



Fisica

Medicina Veterinaria — Semestre Aperto
2026

Prof. Francesco de Pasquale

Lezioni 19, 20 e 21

Outline

Lezione 19

- Sistemi di corpi: definizione di centro di massa e descrizione del suo moto.
- Caratteristiche del corpo rigido.
- Esercizi

Lezione 20

- Momento torcente e condizioni per l'equilibrio rotazionale.
- Leve nel corpo umano.

Lezione 21

- Esercizi su Momenti di una forza

Dall'Ipotesi di Punto Materiale al Sistema Esteso

Ipotesi iniziale era di un punto materiale:

$$m \neq 0 \quad V = S = 0$$

Massa concentrata in un punto, senza alcuna estensione spaziale.

Consideriamo ora un sistema esteso

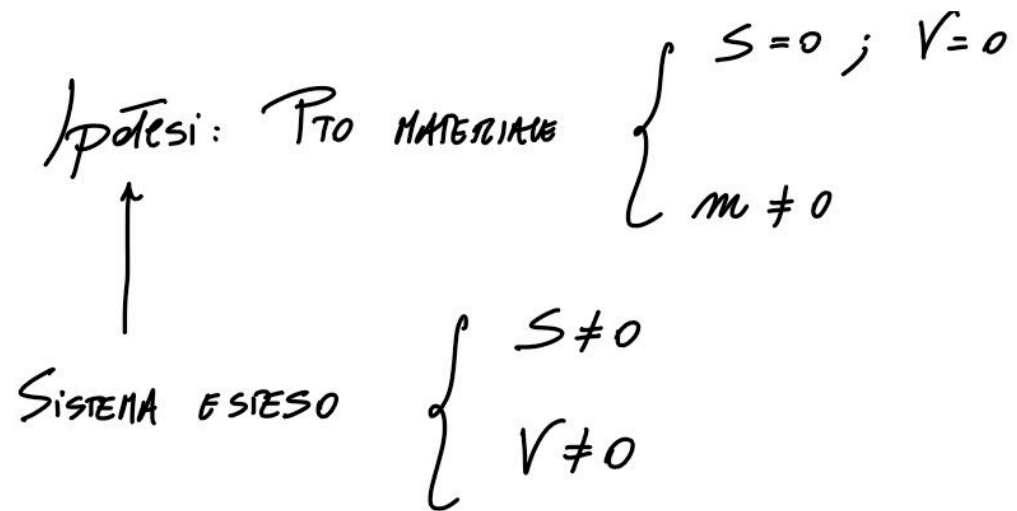
Sistema con estensione spaziale reale:

$$S \neq 0 \text{ e } V \neq 0$$

Un sistema può essere considerato come un insieme di punti materiali distribuiti nello spazio, ciascuno con la propria massa e posizione.

Insieme di Punti Materiali

Un sistema di N particelle distribuite nello spazio. Ogni particella i ha massa m_i e vettore posizione $\mathbf{r}_i$ rispetto all'origine del sistema di riferimento.
Derivazione del Centro di Massa



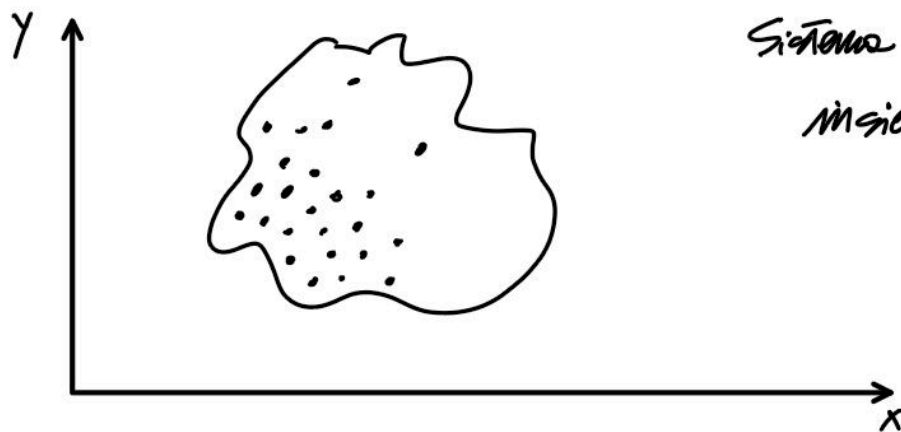
Devo restringere la mia attenzione



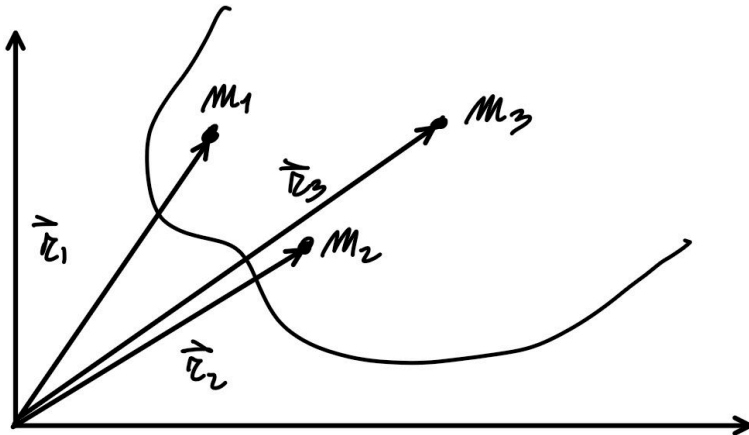
SISTEMI RIGIDI

Struttura interna fissa i.e. le distanze

delle molecole da lo compongono non può cambiare



Sistema rigido come
insieme di p_i
materiali



CENTRO DI MASSA (CDM)

$$\vec{r}_{CDM} = \left(\frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_N \vec{r}_N}{\underbrace{m_1 + m_2 + \dots + m_N}_{M_{TOT}}} \right)$$

$$\vec{r}_{CDM} = \frac{1}{M_{TOT}} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$$

Centro di Massa

Il **centro di massa** è il punto geometrico che rappresenta la posizione media ponderata di tutte le masse del sistema:

$$\vec{r}_{CDM} = \frac{1}{M_{TOT}} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \cdots + m_N \vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \cdots + m_N}$$

dove $M_{TOT} = m_1 + m_2 + \cdots + m_N$ è la massa totale del sistema.

Corpo Rigido

Definizione

Un sistema rigido è un sistema in cui la **configurazione interna non può cambiare**: le distanze relative tra le particelle che lo compongono rimangono costanti nel tempo.

 La risultante delle forze interne è nulla: $\sum \vec{F}_{INT}^{RIS} = \vec{0}$

Sistema rigido $\Rightarrow \vec{F}_{int}^{RIS} = \vec{0} \Rightarrow$ ISOLATO

$$\vec{F}_{EST}^{RIS} + \cancel{\vec{F}_{INT}^{RIS}} = m \vec{a}$$

$$M_{TOT} \vec{a}_{CDM} = \frac{1}{M_{TOT}} (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_N \vec{v}_N)$$

$$\vec{v} \Rightarrow \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad m_i \text{ sono costanti}$$

$$M_{TOT} \text{ è costante}$$

$$M_{TOT} \frac{\Delta \vec{v}_{CDM}}{\Delta t} = m_1 \frac{\Delta \vec{v}_1}{\Delta t} + m_2 \frac{\Delta \vec{v}_2}{\Delta t} + \dots + m_N \frac{\Delta \vec{v}_N}{\Delta t}$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_{\vec{v}_{CDM}} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{\vec{v}_1} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{\vec{v}_2} \quad \dots \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{\vec{v}_N}$

$$M_{TOT} \vec{v}_{CDM} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_N \vec{v}_N$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_{\vec{p}_{CDM}} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{p_1} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{p_2} \quad \dots \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{p_N}$

$$M_{TOT} \frac{\Delta \vec{v}_{CDM}}{\Delta t} = m_1 \frac{\Delta \vec{v}_1}{\Delta t} + m_2 \frac{\Delta \vec{v}_2}{\Delta t} + \dots + m_N \frac{\Delta \vec{v}_N}{\Delta t}$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_{\vec{a}_{CDM}} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{\vec{a}_1} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{\vec{a}_2} \quad \dots \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{\vec{a}_N}$

$$M_{TOT} \vec{a}_{CDM} = m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + \dots + m_N \vec{a}_N$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_{\vec{F}_1^{EST}} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{\vec{F}_2^{EST}} \quad \dots \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{\vec{F}_N^{EST}}$

$\vec{F}_{EST}^{RIS}$

$$\vec{F}_{EST}^{RIS} = M_{TOT} \vec{a}_{CDM}$$

$$\vec{F}_{EST}^{RIS} = \frac{\Delta \vec{p}_{CDM}}{\Delta t}$$

I^a EQUAZIONE
DELLA MECCANICA
CORPI RIGIDI

Forza Risultante e Centro di Massa

Per un corpo rigido, la risultante delle forze esterne è:

$$\vec{F}^{RIS} = \vec{F}_{EST}^{RIS} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + \cdots + m_N\vec{a}_N$$

Definendo la **velocità e accelerazione del CDM**:

$$\vec{v}_{CDM} = \frac{1}{M_{TOT}}(m_1\vec{v}_1 + \cdots + m_N\vec{v}_N)$$

$$\vec{a}_{CDM} = \frac{1}{M_{TOT}}(m_1\vec{a}_1 + \cdots + m_N\vec{a}_N)$$

Il Teorema del Centro di Massa

$$\vec{F}_{EST}^{RIS} = M_{TOT} \vec{a}_{CDM}$$

La risultante delle forze esterne è pari al prodotto della massa totale per l'accelerazione del **solo centro di massa**. Il corpo rigido si comporta come un unico punto materiale concentrato nel CDM.



Esercizi su centro di massa (Tommasi)

Esercizio # 430

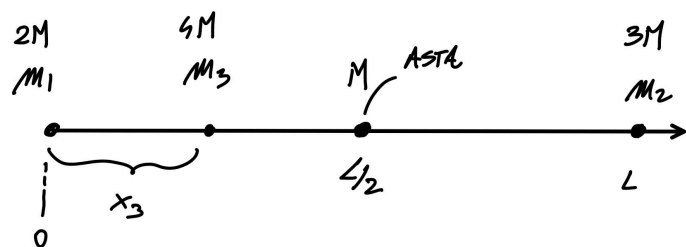
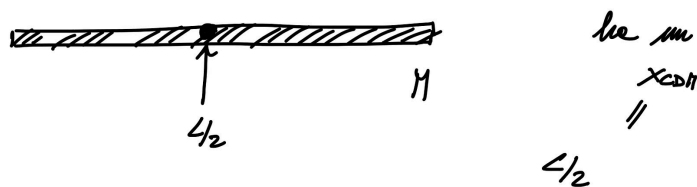
M L sez. costante

$$M_1 = 2M \quad M_2 = 3M \quad \vec{r}_{CM} = \dots \Rightarrow X_{CM} = \frac{M_1 x_1 + M_2 x_2 + \dots + M_n x_n}{M_{TOT}}$$

di ~~stanza~~ da M_1 $M_3 = 4M$ $X_{CM} = \text{centro della}$



Anche solo l'asta M



$$M_{TOT} = (2+4+1+3)M = 10M$$

$$X_{CM} = \frac{1}{(10M)} \left(\cancel{M_1 \cdot 0} + 4M \cdot x_3 + M \frac{L}{2} + 3M \cdot L \right)$$

$$\frac{10L}{2} = \frac{1}{10M} M \left(4x_3 + \frac{L}{2} + 3L \right)$$

$$5L = 4x_3 + \frac{L}{2} + 3L$$

$$4x_3 = \cancel{5L} - \frac{L}{2} - \cancel{3L} = \frac{4L}{2} - \frac{L}{2} = \frac{3L}{2}$$

$$x_3 = \frac{3}{8} L$$

Esercizio # 438

$$\vec{r}_{CDM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_N \vec{r}_N}{M_{TOT}} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{CDM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_N x_N}{M_{TOT}} \\ y_{CDM} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_N y_N}{M_{TOT}} \end{array} \right.$$

4 masse $M, 2M, M, 2M$

$$M: (-6; 0) \quad M: (0, -6)$$

$$2M: (6; 0) \quad 2M: (0, 6)$$

$$\vec{r}_{CDM} ? \Rightarrow (x_{CDM}; y_{CDM})$$

$$A (0, 0) \quad D (3, 3)$$

$$\textcircled{B} (1, 1) \quad E (4, 4)$$

$$C (2, 2)$$

$$\vec{r}_{CDM} = (x_{CDM}; y_{CDM})$$

$$M_{TOT} = 6M$$

$$x_{CDM} = \frac{1}{(6M)} (-6M + 2M \cdot 6 + \cancel{M \cdot 0} + \cancel{2M \cdot 0})$$

$$y_{CDM} = \frac{1}{(6M)} (\cancel{M \cdot 0} + \cancel{2M \cdot 0} + M(-6) + 2M \cdot 6)$$

$$x_{CDM} = \frac{1}{\cancel{6M}} (\cancel{6M}) \quad y_{CDM} = \frac{1}{\cancel{6M}} \cancel{6M}$$

$$\vec{r}_{CDM} = (1; 1) \Rightarrow \textcircled{B} \checkmark$$

Condizione di Equilibrio Statico

Equilibrio Traslazionale

$$\vec{F}_{EST}^{RIS} = \vec{0}$$

La risultante di tutte le forze esterne deve essere nulla.

Punto di Vista Biomeccanico

L'equilibrio dipende dalla posizione della forza peso (CDM) rispetto alla **superficie di appoggio**.

Centro di Massa e Stabilità Posturale



Proiezione del CDM

L'equilibrio statico richiede che la proiezione verticale del CDM cada **all'interno** della superficie di appoggio.



Stabilità

Più la proiezione è centrale, maggiore è la stabilità. Più è periferica, più facile è perdere l'equilibrio.



Locomozione

Il movimento efficiente sfrutta la perdita controllata dell'equilibrio, come nel levriero.

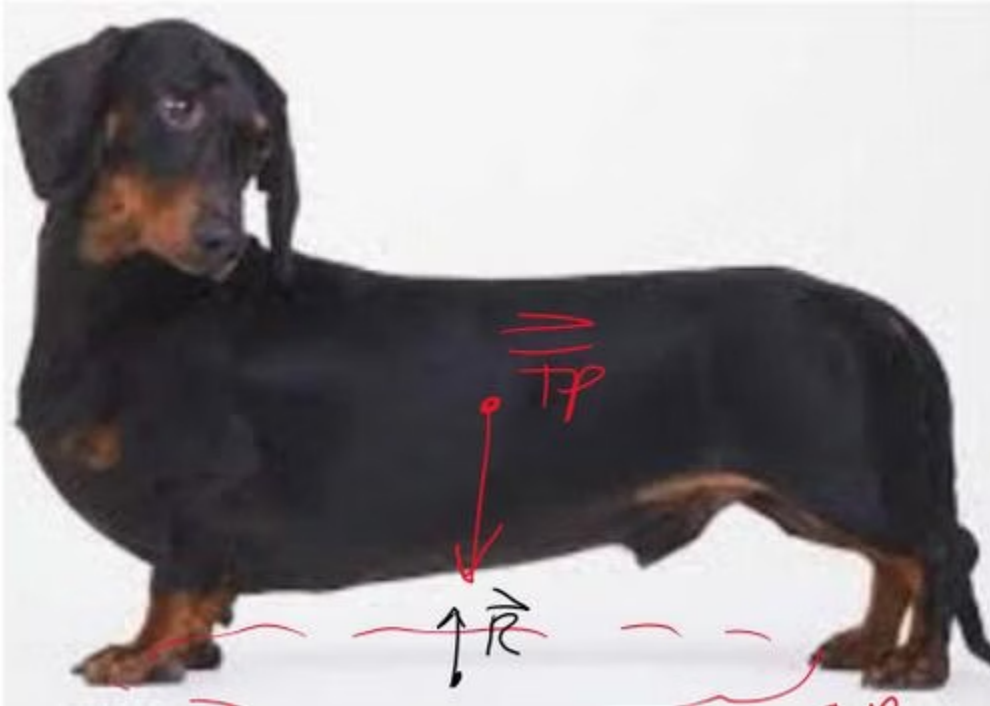


Esempio Biomedico: Propulsione del Movimento

In un **levriero**, la proiezione della forza peso cade al **limite** della superficie di appoggio: questo consente di perdere l'equilibrio più facilmente e mettersi in moto in modo efficiente.

Confronto: Bassotto vs Levriero

Bassotto



La proiezione di F_p cade al **centro** della superficie di appoggio → equilibrio maggiore, movimento difficile. I movimenti verticali sono pericolosi per la colonna vertebrale.

Implicazione Biomeccanica

La posizione del CDM rispetto alla base di appoggio determina la **stabilità** e la **facilità di locomozione** di un sistema biologico.

Equilibrio Traslazionale e Rotazionale

Per un corpo rigido, l'equilibrio traslazionale ($\vec{F}_{RIS}^{EST} = \vec{0}$) non è sufficiente. Occorre considerare anche le **rotazioni**.

Le due condizioni insieme costituiscono le **Equazioni Cardinali della Statica**.

Momento di una Forza

Definizione Vettoriale

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Il modulo è:

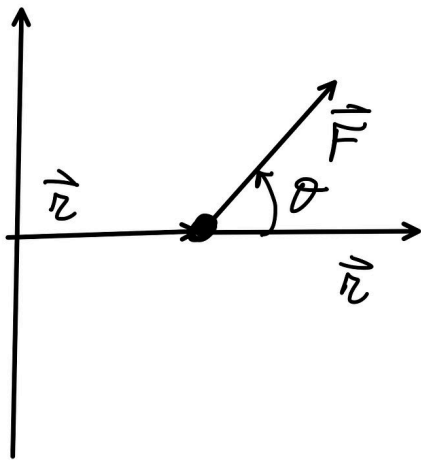
$$|\vec{M}| = rF \sin \theta$$

dove θ è l'angolo tra $\vec{r}$ e $\vec{F}$. L'unità di misura è **N·m**.

La direzione è **perpendicolare al piano** formato da $\vec{r}$ e $\vec{F}$.

Momento di una forza

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad |\vec{M}| = rF \sin \theta$$



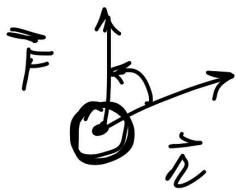
1) $\vec{r}$ e $\vec{F}$ devono essere applicati:
stesso pto

2) θ
 $\vec{r} \cap \vec{F}$

3) $\vec{r} \cap \vec{F}$ antiorario?
 $\vec{r} \cap \vec{F}$ orario?

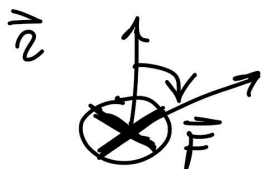
Se $\vec{r} \cap \vec{F}$ antiorario

$\Downarrow$



$\vec{M}$ è usante $\odot$

Se $\vec{r} \cap \vec{F}$ orario



$\vec{M}$ è entrante $\otimes$

Segno del Momento: Convenzione

Senso Antiorario

$\vec{r} \times \vec{F}$ antiorario $\rightarrow \mathbf{M} > \mathbf{0}$ (uscente dal piano $\odot$)

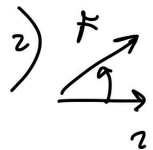
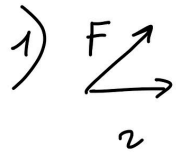
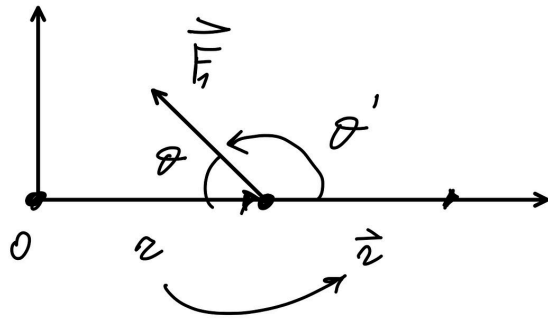
Senso Orario

$\vec{r} \times \vec{F}$ orario $\rightarrow \mathbf{M} < \mathbf{0}$ (entrante nel piano $\otimes$)

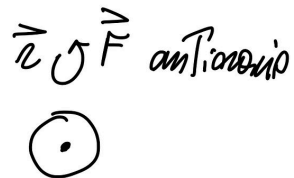
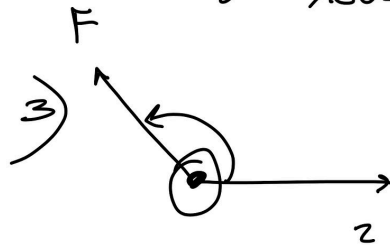
Esempio: calcolare il momento delle forze

$$F_1 = 3\text{ N}; \text{ sapendo che } \theta = 30^\circ$$

$$\text{ed } r = 2\text{ m}$$



$$\theta' = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$



$$M = r F \sin \theta' = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 3 \text{ Nm} \quad \odot$$

Equazioni Cardinali della Meccanica

❗ Condizione generale di equilibrio per un sistema biomeccanico:

$$\begin{cases} \vec{F}_{EST}^{RIS} = \vec{0} \rightarrow \text{equilibrio traslazionale} \\ \vec{M}_{EST}^{RIS} = \vec{0} \rightarrow \text{equilibrio rotazionale} \end{cases}$$

Quando $\vec{M} = \vec{0}$, il momento angolare è costante (conservazione del momento angolare). Queste due equazioni governano l'equilibrio di qualsiasi corpo rigido in biomeccanica.



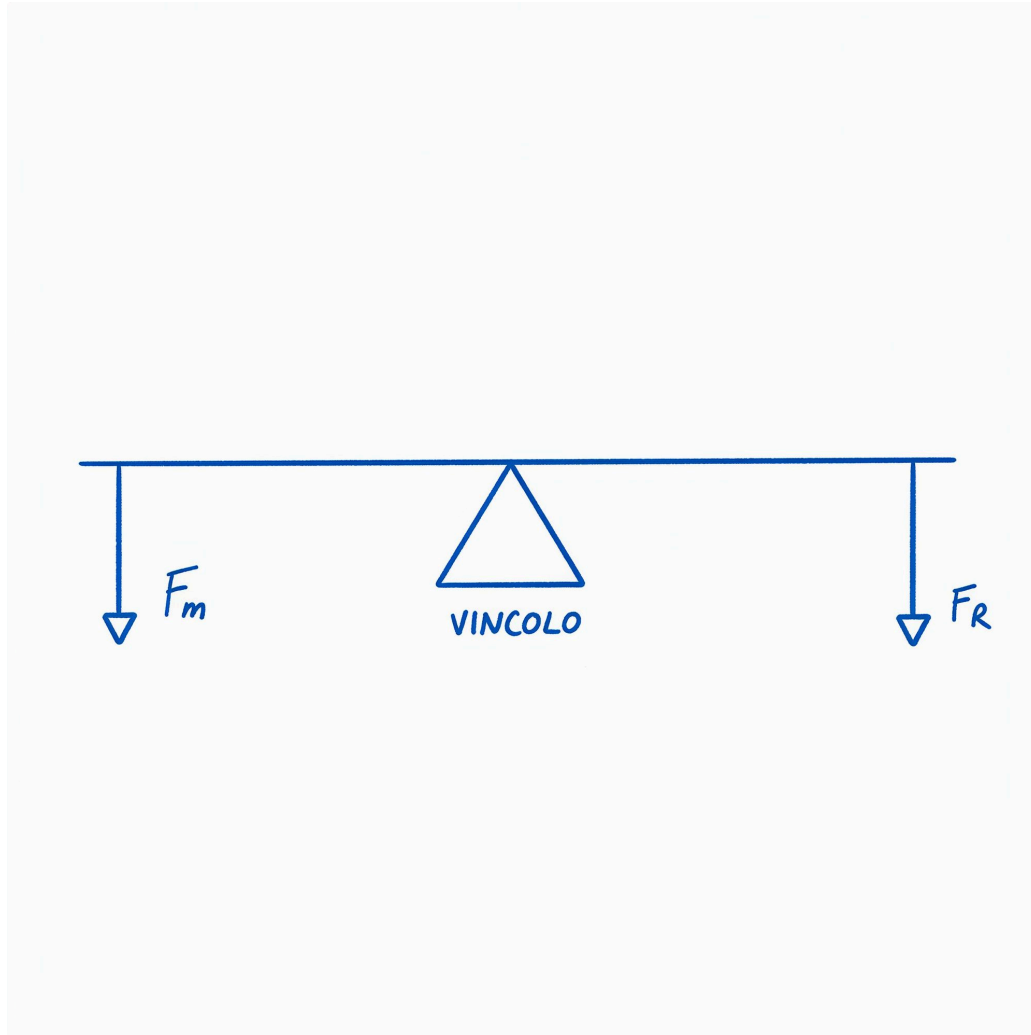
Le Leve

Una **leva** è una macchina fissa vincolata in grado di trasmettere energia. È in equilibrio rotazionale quando $\vec{M}_{EST}^{RIS} = \vec{0}$.

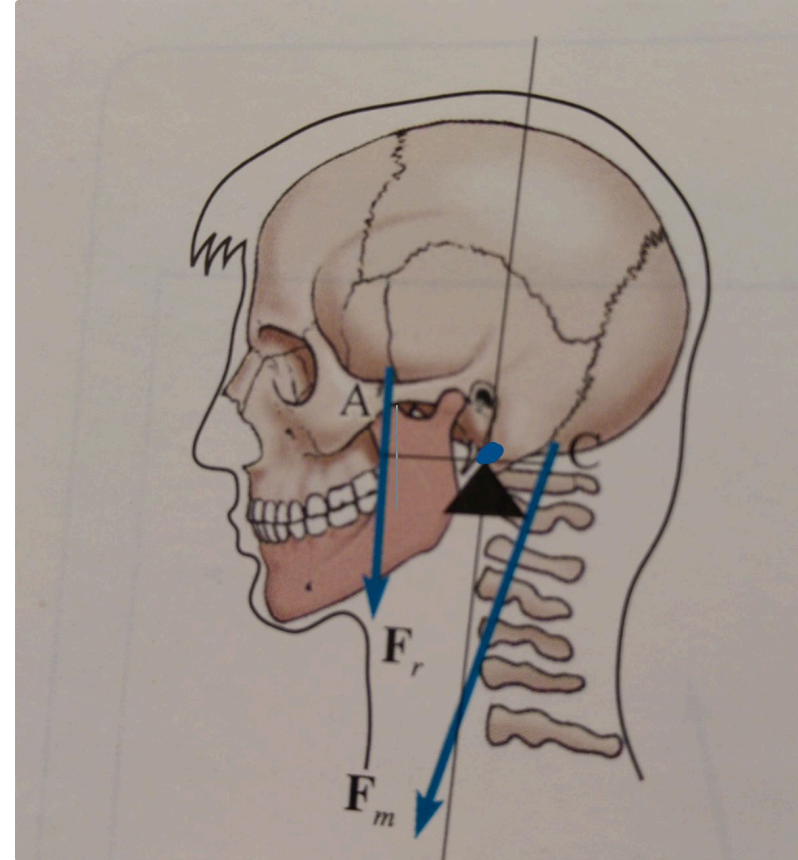
FORZA MOTRICE F_M

FORZA RESISTIVA F_R

Leva di Primo Genere

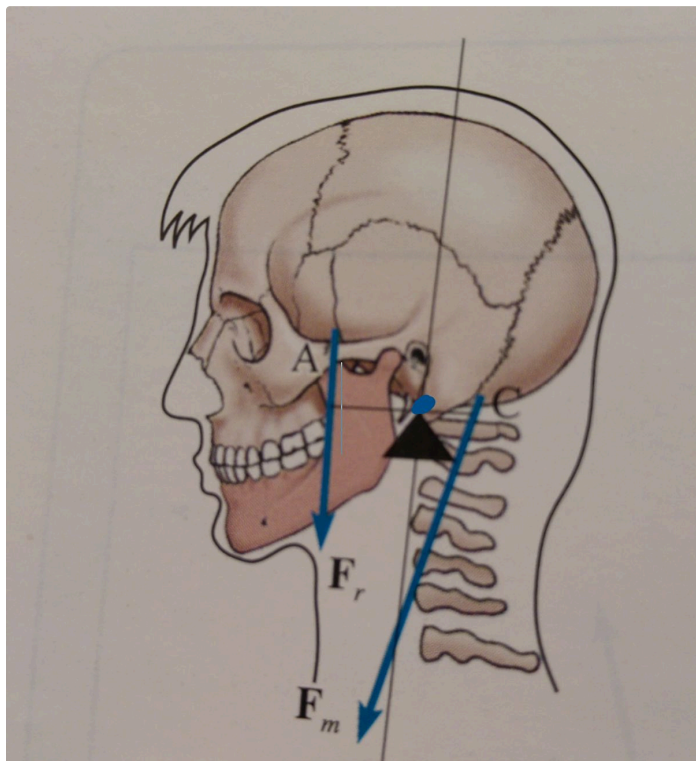


Il **vincolo (fulcro)** è posizionato **tra** la forza motrice e la forza resistiva.



Esempio anatomico: la **testa sul collo**. Il fulcro è l'articolazione atlanto-occipitale.

Esempio ed esercizio:

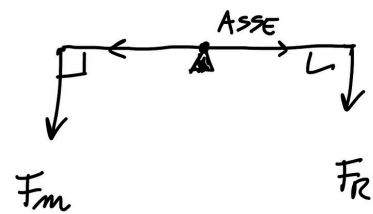


Dati del problema

$$\begin{cases} F_m = 80 \text{ N} & (\text{peso cranio}) \\ r_m = 8 \text{ cm} \\ F_R = ? \\ r_R = 2 \text{ cm} \end{cases}$$

Condizione: $\vec{M}^{RIS} = \vec{0}$

Esempio Lora 1 femore: Muscoli splenici

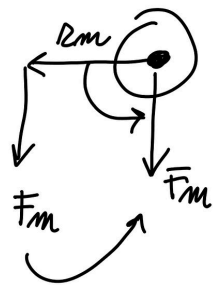


in equilibrio:

$$\vec{M}_{RIS} = \vec{0}$$

$$\vec{M}_m + \vec{M}_{FR} = 0$$

M_m :



$$\theta = 90^\circ$$

$r_m \perp F_m$ senso antiorario

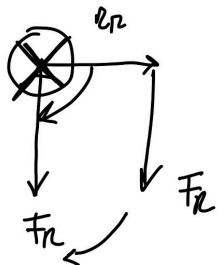


$$M_m = r_m F_m$$

$$\vec{r}_r \perp \vec{F}_r$$



M_r :



$$M_r = - r_r F_r$$

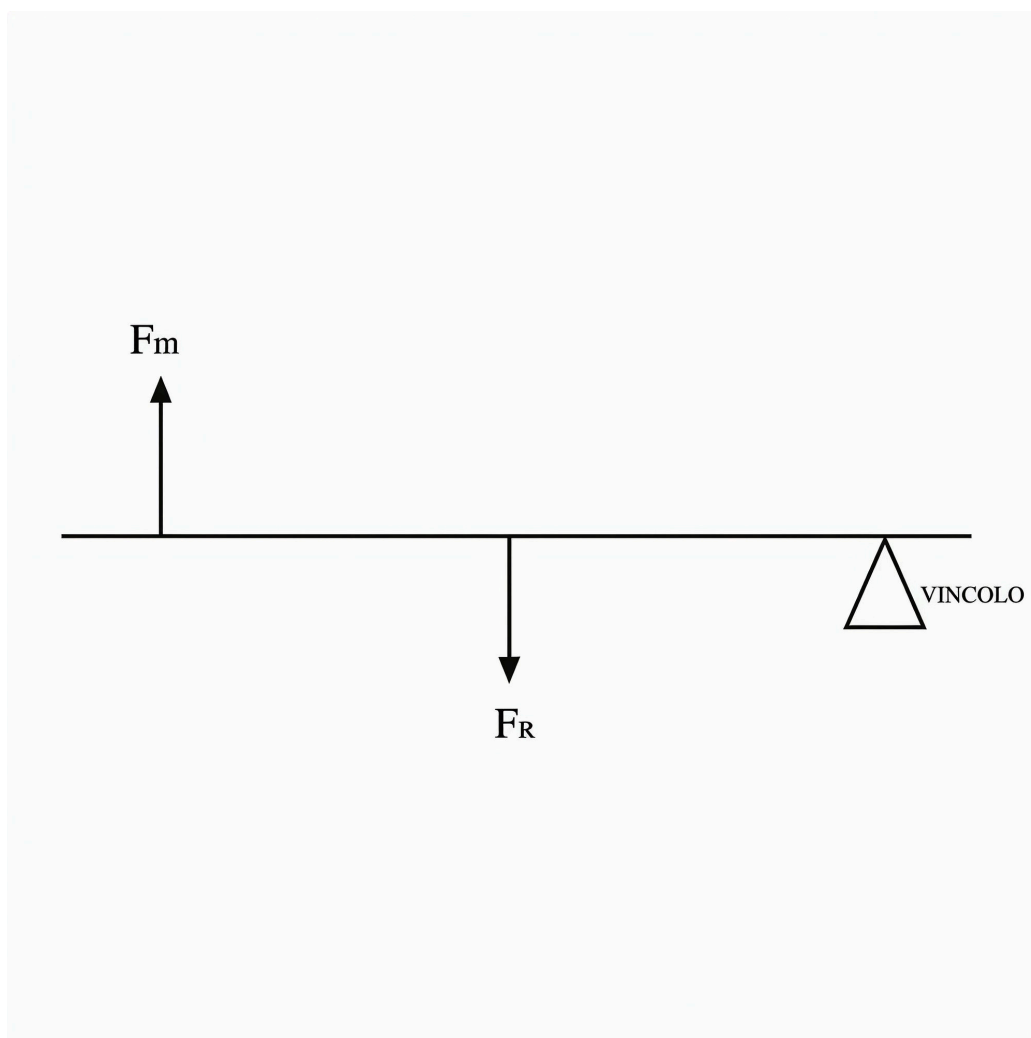
$$r_m F_m - r_r F_r = 0$$



$$F_r = \frac{r_m}{r_r} F_m = \frac{8}{2} F_m = 4 F_m$$

Nei muscoli del collo si esante in ogni istante
ma forze pari a 4 volte la p. peso del cranio

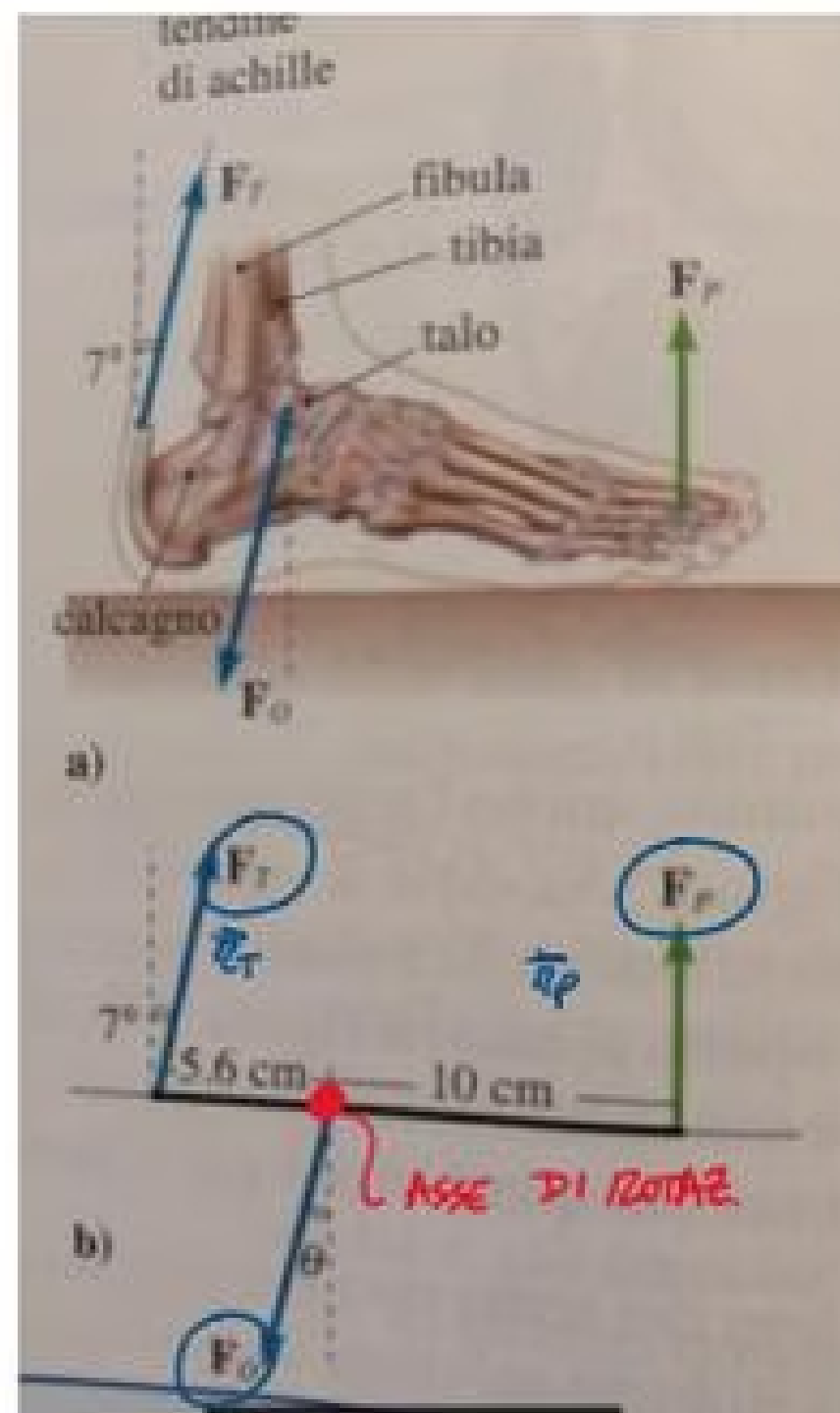
Leva di Secondo Genere



Il **vincolo** è a un'estremità. La forza resistiva è applicata **tra** il vincolo e la forza motrice.

$$N = F_R$$

Esempio anatomico: il **piede** durante la camminata (tendine di Achille).



Leva II Genere: Il Piede



F_R

Forza tendine di Achille

F_o

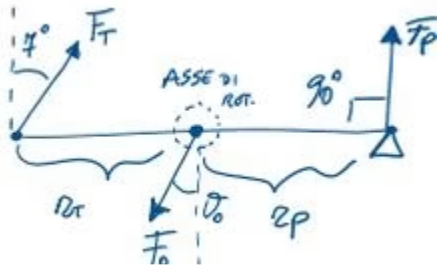
Forza esercitata dalle ossa

$F_P = 900 \text{ N}$

Forza peso corporea

Dati: $r_T = 5,6 \text{ cm}$, $r_P = 10 \text{ cm}$, $\theta_T = 4^\circ$

Leva II Genere: Schema e Momenti



Scegliendo l'asse di rotazione in $\vec{F}_0$, il suo momento è nullo. Rimangono:

$$M_T = -r_T F_T \sin(94^\circ) \quad (M_T < 0, \text{ orario})$$

$$M_P = r_P F_P \quad (M_P > 0, \text{ antiorario})$$

Leva II Genere: Risultato

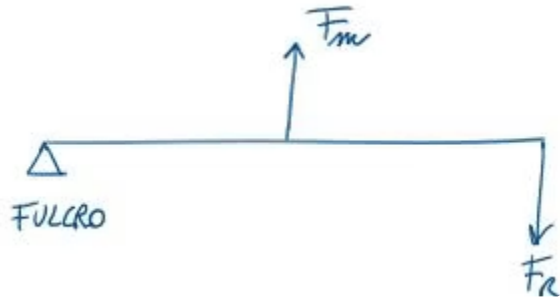
$$r_P F_P = r_T F_T \sin(94^\circ)$$

$$\bar{F}_T = \frac{r_P}{r_T \sin(94^\circ)} \bar{F}_P \approx 1,8 \cdot F_P$$

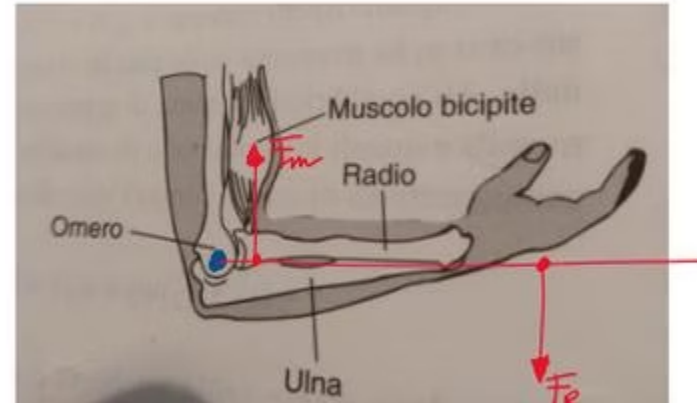
$$\boxed{\bar{F}_T \approx 2 \bar{F}_P = 1800 \text{ N}}$$

⚠ Ad ogni singolo passo, il tendine di Achille esercita una forza pari al **doppio del peso corporeo!**

Leva di Terzo Genere

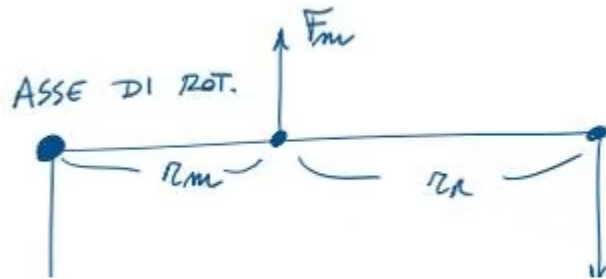


La forza motrice è applicata **tra** il fulcro e la forza resistiva.



Esempio anatomico: il **braccio**. Il bicipite (F_m) agisce tra il gomito (fulcro) e il peso in mano (F_R).

Leva Terzo Genere: Schema

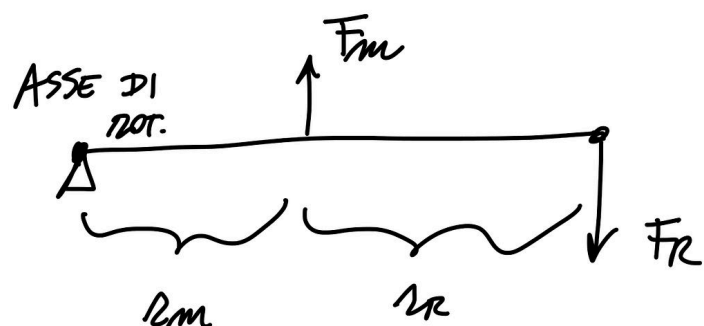


Dati:

$$\begin{cases} r_m = 0,05 \text{ m} \\ r_R = 0,15 \text{ m} \\ F_R = 12 \text{ N} \end{cases}$$

Obiettivo: trovare F_m necessaria per mantenere l'equilibrio con il peso in mano.

Leve III genere: esercizio

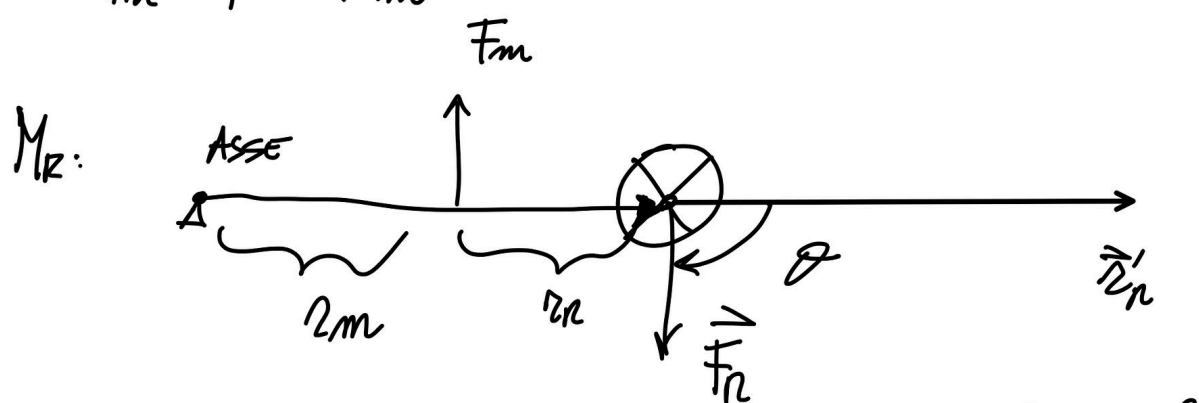


Eq. rotazionale $\Rightarrow \vec{M}_{est}^{ris} = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{M}_m + \vec{M}_R = \vec{0}$



$M_m = + r_m F_m$



$r_R \perp F_R$ (x)

$M_R = - r'_R F_R = - (r_m + r_R) F_R$

$\vec{M}_m + \vec{M}_R = \vec{0}$

$r_m F_m - (r_m + r_R) F_R = 0$

$$F_m = \frac{(r_m + r_R)}{r_m} F_R$$

$F_m = \frac{(0,05 + 0,15)}{0,05} \cdot 12$

$F_m = 4 F_R$

$F_m = 4 \cdot 12 = 48 \text{ N}$

Leva III Genere: Calcolo dei Momenti

Momento M_m (antiorario)

$$M_m = r_m F_m > 0 \quad (\theta = 90^\circ)$$

Momento M_R (orario)

$$M_R = -(r_m + r_R) F_R < 0$$

La distanza dall'asse è $(r_m + r_R)$.

$$M_{Ris} = r_m F_m - (r_m + r_R) F_R = 0$$

Leva III Genere: Risultato

$$F_m = \frac{r_m + r_R}{r_m} F_R = \frac{0,05 + 0,15}{0,05} \cdot 12$$

$$F_m = 4F_R = 4 \cdot 12 = 48 \text{ N}$$

⚠ Nel caso peggiore ($\theta = 90^\circ$), i muscoli devono esercitare una forza **4 volte maggiore** del peso applicato per mantenere l'equilibrio!

Riepilogo dei Tre Generi di Leva

1

I Genere

Fulcro **tra** F_m e F_R . Esempio: testa sul collo. $F_R = 4 \cdot F_m$ (320 N).

2

II Genere

F_R **tra** fulcro e F_m . Esempio: piede/tendine di Achille. $F_T \approx 2 \cdot F_P$ (1800 N).

3

III Genere

F_m **tra** fulcro e F_R . Esempio: avambraccio/bicipite. $F_m = 4 \cdot F_R$ (48 N).

Implicazioni Biomeccaniche delle Leve

Il corpo umano utilizza prevalentemente leve di **III genere**, che richiedono forze muscolari molto maggiori del carico esterno. Questo sembra svantaggioso, ma permette **ampi range di movimento** e **velocità elevate** con piccoli accorciamenti muscolari.



Verso la Dinamica Rotazionale

Le equazioni cardinali della statica si generalizzano alla dinamica:

$$\begin{cases} \vec{F} = m\vec{a} & \rightarrow \text{resistenza al cambiamento di moto (massa inerziale)} \\ \vec{M} = I\vec{\alpha} & \rightarrow \text{accelerazione angolare e momento d'inerzia} \end{cases}$$

Dove I è il **momento d'inerzia** e $\vec{\alpha}$ è l'accelerazione angolare.

Sintesi della Lezione

01

Sistema di Punti Materiali

Posizione media ponderata delle masse: $\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M_{TOT}}$. Teorema:

$$\vec{F}_{EST}^{RIS} = M_{TOT} \vec{a}_{CM}$$

03

Momento di una Forza

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, modulo $|M| = rF \sin \theta$. Convenzione: antiorario positivo, orario negativo.

05

Stabilità Posturale

La proiezione verticale del CM deve cadere nella superficie di appoggio.
La locomozione è una perdita controllata dell'equilibrio.

02

Corpo Rigido

Distanze relative tra particelle costanti. Equilibrio statico: forza risultante nulla e momento risultante nullo.

04

Le Leve Biomeccaniche

I genere (fulcro tra Fm e FR, es. testa sul collo), II genere (FR tra fulcro e Fm, es. piede), III genere (Fm tra fulcro e FR, es. avambraccio).

06

Verso la Dinamica Rotazionale

Generalizzazione: $\vec{M} = I\vec{\alpha}$, momento d'inerzia $I = \sum m_i r_i^2$.

Formule Chiave da Ricordare

Centro di Massa

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M_{TOT}}$$

II Legge per CM

$$\vec{F}_{EST}^{RIS} = M_{TOT} \vec{a}_{CM}$$

Momento di una Forza

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}, \quad |\vec{M}| = rF \sin \theta$$

Dinamica Rotazionale

$$\vec{M} = I \vec{\alpha}, \quad I = \sum m_i r_i^2$$