Esercizio del 2 marzo 2026

Si ipotizzi di osservare un'economia chiusa agli scambi con l'estero caratterizzata dalle seguenti relazioni:

1) $C = C_0 + c\,Y^d$;
2) $T = T_0 + t\,Y$;
3) $I = I_0$;
4) $G = G_0$;
5) $D = C + I + G$

dove C indica i consumi, T il gettito fiscale, I gli investimenti, G la spesa pubblica, Y^d il reddito disponibile, T_0 la tassazione autonoma, t l'aliquota fiscale, D la domanda aggregata, Y la produzione aggregata (reddito).

a. Dopo aver introdotto la condizione di operatività di equilibrio macroeconomica, si scriva il modello in forma strutturale e in forma ridotta.

b. Si attribuiscano ora i seguenti valori alle variabili esogene e ai parametri:

   $C_0 = 500$, $T_0 = 200$, $c = 0.8$, $t = 0.25$, mentre sia I_0 che G_0 sono considerate variabili di controllo. Si scriva quindi in forma matriciale il modello in forma ridotta. Cosa possiamo dire circa la controllabilità del modello?

c. Ipotizziamo di voler raggiungere un livello di produzione di 1500, con consumi pari a 1000, quali valori devono assumere le variabili di controllo affinché questo risultato possa essere raggiunto? È possibile realizzare l'obiettivo fissato?

d. Nel caso in cui non fosse possibile, si trasformi il problema in un problema di ottimizzazione considerando che il Policy Maker attribuisce lo stesso peso al mancato raggiungimento di entrambi gli obiettivi.

RISOLUZIONE

a) La condizione di operatività è la seguente:
$Y = D$ cioè vogliamo individuare l'equilibrio della nostra economia. Così il modello in forma strutturale sarà

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & D = C + I + G \\ 2) & C = C_0 + c\,Y^d \\ 3) & Y^d = Y - T \\ 4) & T = T_0 + tY \\ 5) & I = I_0 \\ 6) & G = G_0 \\ 7) & Y = D \end{array}\right\}$$ usiamo la 7 per risolvere il modello

$$Y = C + I + G; \quad Y = C_0 + cY^d + I_0 + G_0;$$

$$Y = C_0 + c[Y - T] + I_0 + G_0; \quad Y = C_0 + c[Y - T_0 - tY] + I_0 + G_0;$$

$$Y = C_0 + I_0 + G_0 - cT_0 + cY - ctY; \quad Y - cY + ctY = C_0 + I_0 + G_0 - cT_0$$

$$Y[1 - c + ct] = C_0 + I_0 + G_0 - cT_0; \quad Y[1 - c(1-t)] = C_0 + I_0 + G_0 - cT_0;$$

$$Y = \frac{C_0 + I_0 + G_0 - cT_0}{1 - c(1-t)}$$ soluzione in forma ridotta del reddito

$$C = C_0 + cY^d; \quad C = C_0 + c(Y - T) \ldots$$ occorre trovare la soluzione di T che è anch'essa endogena

$$T = T_0 + tY; \quad T = T_0 + t\left[\frac{C_0 + I_0 + G_0 - cT_0}{1 - c(1-t)}\right];$$ soluzione in forma ridotta di T

$$C = C_0 + c\left[\frac{C_0 + I_0 + G_0 - cT_0}{1 - c(1-t)} - T_0 - t\left(\frac{C_0 + I_0 + G_0 - cT_0}{1 - c(1-t)}\right)\right]$$ soluzione in forma ridotta di C

Potremmo anche semplificare le nostre relazioni, ma per ora non ci interessa. Abbiamo trovato le forme ridotte delle tre variabili endogene che sono espresse in funzione delle sole esogene e dei parametri del modello

b) Con $C_0 = 500$, $c = 0{,}8$, $t = 0{,}25$, $T_0 = 200$ avremo

$$Y = \frac{340}{0{,}4} + \frac{I_0}{0{,}4} + \frac{G_0}{0{,}4}; \quad Y = 850 + 2{,}5 I_0 + 2{,}5 G_0$$

$$T = 200 + 0{,}25[850 + 2{,}5 I_0 + 2{,}5 G_0]; \quad T = 412{,}5 + 0{,}625 I_0 + 0{,}625 G_0$$

$$C = 500 + 0{,}8[850 + 2{,}5 I_0 + 2{,}5 G_0 - 412{,}5 - 0{,}625 I_0 - 0{,}625 G_0]$$

$$C = 850 + 1{,}5 I_0 + 1{,}5 G_0$$

Quindi le tre soluzioni delle variabili endogene in forma ridotta saranno:

$$Y = 850 + 2{,}5\, I_0 + 2{,}5\, G_0$$
$$T = 412{,}5 + 0{,}625\, I_0 + 0{,}625\, G_0$$
$$C = 850 + 1{,}5\, I_0 + 1{,}5\, G_0$$

che in forma matriciale può essere scritto come

$$\begin{vmatrix} Y \\ T \\ C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 850 \\ 412{,}5 \\ 850 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2{,}5 & 2{,}5 \\ 0{,}625 & 0{,}625 \\ 1{,}5 & 1{,}5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_0 \\ G_0 \end{vmatrix}$$

$3\times1 \qquad 3\times1 \qquad 3\times2 \qquad 2\times1$

$m = 3$

$n = 2$

$m > n$

Il modello è non controllabile

c) $Y^* = 1500$; $C^* = 1000$

$$\begin{cases} 1500 = 850 + 2{,}5\, I_0 + 2{,}5\, G_0 \\ 1000 = 850 + 1{,}5\, I_0 + 1{,}5\, G_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 650 = 2{,}5\, I_0 + 2{,}5\, G_0 \\ 150 = 1{,}5\, I_0 + 1{,}5\, G_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 260 = I_0 + G_0 \\ 100 = I_0 + G_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} G_0 = 260 - I_0 \\ 100 = I_0 + 260 - I_0 \end{cases} \qquad \Big\{ 260 \neq 100$$

l'obiettivo non è possibile

d) $$\min_{I_0, G_0} L = 0{,}5\,(Y - 1500)^2 + 0{,}5\,(C - 1000)^2$$

sub $$\begin{cases} Y = 850 + 2{,}5\, I_0 + 2{,}5\, G_0 \\ C = 850 + 1{,}5\, I_0 + 1{,}5\, G_0 \end{cases}$$