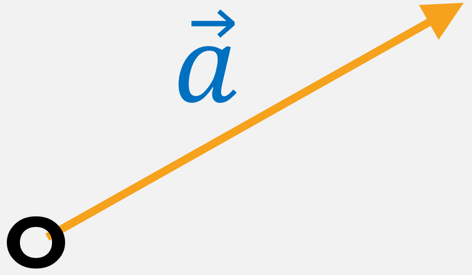
CINEMATICA pt.1

- Vettori
- Vettori posizione, spostamento, velocità e accelerazione
- Relazioni grafiche: posizione-velocità e velocità-accelerazione
- Esempi

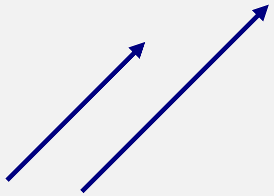
I VETTORI



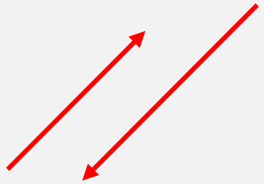
Vettore $\vec{a}$ o $\boldsymbol{a}$.

Il modulo del vettore è $\overrightarrow{|a|} = a$ e graficamente corrisponde alla lunghezza della freccia.

L’origine del vettore è il punto **O**.



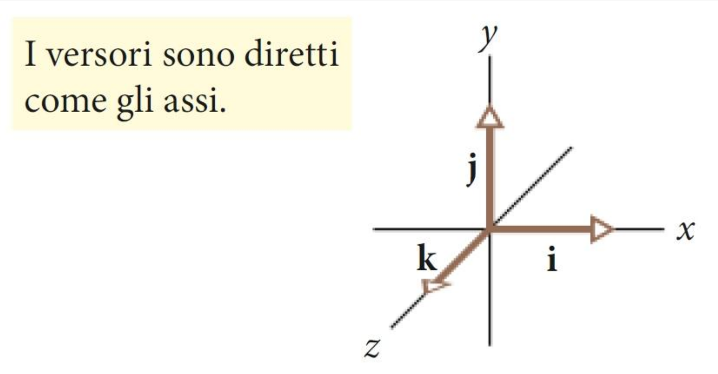
CONCORDI
(paralleli)
stessa direzione e stesso verso



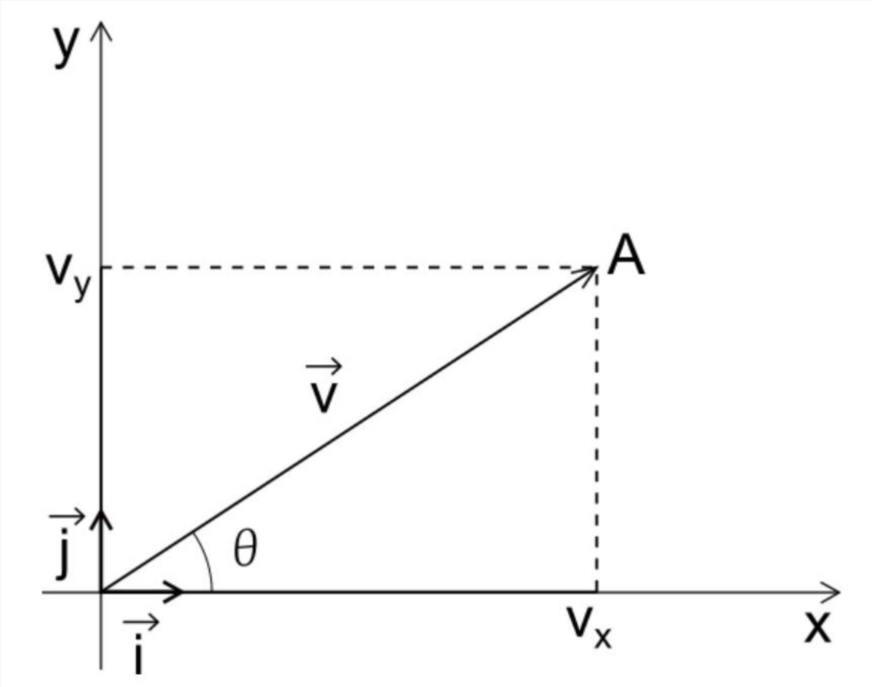
DISCORDI
(anti-paralleli)
stessa direzione ma verso opposto

EQUIPOLLENTI
Uguali in modulo, verso e direzione

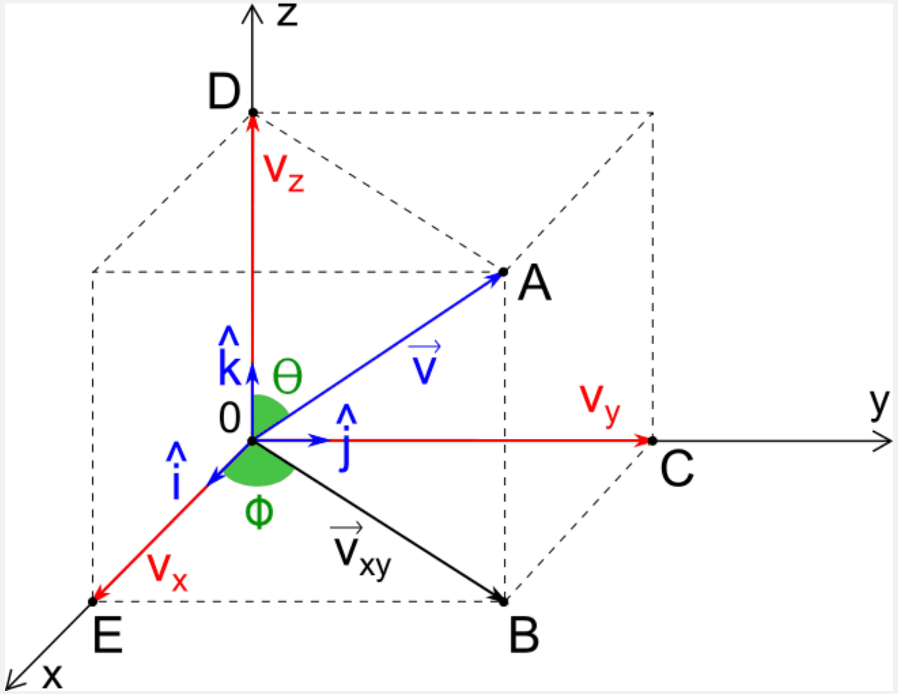
Vettori componenti / Proiezioni su x, y (z)



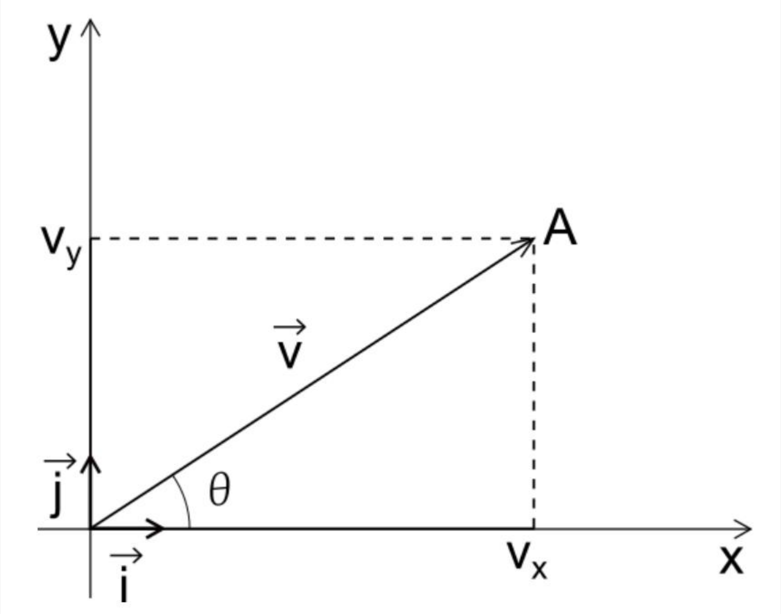
Sistema di riferimento <u>bidimensionale</u>

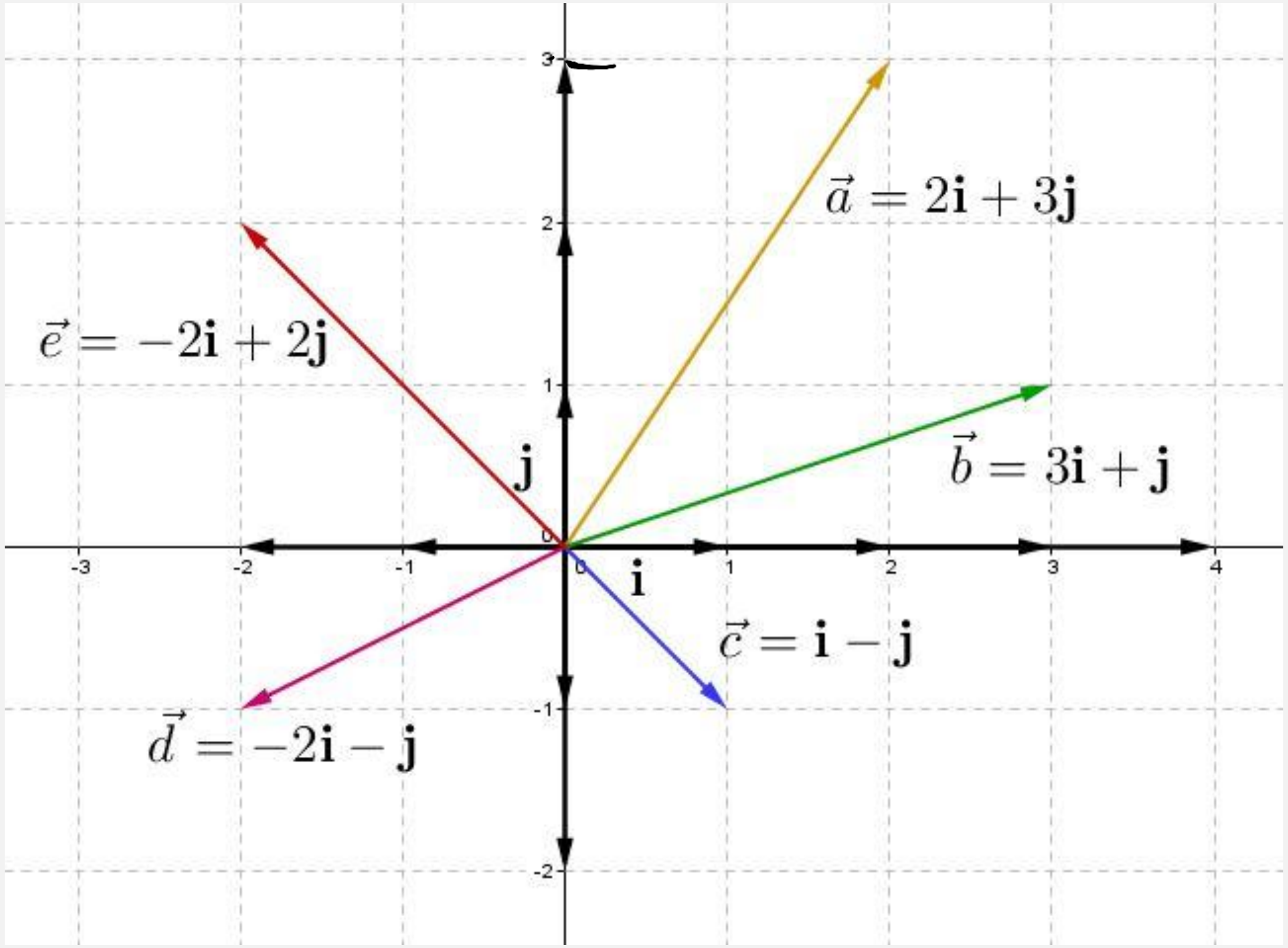


Sistema di riferimento <u>tridimensionale</u>

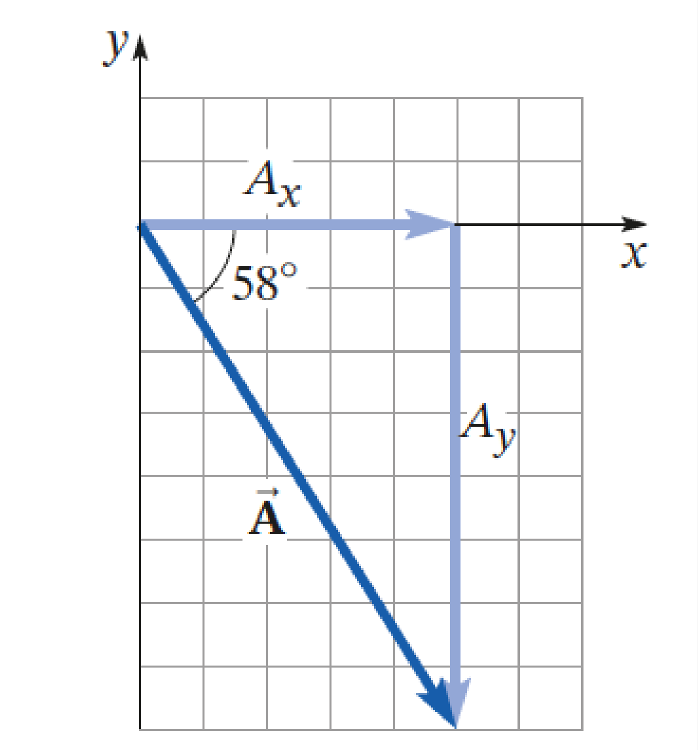


Vettori componenti / Proiezioni su x, y (z)





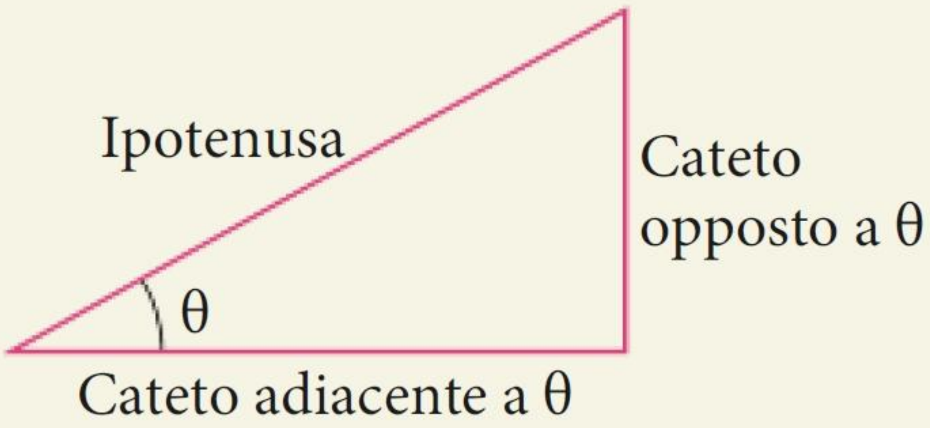
Vettori componenti / Proiezioni su x, y (z)



$$\sin\theta = \frac{\text{cateto opposto a }\theta}{\text{ipotenusa}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{cateto adiacente a }\theta}{\text{ipotenusa}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{cateto opposto a }\theta}{\text{cateto adiacente a }\theta}$$



OPERAZIONI TRA VETTORI

Algebra con le componenti

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$$

r è uguale al vettore (***a***+***b***): se questo è vero, ogni componente di ***r*** deve coincidere con la corrispondente componente di (***a***+***b***)

$$r_x = a_x + b_x$$

$$r_y = a_y + b_y$$

$$r_z = a_z + b_z$$

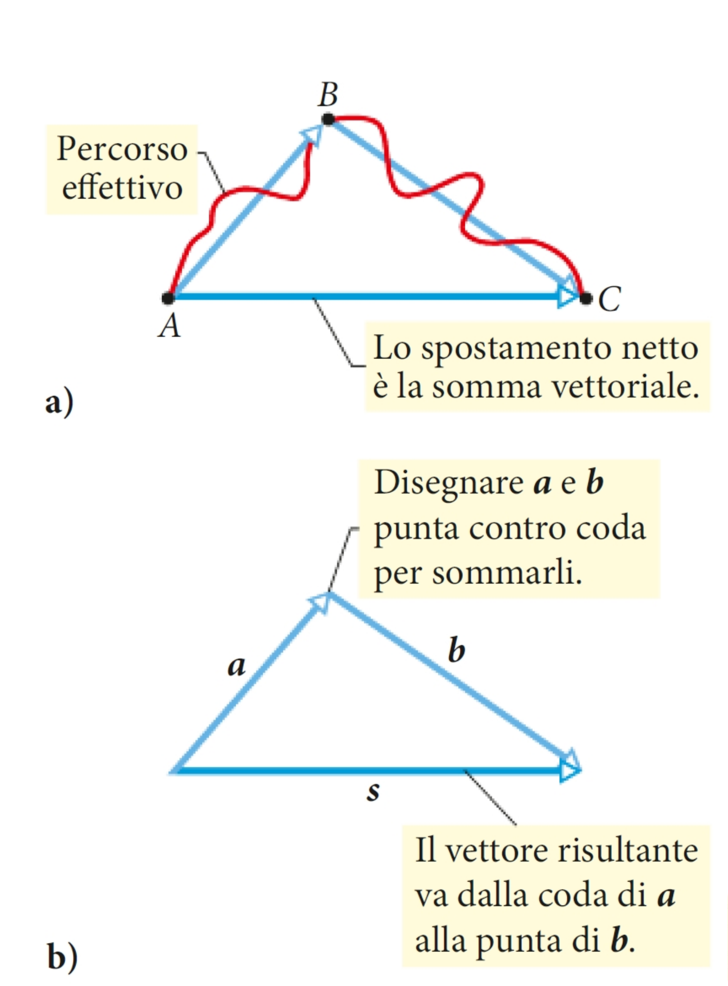
Due vettori sono uguali se le rispettive componenti sono tutte uguali fra loro

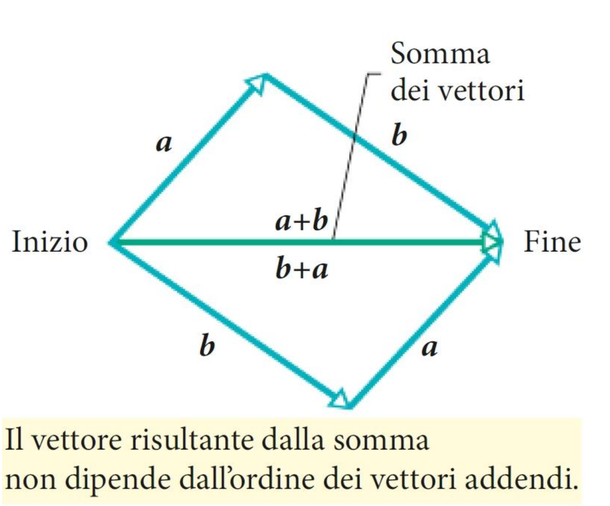
$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b}) \longrightarrow d_x = a_x - b_x \qquad d_y = a_y - b_y \qquad d_z = a_z - b_z$$

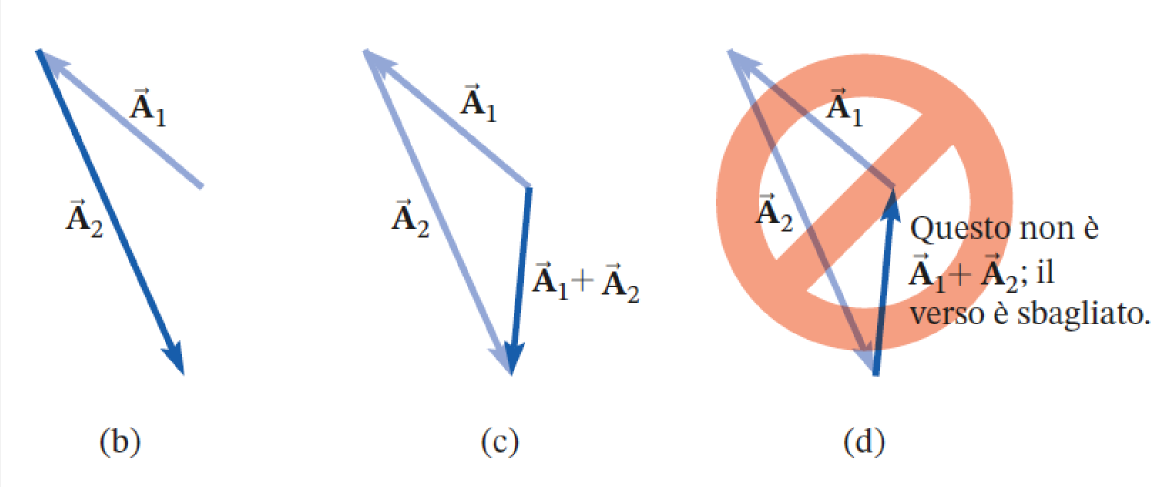
dove $\boldsymbol{d} = d_x\boldsymbol{i} + d_y\boldsymbol{j} + d_z\boldsymbol{k}$

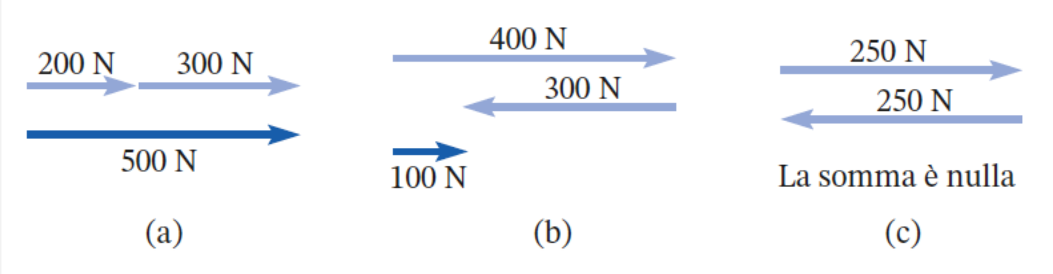
OPERAZIONI TRA VETTORI

Somma tra vettori

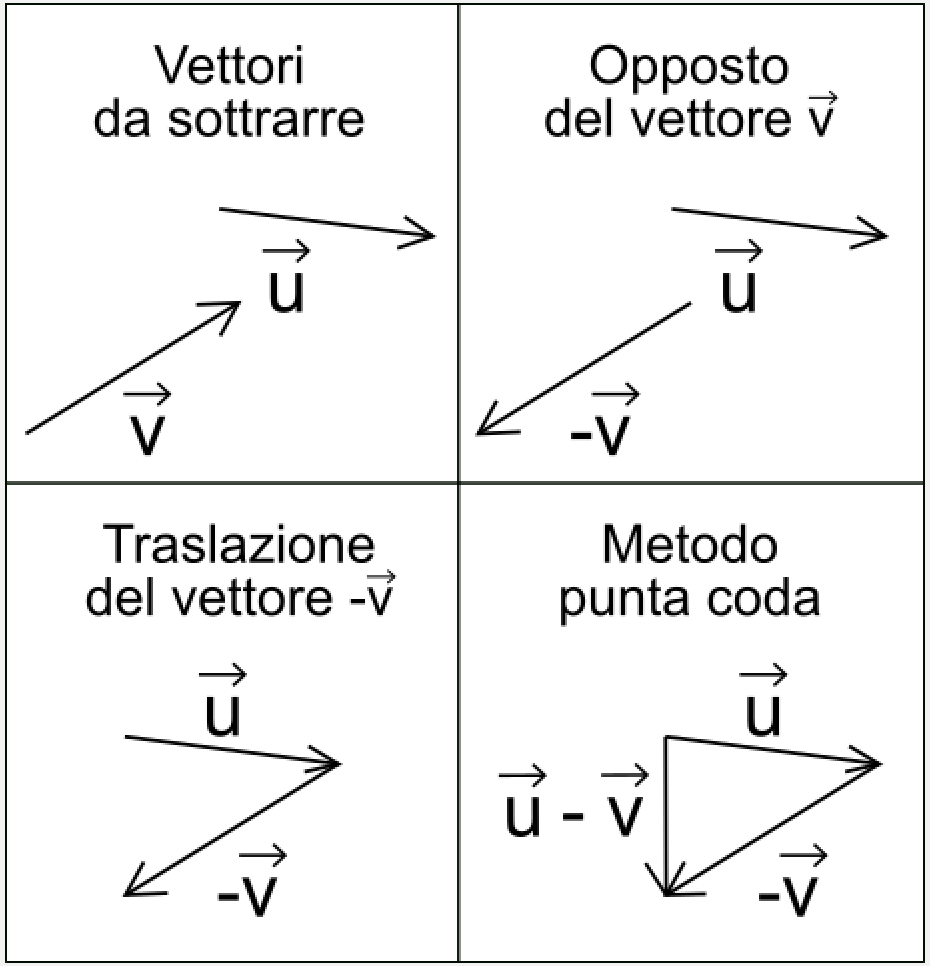


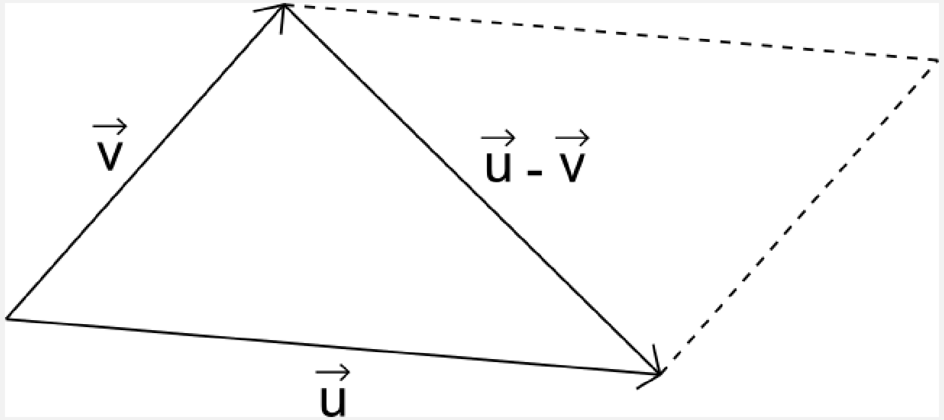


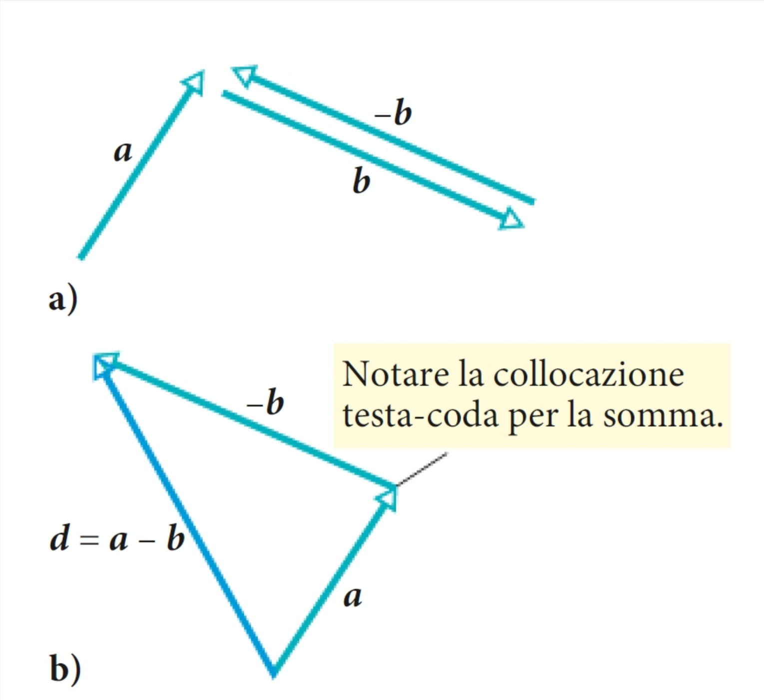




Differenza tra vettori

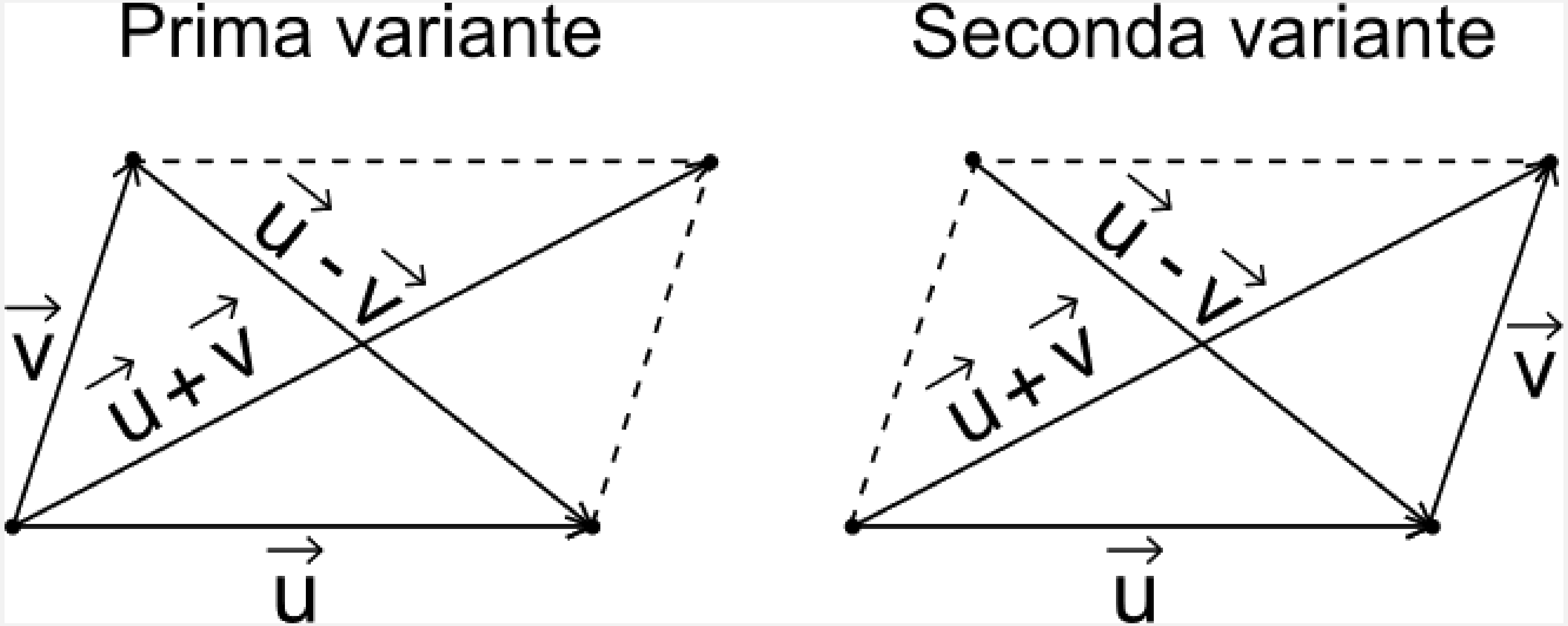






OPERAZIONI TRA VETTORI

Differenza tra vettori

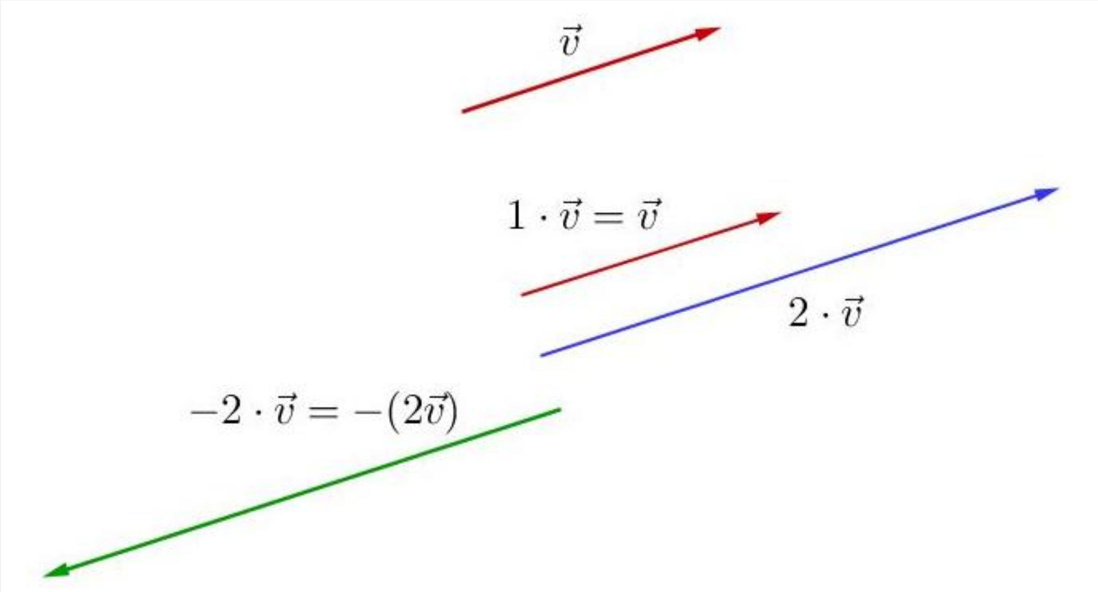


OPERAZIONI TRA VETTORI

Moltiplicazione tra vettori

OPERAZIONI TRA VETTORI

Prodotto tra vettore e scalare

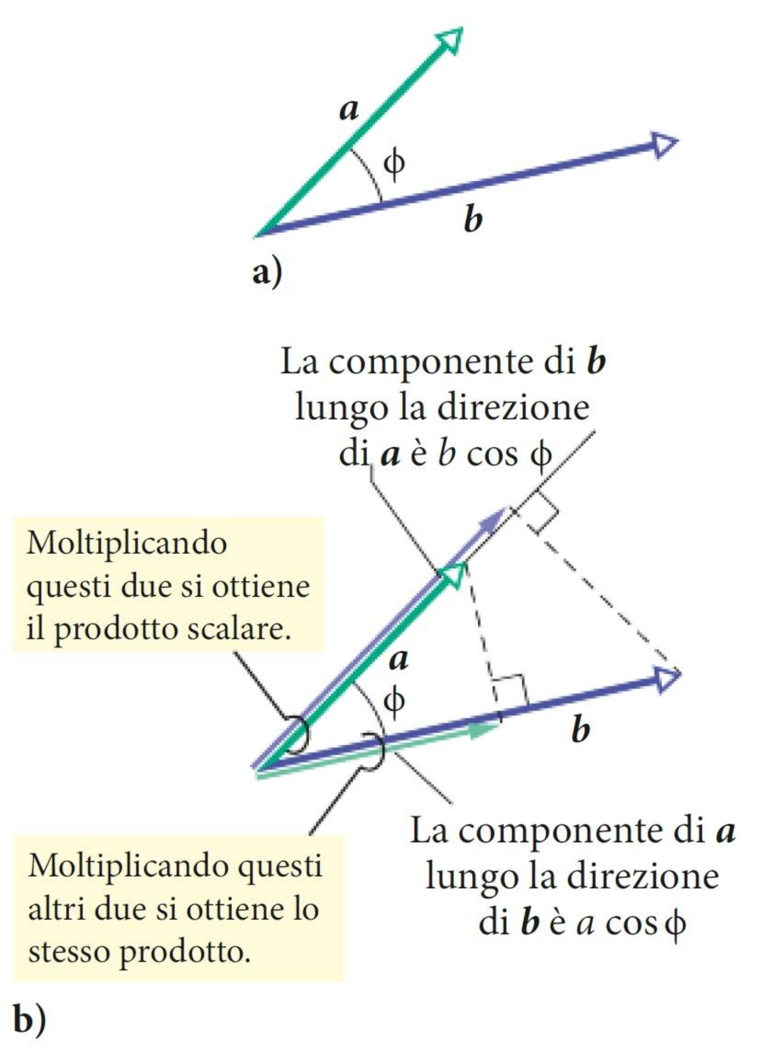


Il vettore $\vec{v}$ ha

- la **stessa direzione** di $\vec{u}$
- lo **stesso verso** di $\vec{u}$ se $k > \mathbf{0}$, **verso opposto** se $k < \mathbf{0}$
- modulo $k|\vec{u}| = ku$

OPERAZIONI TRA VETTORI

Prodotto scalare (es. $\mathrm{L} = \vec{\mathrm{F}} \times \overrightarrow{\Delta \mathrm{r}}$)



Prodotto scalare dei vettori ***a*** e ***b*** («***a*** scalare ***b***»):

$$\boxed{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ab\ cos\phi}$$

Tutti i termini a destra sono scalari,
quindi il prodotto $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ è uno scalare!

Notazione dei versori:

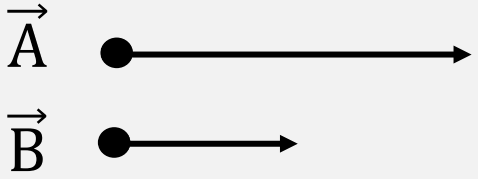
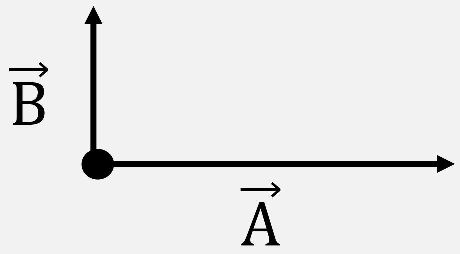
$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}) \cdot (b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k})$$

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$$

[proprietà distributiva]

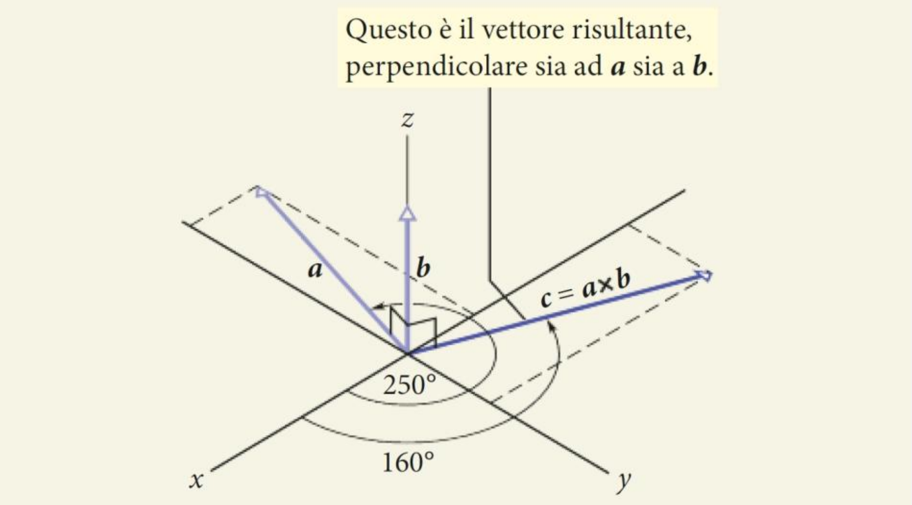
OPERAZIONI TRA VETTORI

<u>Prodotto scalare</u> (es. $L = \vec{F} \times \overrightarrow{\Delta r}$)

	ϕ	$\cos\phi$	$A \cdot B \cdot \cos\phi$
	0°	1	AB
	90°	0	0
	180°	-1	-AB

OPERAZIONI TRA VETTORI

Prodotto vettoriale (Es. $\overrightarrow{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}$)



Prodotto vettoriale dei vettori ***a*** e ***b*** («***a*** vettore ***b***») → vettore ***c*** il cui modulo è:

$$\boxed{\boldsymbol{c} = ab\, sin\phi}$$

No proprietà commutativa: $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$

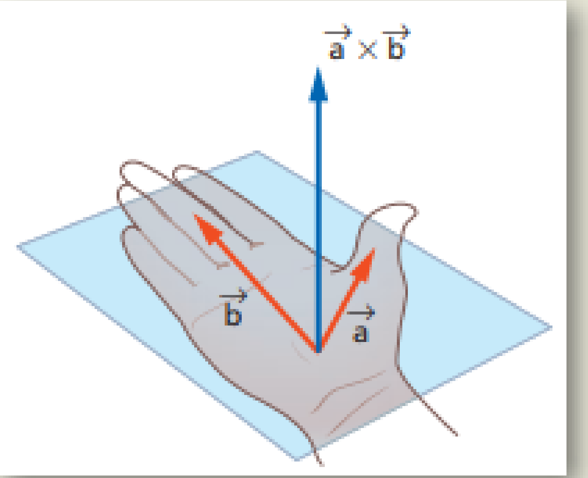
Sì proprietà distributiva: $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$

Prodotto vettoriale

Il prodotto vettoriale di due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ è il vettore $\vec{c}$ che ha:

- **modulo** uguale ad $ab \operatorname{sen} \alpha$;
- **direzione** perpendicolare al piano individuato dai due vettori;
- **verso** dato dalla regola della mano destra, illustrata nella figura.

Si indica con $\vec{a} \times \vec{b}$.

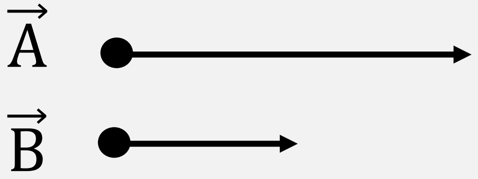
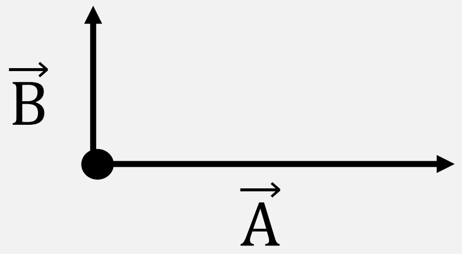


Con ***a*** // ***b*** → ***a*** × ***b*** = 0

Con ***a*** ⊥ ***b*** → |***a*** × ***b***| = max

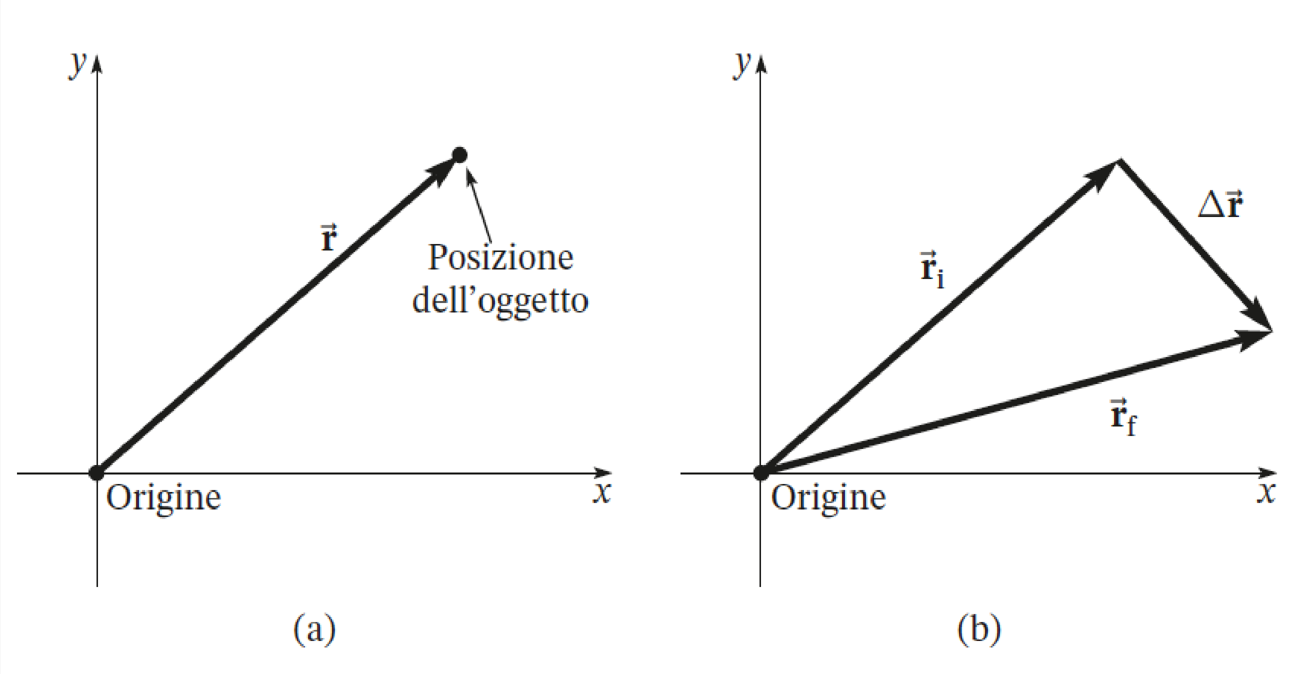
OPERAZIONI TRA VETTORI

<u>Prodotto vettoriale</u> (Es. $\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}$)

	ϕ	$\text{sen}\,\phi$	$A \cdot B \cdot \text{sen}\,\phi$
	0°	0	0
	90°	1	AB
	180°	0	0

CINEMATICA
VETTORI POSIZIONE SPOSTAMENTO, VELOCITÀ E ACCELERAZIONE

Vettore posizione – Vettore spostamento



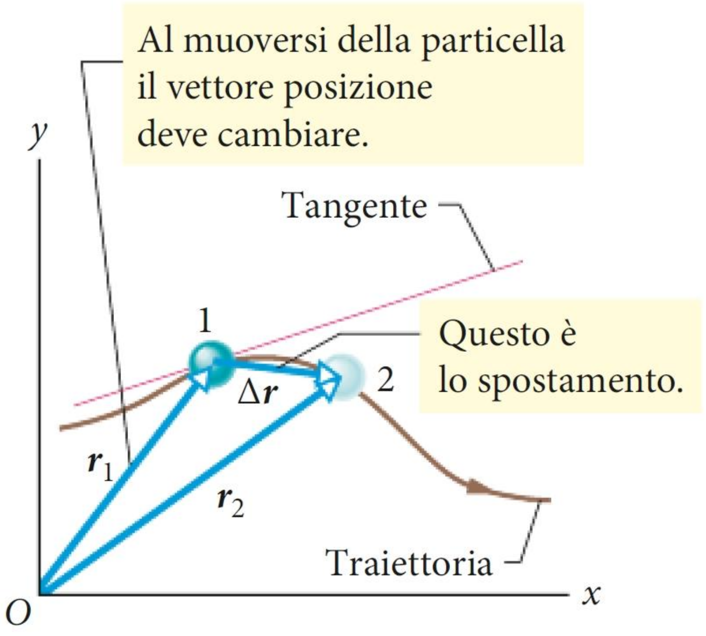


Figura 4.3 Lo spostamento $\Delta \boldsymbol{r}$ di una particella nell'intervallo di tempo Δt dalla posizione 1, con vettore posizione $\boldsymbol{r}_1$ all'istante di tempo t_1, alla posizione 2, con vettore posizione $\boldsymbol{r}_2$ all'istante di tempo t_2. È disegnata anche la tangente alla traiettoria nella posizione 1.

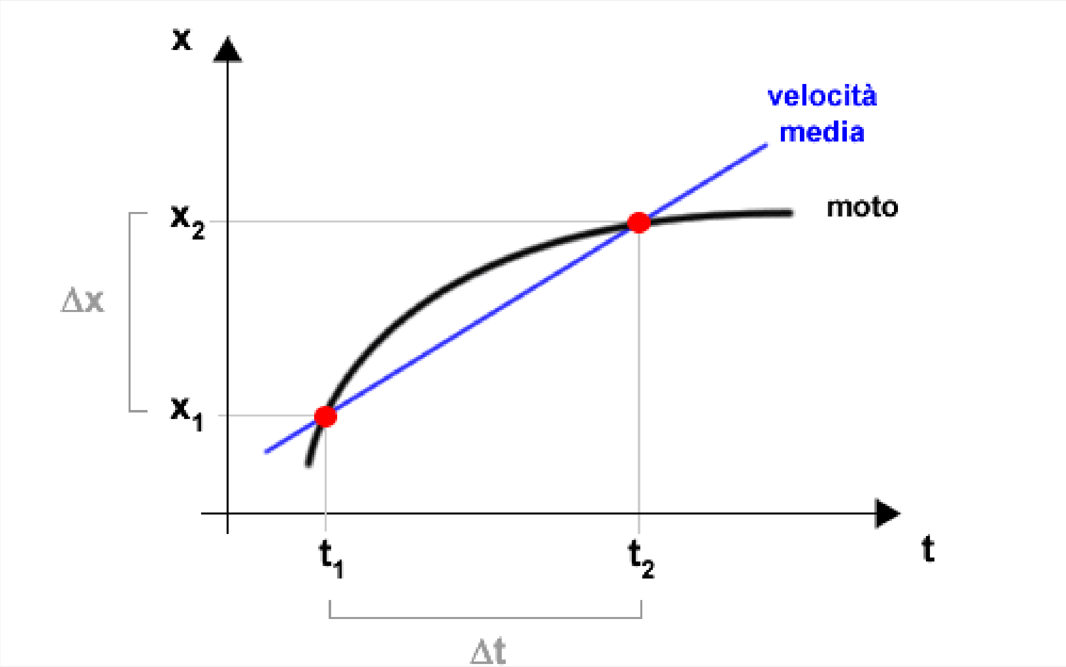
$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$ **Vettore posizione**

$$\Delta\vec{r} = (x_f - x_i)\cdot\hat{\imath} + (y_f - y_i)\cdot\hat{\jmath} = \Delta x\cdot\hat{\imath} + \Delta y\cdot\hat{\jmath}$$

Vettore spostamento

VETTORI POSIZIONE SPOSTAMENTO, VELOCITÀ E ACCELERAZIONE

Vettore velocità media



$$\boxed{\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_f - \vec{r}_i}{t_f - t_i}} \qquad [L]/[t] = [Lt^{-1}]$$

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta x\boldsymbol{i} + \Delta y\boldsymbol{j} + \Delta z\boldsymbol{k}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\boldsymbol{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\boldsymbol{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\boldsymbol{k}$$

$$v_{m,x} = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \qquad v_{m,y} = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

La velocità media non fa riferimento alla *traiettoria*!

Velocità: grandezza vettoriale

<u>Modulo</u>: rapidità con cui il corpo si muove

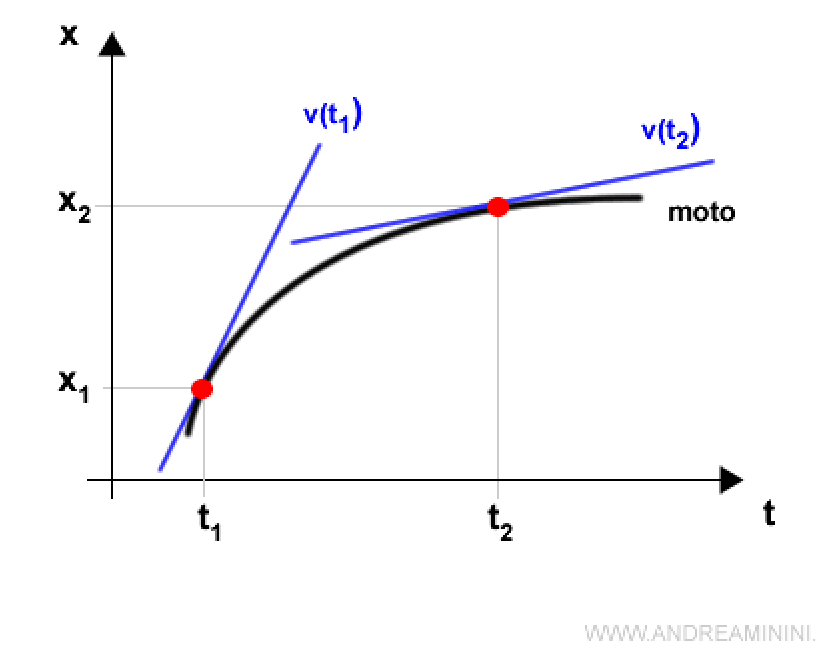
<u>Direzione</u>: retta su cui avviene lo spostamento

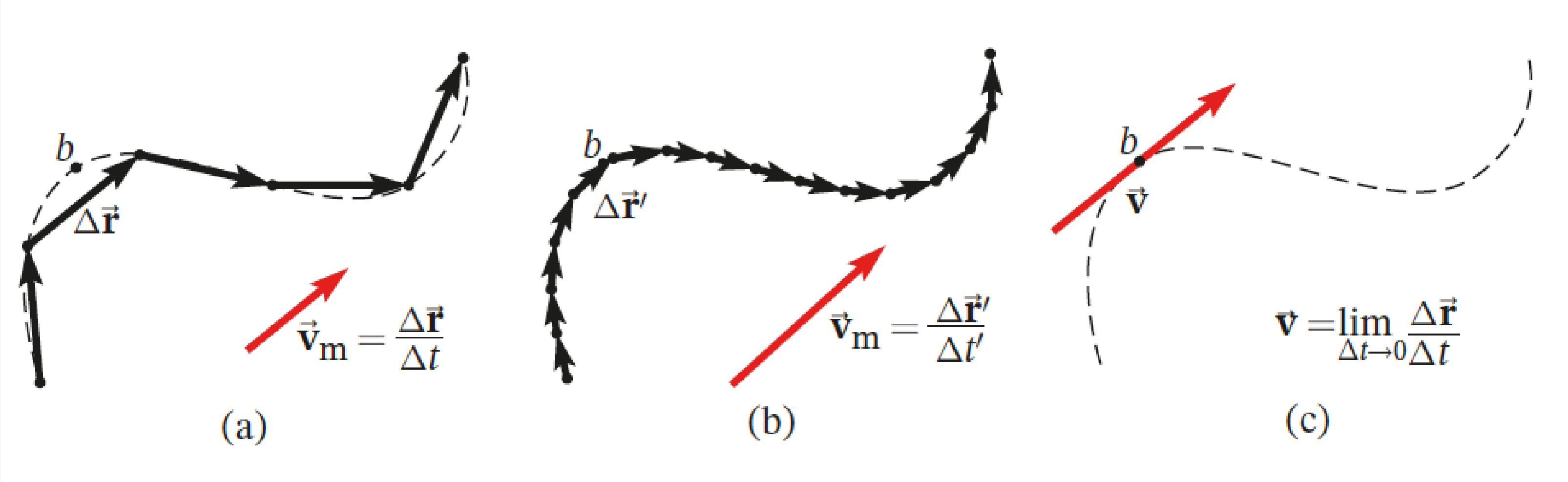
<u>Verso</u>: verso dello spostamento. $\longrightarrow$ $\frac{1}{\Delta t} \cdot \Delta\vec{r}$

<u>Traiettoria</u>: insieme di punti in cui è venuto a trovare l'oggetto durante il movimento.

VETTORI POSIZIONE SPOSTAMENTO, VELOCITÀ E ACCELERAZIONE

Vettore velocità istantanea





$$\boxed{\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}}$$

In forma scalare:

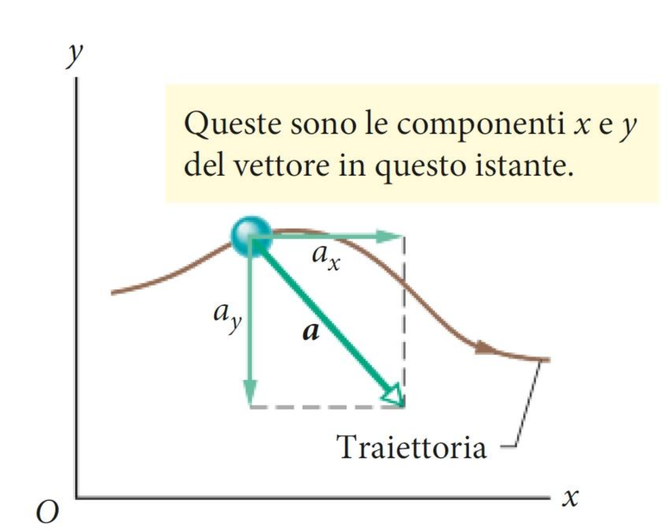
$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad , \qquad v_y = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

Stessa direzione e stesso verso dello spostamento in quell'istante

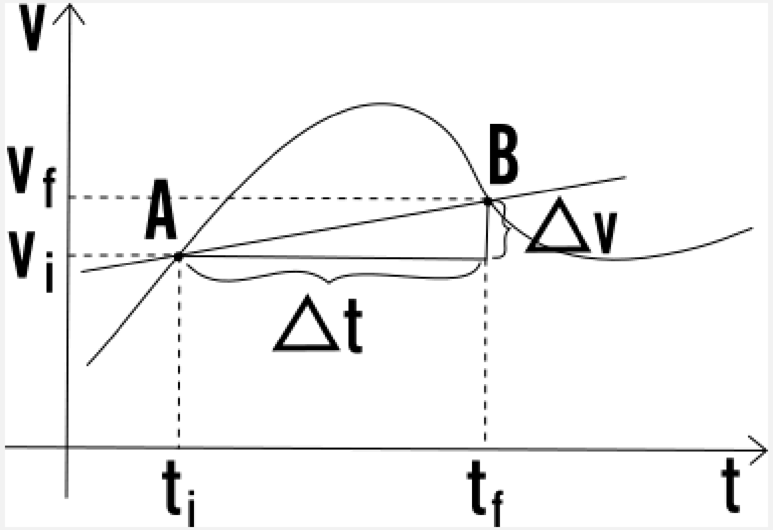
VETTORI POSIZIONE SPOSTAMENTO, VELOCITÀ E ACCELERAZIONE

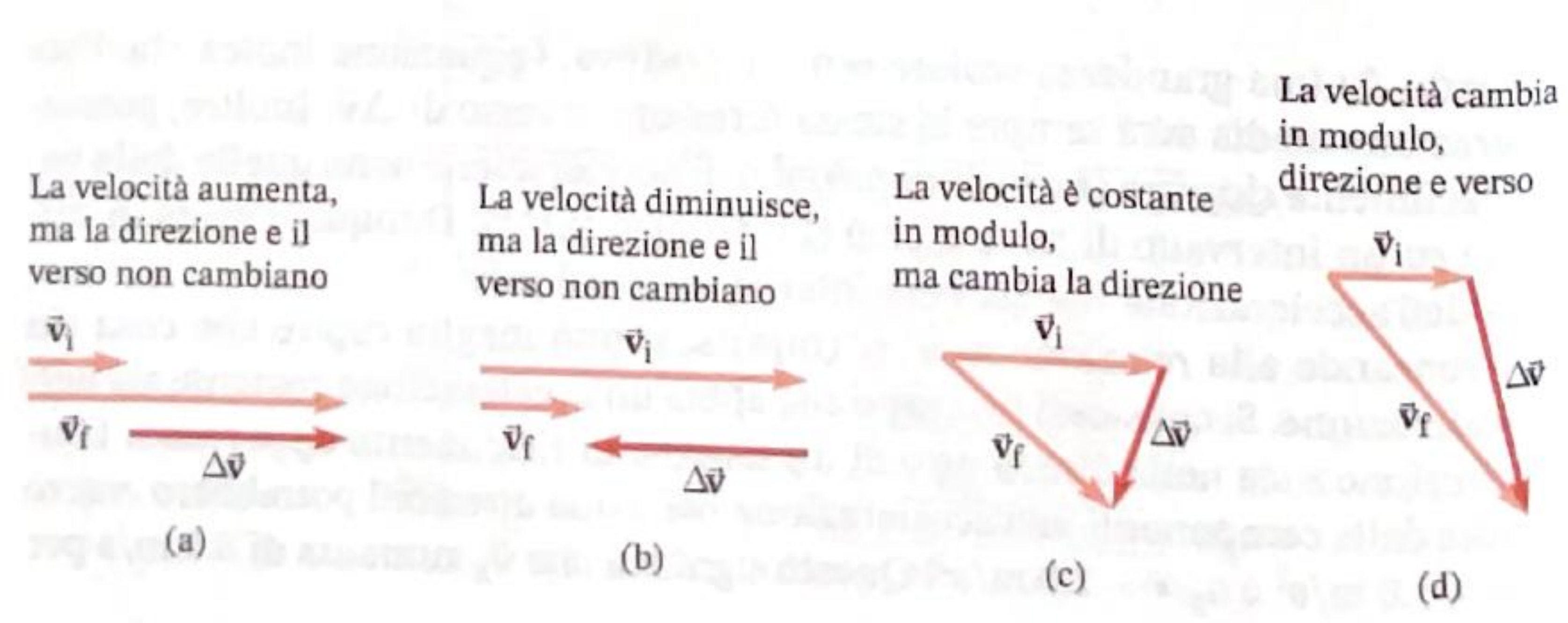
Vettore accelerazione media

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \qquad a_{m,x} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}, a_{m,y} = \frac{\Delta v_y}{\Delta t}$$



Stessa direzione e stesso verso di $\Delta\vec{v}$ $\quad [Lt^{-1}]/[t] = [Lt^{-2}]$



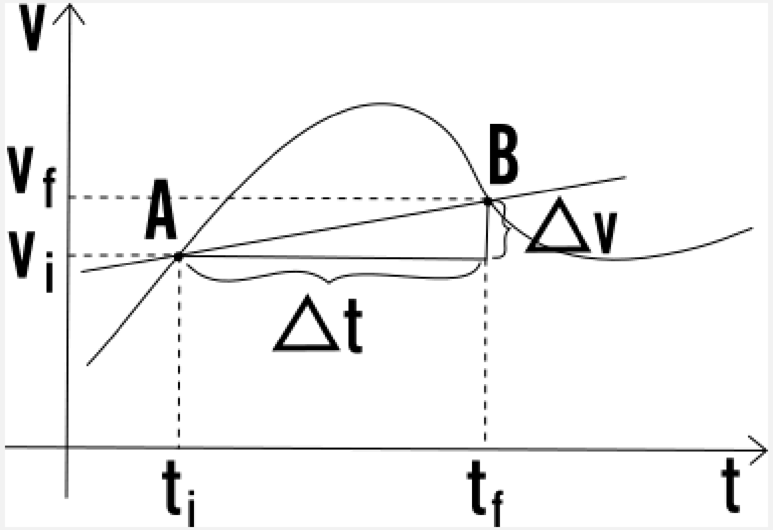


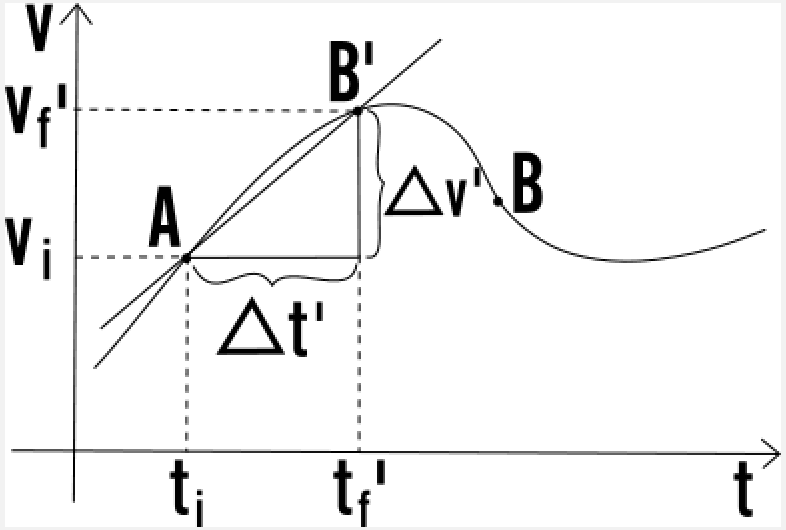
VETTORI POSIZIONE SPOSTAMENTO, VELOCITÀ E ACCELERAZIONE

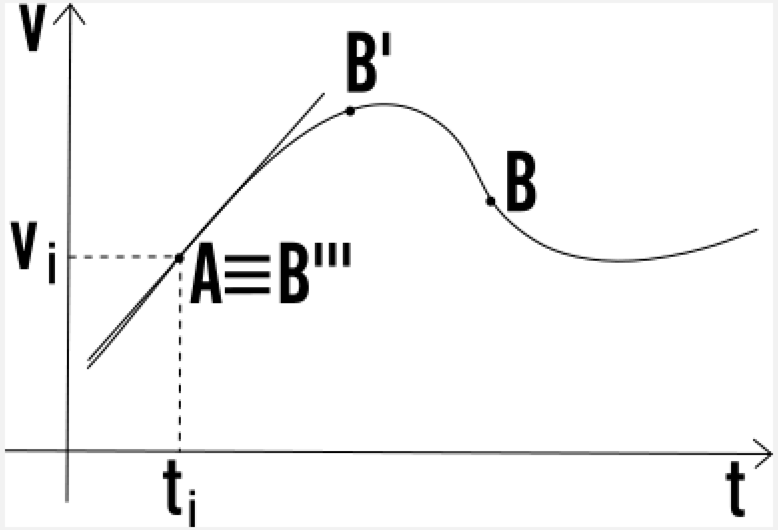
Vettore accelerazione istantanea

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \quad , \quad a_y = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta t}$$



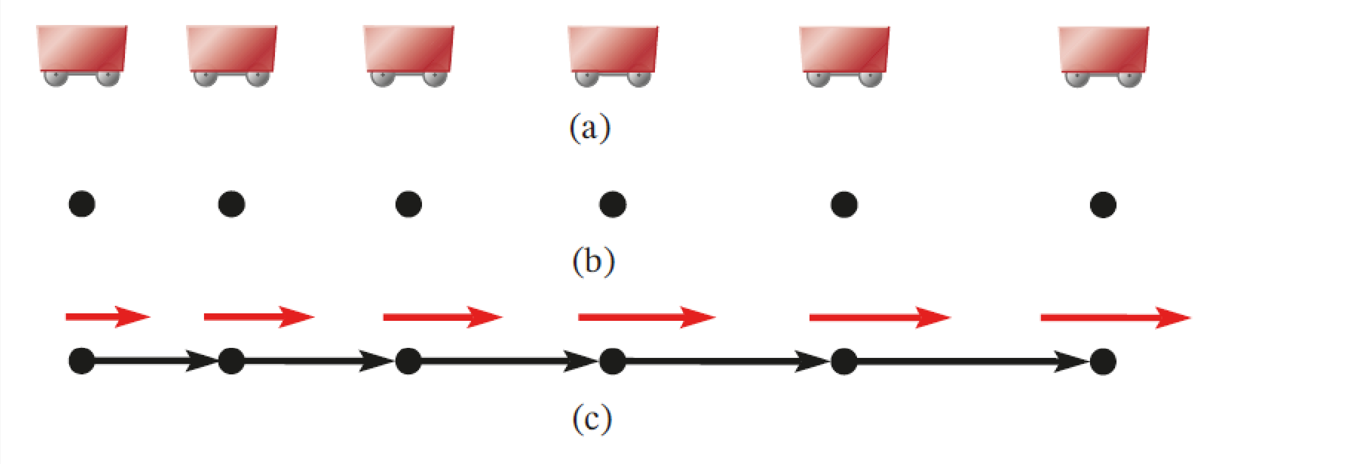


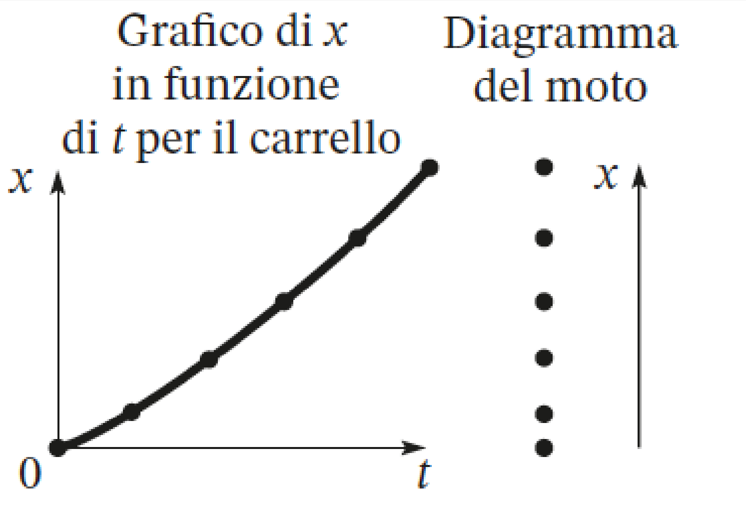


VETTORI POSIZIONE SPOSTAMENTO, VELOCITÀ E ACCELERAZIONE

Diagramma del moto

Un diagramma del moto mostra la posizione dell'oggetto in funzione del tempo

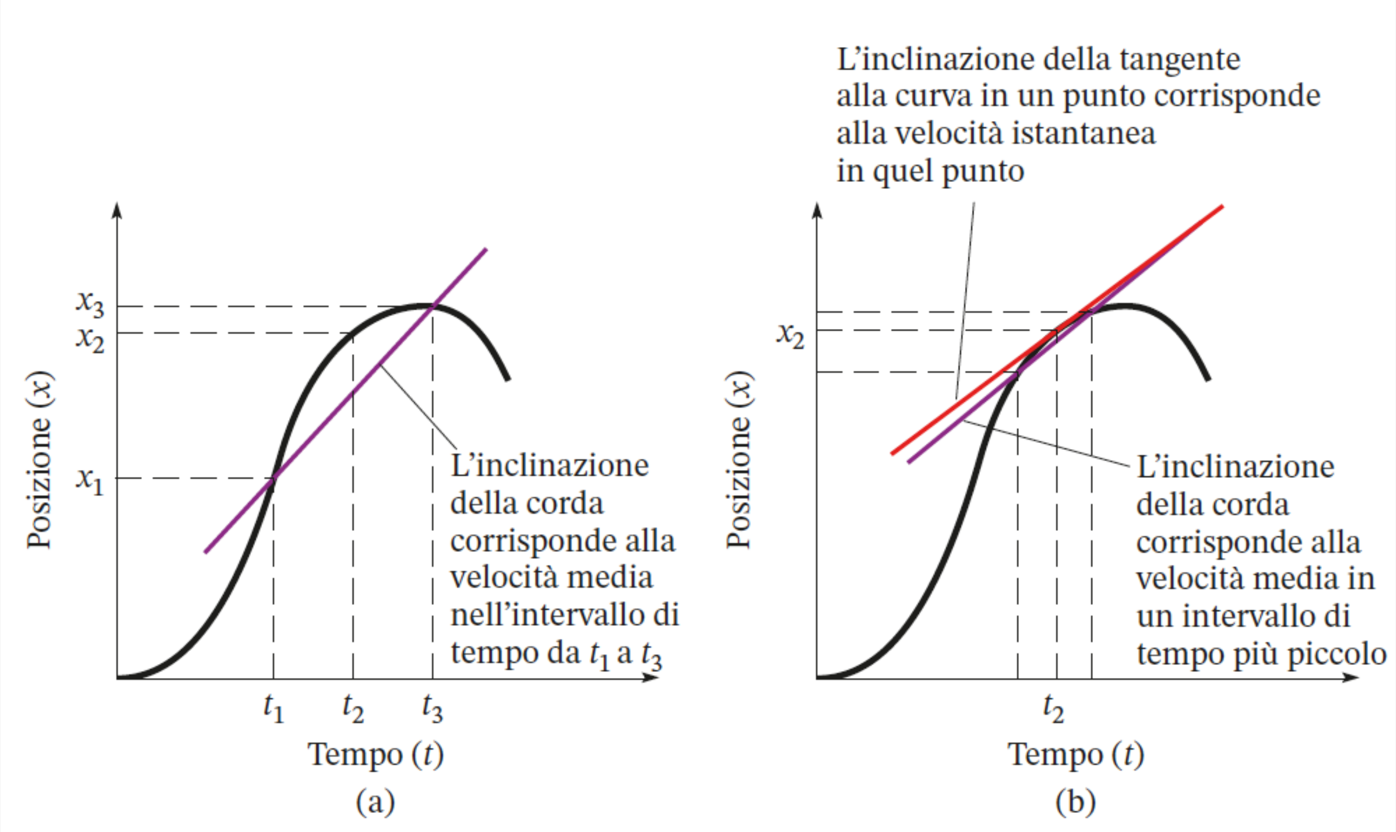




x : modulo della posizione dell'oggetto

VETTORI POSIZIONE SPOSTAMENTO, VELOCITÀ E ACCELERAZIONE

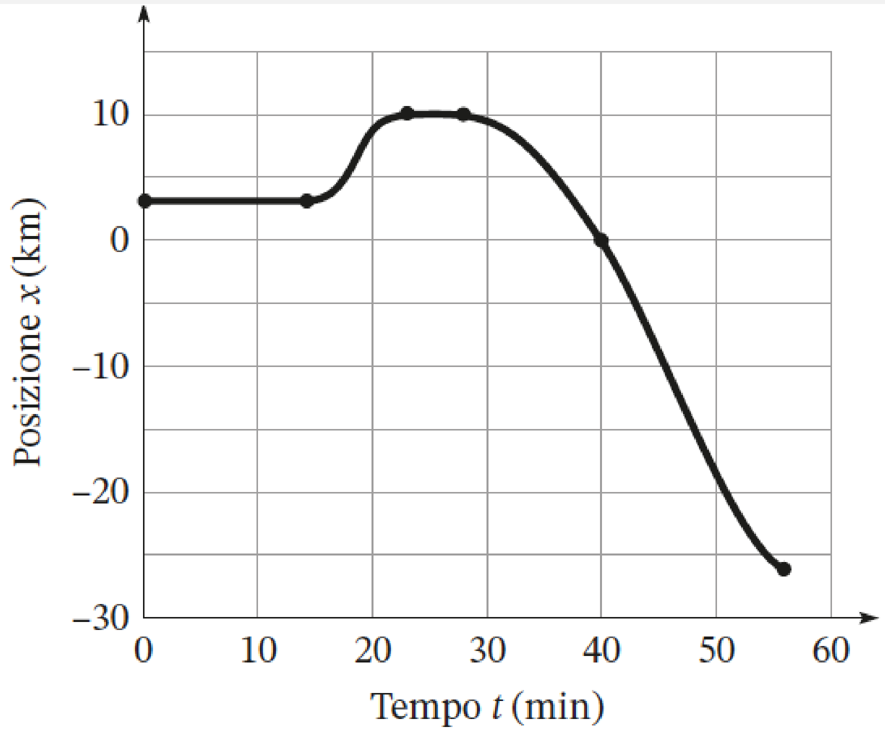
Relazione grafica tra posizione e velocità



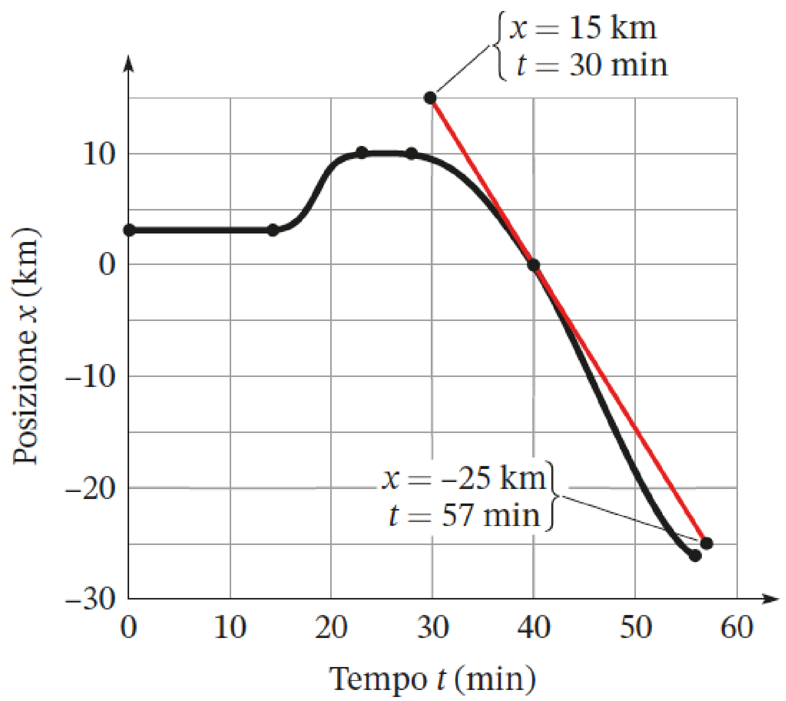
VETTORI POSIZIONE SPOSTAMENTO, VELOCITÀ E ACCELERAZIONE

Esempio

Utilizzare il grafico per determinare la velocità del treno nell'istante t = 40 min

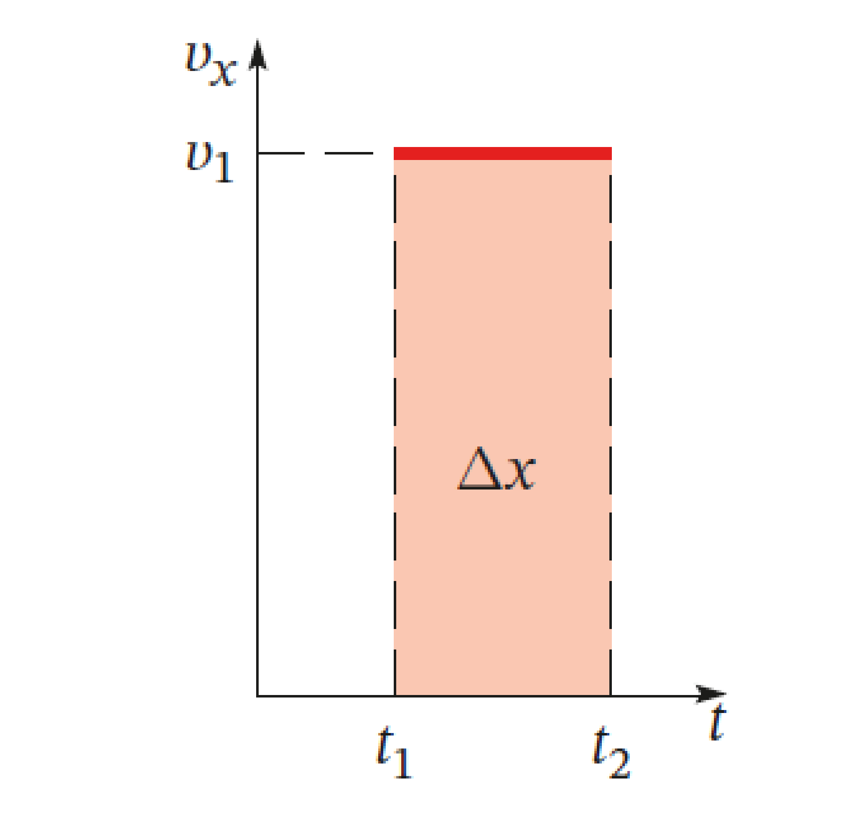


x (km)	t (min)
+3	0
+3	14
+10	23
+10	28
0	40
–26	56



VETTORI POSIZIONE SPOSTAMENTO, VELOCITÀ E ACCELERAZIONE

Relazione grafica tra posizione, tempo e velocità

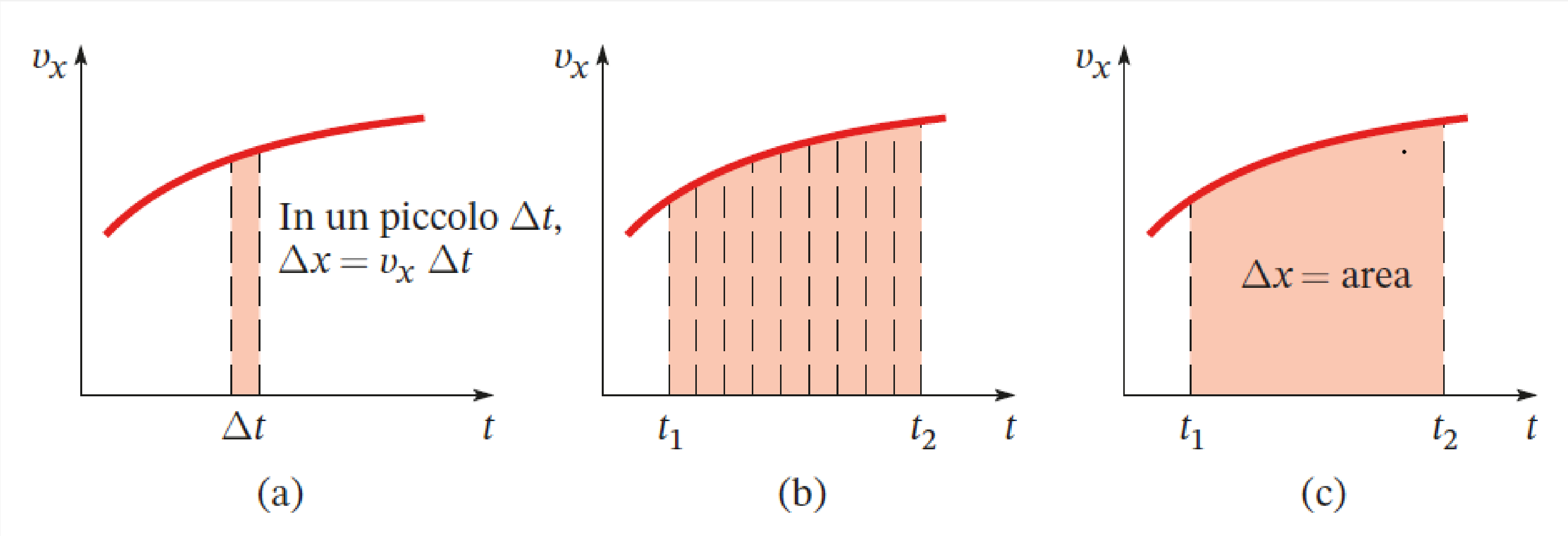


$$v_x = v_{m,x} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$\Delta x = v_x \Delta t \ (per\ v_x costante)$$

VETTORI POSIZIONE SPOSTAMENTO, VELOCITÀ E ACCELERAZIONE

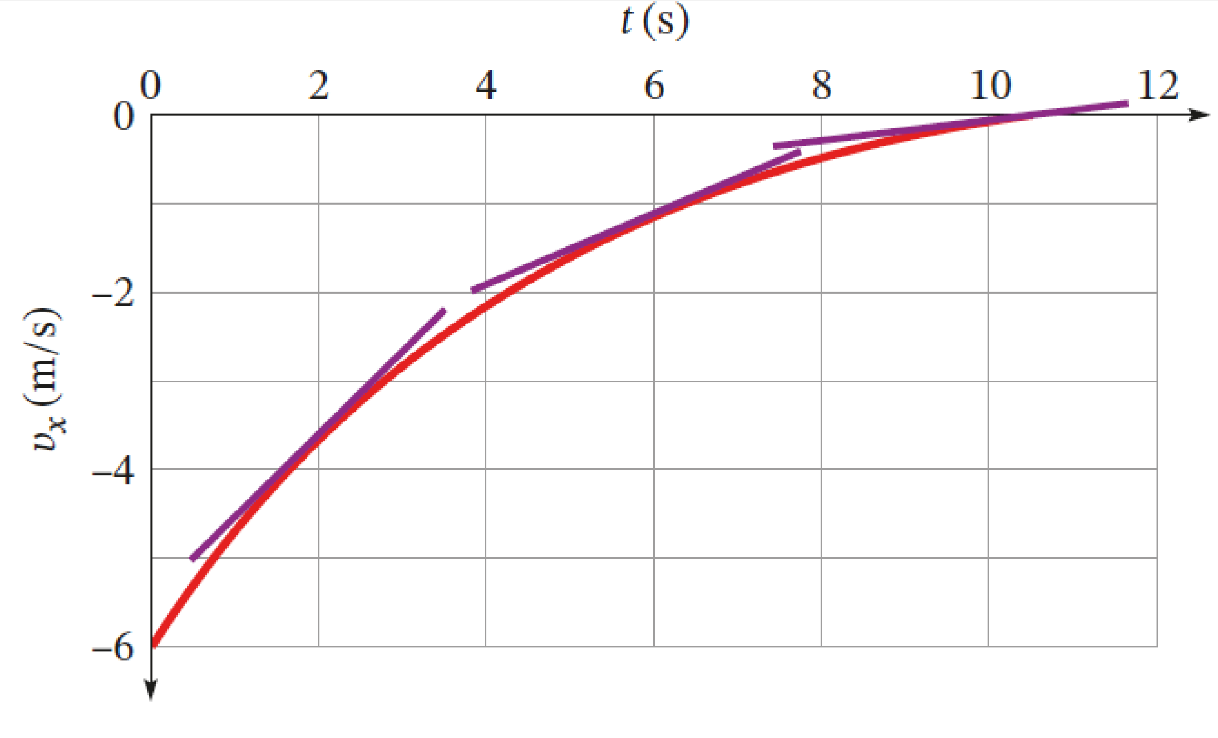
Relazione grafica tra posizione, tempo e velocità



$per\ v_x\ non\ costante$

VETTORI POSIZIONE SPOSTAMENTO, VELOCITÀ E ACCELERAZIONE

Relazione grafica tra velocità e accelerazione



Stessa relazione grafica vista per spostamento e velocità:

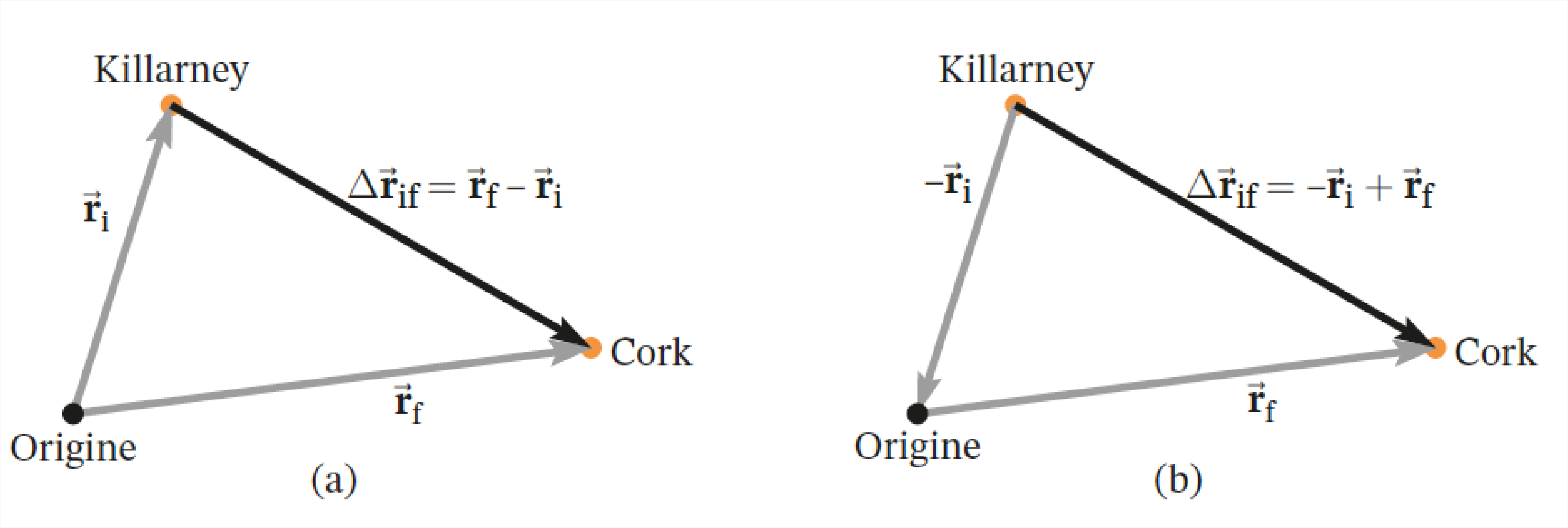
✓ a_x è l'inclinazione della tangente in un punto dato della curva $v_x(t)$

✓ Δv_x è l'area sottesa alla curva $a_x(t)$ in un certo intervallo di tempo

VETTORI POSIZIONE SPOSTAMENTO, VELOCITÀ E ACCELERAZIONE

Esempio

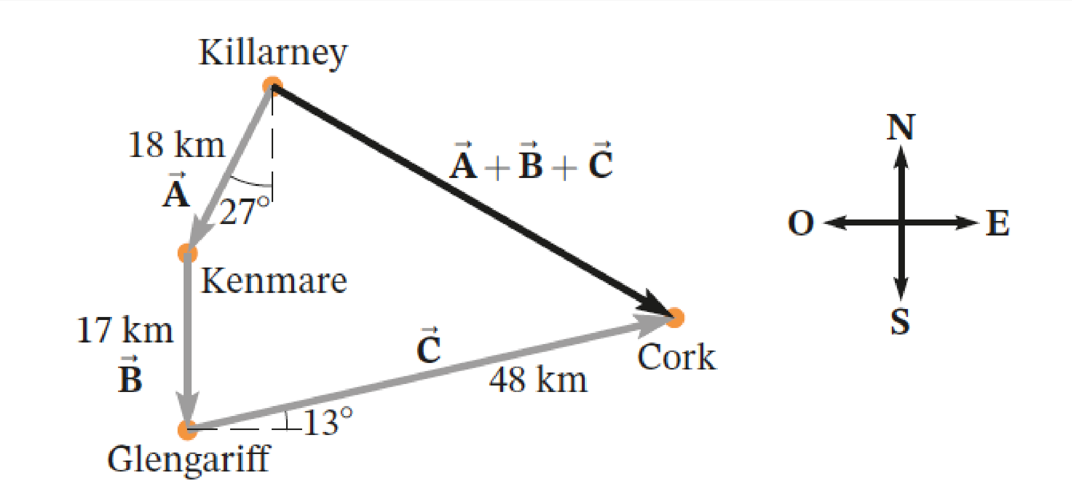
Due amiche stanno viaggiando in Irlanda e si muovano da Killarney a Cork.



VETTORI POSIZIONE SPOSTAMENTO, VELOCITÀ E ACCELERAZIONE

Esempio

Durante il viaggio da Killarney a Cork, le due amiche si muovono per 18 km lungo una direzione a 27° ovest da sud fino a Kenmare, quindi verso sud per 17 km fino a Glengariff e, infine, per 48 km lungo una direzione a 13° nord da est fino a Cork. Qual è lo spostamento totale (in termini di intensità, direzione e verso) delle due ragazze?



VETTORI POSIZIONE SPOSTAMENTO, VELOCITÀ E ACCELERAZIONE

Esempio

Una pattinatrice si sta muovendo su una strada pianeggiante con una velocità di 8.94 m/s; dopo 120.0 s la strada comincia a salire (con un angolo di inclinazione di 15°) e la ragazza mantiene una velocità di 7.15 m/s.

(a) Qual è la variazione di velocità della pattinatrice?

(b) Qual è l'accelerazione media della ragazza nell'intervallo di tempo di 120 s?