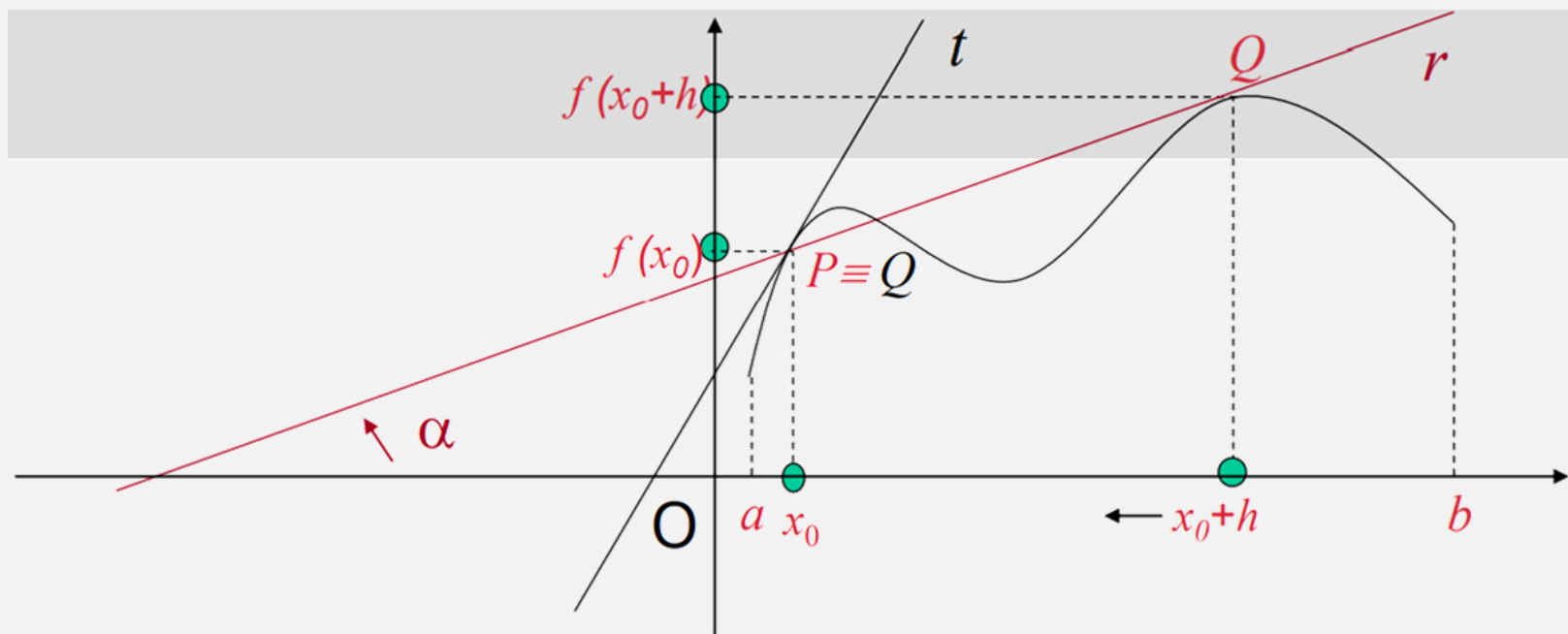
Contemporaneamente, spostandosi il punto Q verso il punto P , la retta passante per P e Q varia, in particolare in termini di pendenza $\rightarrow$ varia il suo coefficiente angolare

Da un punto di vista geometrico, quando $h \rightarrow 0$ il punto $P(x_0, f(x_0))$ rimane fisso, mentre il punto $Q(x_0 + h, f(x_0 + h))$ si muove verso il punto P lungo la curva grafico della funzione f .
Contemporaneamente, spostandosi il punto Q verso il punto P , la retta passante per P e Q varia, in particolare in termini di pendenza $\rightarrow$ varia il suo coefficiente angolare

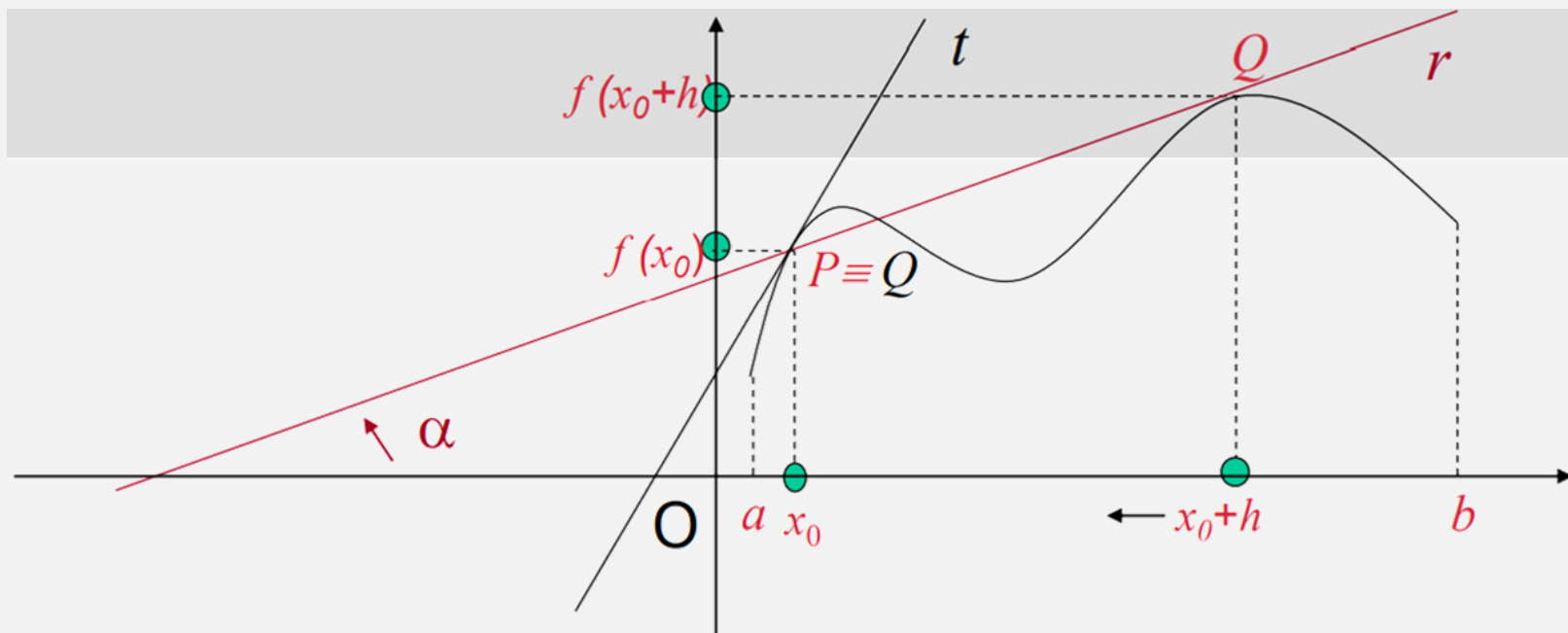


Significato geometrico della derivata

Tali variazioni per $h \rightarrow 0$ terminano quando il punto Q raggiunge il punto P , cioè quando la retta passante per P e Q si assesta su una posizione limite che è individuata dalla retta tangente t al grafico della funzione f nel punto di ascissa x_0 (cioè il punto P)



Significato geometrico della derivata



Quindi, indicando con α l'angolo che la retta tangente forma con il semiasse positivo delle x e con m_t il suo coefficiente angolare:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \tan \alpha = \lim_{h \rightarrow 0} m_r \Leftrightarrow f'(x_0) = \tan \alpha = m_t$$

Significato geometrico della derivata

Quindi, in definitiva, se α è l'angolo che la retta tangente al grafico della funzione f nel punto di ascissa x_0 forma con semiasse positivo delle ascisse e se m_t è il suo coefficiente angolare, risulta che:

$$f'(x_0) = \tan \alpha = m_t$$

Cioè:

La derivata $f'(x_0)$ della funzione f nel punto x_0 è uguale al coefficiente angolare m_t della retta tangente al grafico della funzione f nel punto $P(x_0, f(x_0))$

Conclusioni.

L'esistenza della derivata di una funzione f in un punto x_0 è legata:

- all'esistenza della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa x_0
- al fatto che il coefficiente angolare della retta tangente deve essere finito, essendo $f'(x_0) = m_t$

In particolare, essendo $f'(x_0) = \tan \alpha = m_t$, richiedere che il coefficiente angolare della retta tangente t al grafico di f sia finito equivale a richiedere che $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$


$$\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan \alpha \rightarrow \pm\infty$$

La retta tangente al grafico della funzione f in un punto di ascissa x_0 non può essere parallela all'asse delle ordinate affinché la funzione f sia derivabile nel punto x_0

Se f è una funzione derivabile in un punto x_0 , allora nel punto di coordinate $(x_0, f(x_0))$ il suo grafico ammette una retta tangente non parallela all'asse delle ordinate

Una funzione derivabile in un intervallo, è una funzione il cui grafico è dotato di retta tangente in ogni suo punto

- **DERIVATE DELLE FUNZIONI ELEMENTARI**

Derivate delle funzioni elementari

Se f è derivabile in ogni punto dell'intervallo (a, b) , allora è possibile considerare una nuova funzione che ad ogni punto $x \in (a, b)$ associa il valore della derivata $f'(x)$

$$x \in (a, b) \rightarrow f'(x) \in \mathbb{R}$$

Tale funzione viene detta **funzione derivata** e si indica con il simbolo $f'(x)$

Derivate delle funzioni elementari: funzione costante

Sia data la funzione costante $f(x) = k$.

Vediamo quanto vale la derivata della funzione costante $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{k - k}{h} = \frac{0}{h} = 0$$


$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$


$$Dk = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Derivate delle funzioni elementari: funzione costante

$$Dk = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Il risultato appena trovato ha un'interpretazione geometrica: il grafico della funzione costante $f(x) = k$ è una retta parallela all'asse delle ascisse



In ogni punto, la retta tangente coincide con il grafico della funzione



Il coefficiente angolare della retta tangente è



$$m_t = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

(infatti, $\tan 0 = 0$)

Derivate delle funzioni elementari: funzione lineare

Sia data la funzione bisettrice $f(x) = x$.

Vediamo quanto vale la derivata della funzione costante $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{x+h-x}{h} = \frac{h}{h} = 1$$


$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1$$


$$Dx = 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

Derivate delle funzioni elementari: funzione lineare

$$Dx = 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

Il risultato appena trovato ha un'interpretazione geometrica: il grafico della funzione $f(x) = x$ è la retta bisettrice del I e III quadrante



In ogni punto, la retta tangente coincide con il grafico della funzione



Il coefficiente angolare della retta tangente è



$$m_t = 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

(infatti, $\tan \frac{\pi}{4} = 1$)

Derivate delle funzioni elementari: funzione potenza

Sia data la funzione $f(x) = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, x > 0$.

Si può verificare che la derivata di tale funzione $\forall x \in \mathbb{R}^+$:

$$Dx^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}, \forall x > 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Esempio.

$f(x) = x^2$ nel punto $x_0 = 2$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} = \frac{(2 + h)^2 - (2)^2}{h} = \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} = \frac{h^2 + 4h}{h} = h + 4$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} h + 4 = 4$$

La funzione $f(x) = x^2$ è derivabile in $x_0 = 2$ e $f'(2) = 4$

Derivate delle funzioni elementari: funzione potenza

Sia data la funzione $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.

Ricordiamo: $Dx^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$D\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Derivate delle funzioni elementari: funzione potenza

Sia data la funzione $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$.

Ricordiamo: $Dx^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$

$$f(x) = x^{-1} \rightarrow f'(x) = -1x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$D \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}, \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Derivate delle funzioni elementari: regole di derivazione

$$Da^x = a^x \log a$$

$$D \sin x = \cos x$$

$$De^x = e^x$$

$$D \cos x = -\sin x$$

$$D \log_a x = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\log a}$$

$$D \log x = \frac{1}{x}$$

Derivate delle funzioni elementari

$f(x)$	$f'(x)$
k	0
x	1
x^n	nx^{n-1}
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$	$a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x} \cdot \log_a e = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}$
$\log_e x$	$\frac{1}{x} \cdot \log_e e = \frac{1}{x}$
a^x	$a^x \log_e a = a^x \cdot \frac{1}{\log_a e}$
e^x	$e^x \log_e e = e^x$

$f(x)$	$f'(x)$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$ x $	$\frac{x}{ x } = \frac{ x }{x}$
$ f(x) $	$f'(x)$ con $f(x) > 0$ $-f'(x)$ con $f(x) < 0$

Esercizi. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni

$$1. \quad f(x) = x^7 \quad f'(x) = 7x^{7-1} = 7x^6$$

$$2. \quad f(x) = x^{-2} \quad f'(x) = -2x^{-2-1} = -2x^{-3}$$

$$3. \quad f(x) = x^\pi \quad f'(x) = \pi x^{\pi-1}$$

$$4. \quad f(x) = 4 \quad f'(x) = 0$$

$$5. \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} \quad f'(x) = \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}$$

$$6. \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad f'(x) = -\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$$

$$7. \quad f(x) = x^{-2} \quad f'(x) = -2x^{-2-1} = -2x^{-3}$$

$$8. \quad f(x) = 3^x \quad f'(x) = 3^x \log_e 3$$

$$9. \quad f(x) = \log_5 |x| \quad \frac{1}{|x|} \cdot \log_5 e = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln 5}$$

$$10. \quad f(x) = e \quad f'(x) = 0$$

Derivata seconda – n-esima

A questo punto, ha senso chiedersi se la funzione derivata $f'(x)$ è a sua volta derivabile in un punto oppure in tutto l'intervallo (a, b) . In caso affermativo, chiameremo **derivata seconda** la derivata di f' e la indicheremo:

$$f''(x)$$

$$D^2 f(x)$$

In modo analogo, si definiscono le funzioni derivata terza $f'''(x)$, derivata quarta $f^{IV}(x)$, e di ordine ancora superiore, in generale derivata n-esima:

$$f^n(x)$$

$$D^n f(x)$$

- **REGOLE DI CALCOLO**

Regole di calcolo delle derivate (somma, prodotto, rapporto)

Se $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ sono due funzioni derivabili in (a, b)

$$f \pm g, \quad f \cdot g, \quad \frac{f}{g}, (\text{con } g \neq 0)$$

Sono derivabili in (a, b) e valgono le seguenti formule:

$$\triangleright (f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$\triangleright (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \rightarrow (k \cdot f)' = k \cdot f'$$

$$\triangleright \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \rightarrow \left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$$

Esercizi. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni

$$f(x) = 4x^2 + 4$$

$$\frac{d}{dx}(4x^2) + \frac{d}{dx}(4) =$$

$$f'(x) = 4 \cdot 2x^{2-1} + 0 = 8x$$

$$f(x) = \sqrt{x} + x^{2/3}$$

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) + \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{2}{3}}\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} + \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{1}{2x^{1/2}} + \frac{2}{3x^{1/3}}$$

$$f(x) = -x^{-2} + 3x^3$$

$$\frac{d}{dx}(-x^{-2}) + \frac{d}{dx}(3x^3) =$$

$$f'(x) = - -2x^{-2-1} + 3 \cdot 3x^{3-2} = 2x^{-3} + 9x$$

Esercizi. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni

$$f(x) = \log x - e^x$$

$$\frac{d}{dx}(\ln x) - \frac{d}{dx}(e^x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - e^x$$

$$f(x) = x \cdot e^x$$

$$e^x \frac{dx}{dx} + x \frac{d}{dx}(e^x)$$

$$f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = e^x + xe^x$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$f(x) = x^2 \cdot (x + 1)$$

$$(x + 1) \frac{d}{dx} x^2 + x^2 \frac{d}{dx} (x + 1)$$

$$f'(x) = 2x \cdot (x + 1) + x^2 \cdot (1) = 2x^2 + 2x + x^2 = 3x^2 + 2x$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x}$$

$$\frac{\frac{d}{dx}(x-1) \cdot x - \frac{dx}{dx}(x-1)}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot x - 1 \cdot (x-1)}{x^2} = \frac{1}{x^2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \rightarrow \left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$$

Regole di derivazione

$f(x)$	$f'(x)$
$[f(x)]^\alpha$	$\alpha \cdot f(x)^{\alpha-1} \cdot f'(x)$
$\sqrt{f(x)}$	$\frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x)$
$\frac{1}{f(x)}$	$-\frac{1}{f^2(x)} \cdot f'(x)$
$\alpha^{f(x)}$	$\alpha^{f(x)} \log \alpha \cdot f'(x)$
$e^{f(x)}$	$e^{f(x)} \cdot f'(x)$
$\log_a f(x)$	$\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{\log a} \cdot f'(x)$
$\log f(x)$	$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$