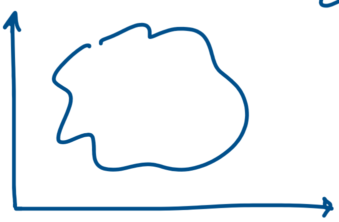
Lezione 8 25/03/2026

mercoledì 25 marzo 2026 14:38

Lezione #8

25/03/2026

CORPO RIGIDO



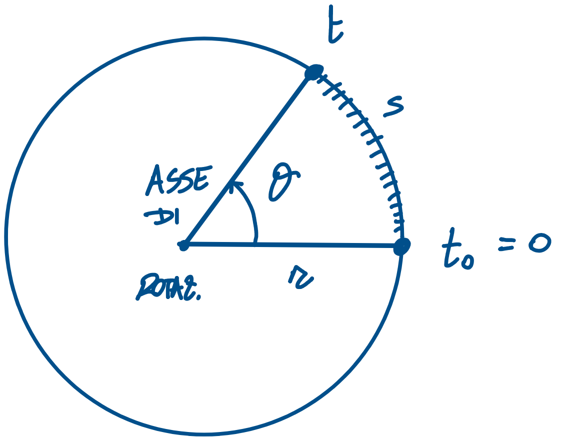
$$\rightarrow \underbrace{\vec{F}^{RIS}_{EST} = m_{TOT}\,\vec{a}_{CDM}}_{\text{Traslazionale}}$$

ROTAZIONI

$$\hookrightarrow \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad \begin{cases} \text{Modulo} \\ \text{Direzione} \\ \text{Verso} \end{cases}$$

Come leghiamo $\vec{M}$ (cause) $\rightarrow$ l'effetto?

In un moto rotatorio:

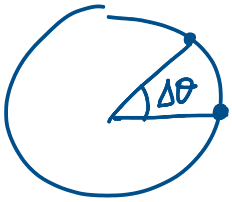


$s = r\theta$

[Circ. = $r\,2\pi$]

$\Delta t \rightarrow \Delta \vartheta$ $\qquad [\vartheta] = rad$

$\Delta \vartheta \rightarrow \Delta s$

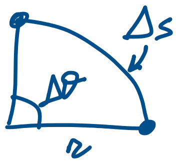


$$\boxed{\omega = \frac{\Delta \vartheta}{\Delta t}}$$

velocità angolare

$[\omega] = rad/s$

se $\quad \Delta s = r \Delta \vartheta$



$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{r \Delta \vartheta}{\Delta t} = r \frac{\Delta \vartheta}{\Delta t} = r \omega$$

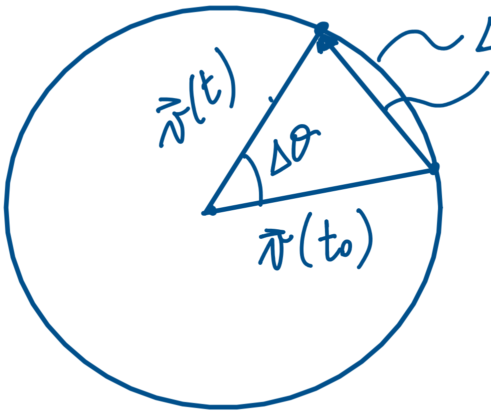
v. angolare

$$v = \omega r$$

velocità trasl.

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

ma in un moto rotazionale?



$$\Delta\vec{v} = \vec{v}(t) - \vec{v}(t_0)$$

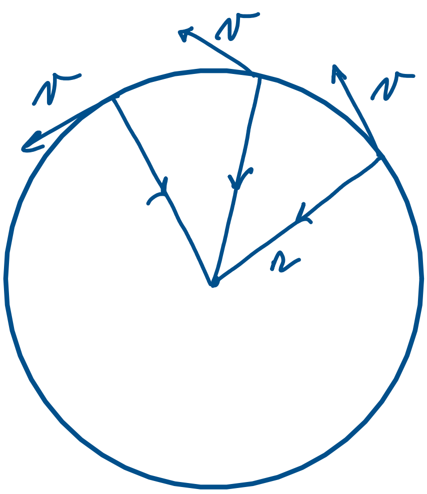
$$\Delta v = \left| v(t) - v(t_0) \right| \simeq v\,\Delta\theta$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \simeq v\,\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = v\,\omega = \omega r\,\omega$$

$$= \omega^2 r$$

oppure

$$a = v\,\omega = v\,\frac{v}{r} = \frac{v^2}{r}$$



accelerazione centripeta

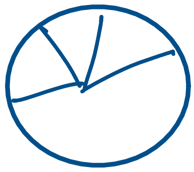
$$\boxed{a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r}$$

Accelerazione angolare

$$\boxed{\alpha = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}}$$

$$[\alpha] = rad/s^2$$

Se $\quad v = \omega r \qquad \omega = \frac{v}{r}$



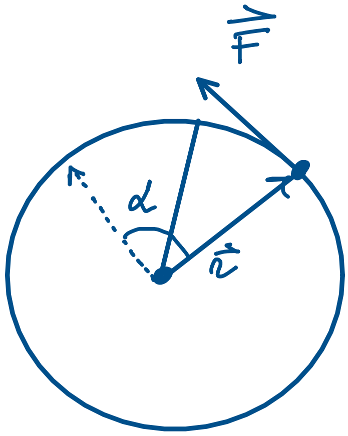
$r = cost.$

$$\alpha = \Delta\left(v/r\right)\frac{1}{\Delta t}$$

$$\alpha = \frac{1}{r}\underbrace{\frac{\Delta v}{\Delta t}} = \frac{1}{r}a$$

$$\boxed{a = \alpha r}$$

$\theta \; ; \; \omega \; ; \; \alpha$



$\alpha = 90°$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$M = rF\underbrace{\sin\alpha}_{1} = rF$$

$$= r m a = r m \alpha r$$

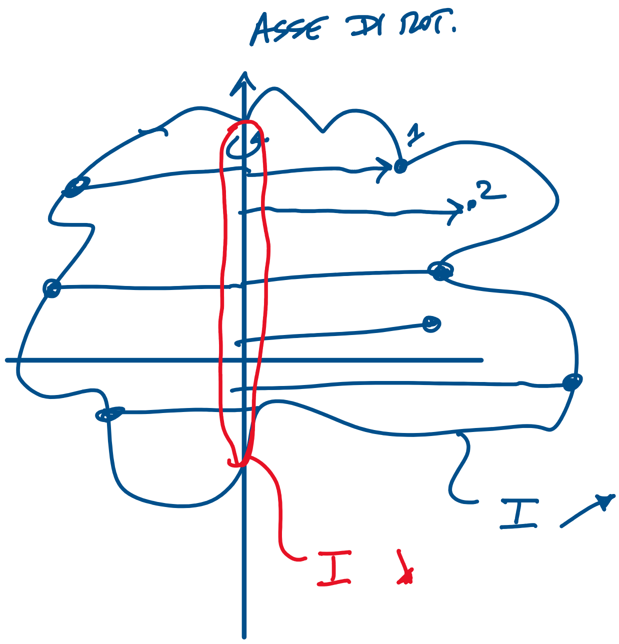
$$M = \underbrace{(m r^2)}_{\text{Momento di inerzia } (I)} \alpha$$

M → Momento di una forza

α → acc. angolare

$$\boxed{M = I\alpha}$$

I = proprietà del corpo che rappresenta l'opposizione all'essere messo in rotazione



$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots + m_n r_n^2$$

→ rappresenta la distribuzione delle masse rispetto all'asse di rotazione

Combinando ora le componenti traslaz. e rotazionali

$$\begin{cases} \vec{F}^{RIS}_{EST} = M_{TOT}\, \vec{a}_{CDM} & (\text{trasl.}) \\ \vec{M}^{RIS}_{EST} = I\, \vec{\alpha} & (\text{rotazionale}) \end{cases}$$

EQUAZIONI CARDINALI DELLA MECCANICA

$$F = ma = m\frac{\Delta v}{\Delta t}$$ se la massa può variare

$$F = \frac{\Delta}{\Delta t}(\underbrace{mv}_{\text{quantità di moto } q})$$

$$\boxed{\vec{F} = \frac{\Delta \vec{q}}{\Delta t}}$$

$$\vec{M} = I\vec{\alpha} = I\frac{\Delta \vec{w}}{\Delta t}$$ se il sistema cambia come la massa è distribuita rispetto all'asse I non è costante

$$= \frac{\Delta}{\Delta t}(\underbrace{I\vec{w}})$$

$$= \frac{\Delta}{\Delta t} (\underbrace{I \overline{\omega}}_{\text{momento angolare } \vec{P}})$$

$$\vec{M} = \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t}$$

Equazioni cardinali

$$\begin{cases} \vec{F}^{RIS}_{EST} = \dfrac{\Delta \vec{q}}{\Delta t} \\ \\ \vec{M}^{RIS}_{EST} = \dfrac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} \end{cases}$$

In generale

SEMPRE

All'equilibrio:

$$\begin{cases} \vec{F}^{RIS}_{EST} = \vec{0} \Rightarrow \dfrac{\Delta \vec{q}}{\Delta t} = 0 \Rightarrow \vec{q} = cost \\ \\ \vec{M}^{RIS}_{EST} = \vec{0} \Rightarrow \dfrac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} = 0 \Rightarrow \vec{P} = cost \end{cases}$$

All'equilibrio

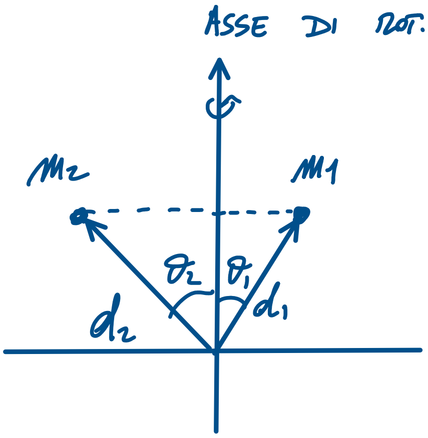
$$\begin{cases} \vec{q} = cost \Rightarrow \vec{q}_{IN} + \vec{q}_{FIN} = \vec{0} \\ \\ \vec{P} = cost \Rightarrow \vec{P}_{IN} + \vec{P}_{FIN} = \vec{0} \end{cases}$$

Esercizio

Momento d'inerzia:

Sapendo che $m_1 = 2\,kg$; $m_2 = 4\,kg$ determinare se I_1 è maggiore o minore di I_2 :

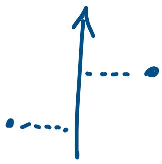
I_1



$$\begin{cases} \theta_1 = 30° \\ \theta_2 = 60° \\ d_1 = 1\,m \\ d_2 = 2\,m \end{cases}$$

$$I_1 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$$

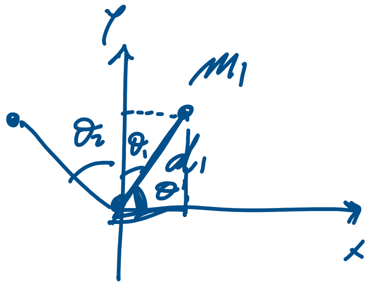
dist. dall'asse



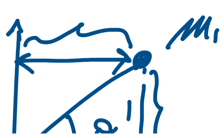
I_2 stessa configurazione $m_1 \rightleftarrows m_2$

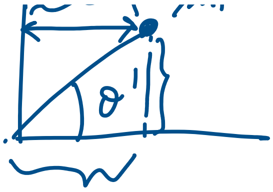
invertiamo le masse

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$$



$$\begin{cases} \theta_1' = 90° - \theta_1 = 60° \\ \theta_2' = 90° - \theta_2 = 30° \end{cases}$$





$$\begin{cases} r_1 = d_1 \cos\vartheta_1' \\ r_2 = d_2 \cos\vartheta_2' \end{cases}$$

$$I_1 = 2 \cdot (1 \cos 60°)^2 + 4 (2 \cos(30°))^2 = 12{,}5 \ \text{Kg m}^2$$

$$I_2 = 4 (\cos 60°)^2 + 2 (2 \cos(30°))^2 = 7 \ \text{Kg m}^2$$

Dal momento che $I_2 < I_1$ la seconda configurazione sarà più efficiente per le rotazioni

Esercizio pattinatore

Un pattinatore ruota inizialmente con $\omega_{IN} = 14$ rad/s, chiude le braccia e il suo momento d'inerzia riduce del 60% $\Rightarrow$ $I_{FIN} = 0{,}6 \, I_{IN}$

Calcolare quanto cambia la sua velocità angolare ω_{FIN}.

$$\frac{\Delta}{\Delta t}(I\omega) = 0 \Rightarrow I\omega = \text{cost} \Rightarrow$$

$$I_{IN}\, \omega_{IN} = I_{FIN}\, \omega_{FIN}$$

$$\omega_{FIN} = \frac{I_{IN}}{I_{FIN}} \cdot \omega_{IN}$$

$$\omega_{FIN} = \frac{\cancel{I_{IN}}}{0{,}6\, \cancel{I_{IN}}}\, \omega_{IN} = \frac{1}{0{,}6} \cdot 14 = 23{,}333\ rad/s$$

$$\boxed{\omega_{FIN} = 23{,}33\ rad/s \simeq 20\ rad/s}$$

Dal momento che $I_{FIN} < I_{IN} \Rightarrow \omega_{FIN} > \omega_{IN}$