FISICA APPLICATA E BIOSTATISTICA

Modulo MAT1 — Strumenti Matematici

Numeri, Intervalli, Equazioni e Disequazioni

Prof.ssa Valentina Notarstefano | Università degli Studi di Teramo

Perché è Importante in Laboratorio

La maggior parte delle formule biomediche è algebra da riorganizzare — ad esempio risolvere la legge di Beer–Lambert $A = \varepsilon \cdot b \cdot c$ rispetto alla concentrazione c.

Gli intervalli di riferimento sono intervalli e disequazioni — ad esempio la glicemia a digiuno $70 \leq g \leq 99$ mg/dL.

Le equazioni di secondo grado compaiono negli equilibri e nella cinetica; i logaritmi trasformano i processi esponenziali (pH, dose) in rette.

Questa unità richiama solo gli strumenti che riutilizzeremo per tutto il corso.

Insiemi Numerici

$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\dots\}$ l'insieme dei numeri naturali

$\mathbb{N}^* = \{1,2,3,\dots\}$ l'insieme dei numeri naturali diversi da zero

$\mathbb{Z} = \{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$ l'insieme dei numeri interi

$\mathbb{Q} = \{\frac{n}{m} : n,m \in \mathbb{Z}, m \neq 0\}$ l'insieme dei numeri razionali (un numero razionale, scritto in forma decimale, presenta dopo la virgola un numero finito di cifre decimali, oppure uno sviluppo decimale infinito periodico)

$\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali→ tutti i numeri che, scritti in forma decimale, presentano uno sviluppo decimale infinito, anche non periodico

Insiemi Numerici

Tra gli insiemi numerici valgono le seguenti inclusioni strette:

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$$

Queste inclusioni sono strette, perché:

- esistono numeri interi che non sono numeri naturali (gli interi negativi);
- esistono numeri razionali che non sono numeri interi (le frazioni proprie);
- esistono numeri reali che non sono razionali (i numeri irrazionali).

In $\mathbb{N}$ nessun numero ha l'inverso additivo né l'inverso moltiplicativo → in $\mathbb{N}$ si possono eseguire l'addizione e la moltiplicazione, ma in generale non è possibile eseguire le operazioni inverse di sottrazione e divisione.

Ad eccezione di 1, in $\mathbb{Z}$ nessun numero ha l'inverso moltiplicativo → in $\mathbb{Z}$ la sottrazione è generalmente possibile, mentre la divisione no.

Intervalli

Un insieme I della retta dei numeri reali si dice intervallo se $\forall x, y \in I$ ogni punto compreso tra x e y appartiene anch'esso a I

$A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 6\}$ → è un intervallo

$B = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$ → non è un intervallo

Tra gli intervalli limitati, per $a, b \in \mathbb{R} : a < b$, si ha:

- Intervallo chiuso $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
- Intervallo aperto a destra $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
- Intervallo aperto a sinistra $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$
- Intervallo aperto $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

Tutti questi intervalli hanno estremo inferiore a ed estremo superiore b.

Intervalli

Tra gli intervalli illimitati si ha:

- Intervallo chiuso illimitato superiormente $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$
- Intervallo aperto illimitato superiormente $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$
- Intervallo chiuso illimitato inferiormente $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$
- Intervallo aperto illimitato inferiormente $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$

Esempio — gli intervalli di riferimento sono intervalli

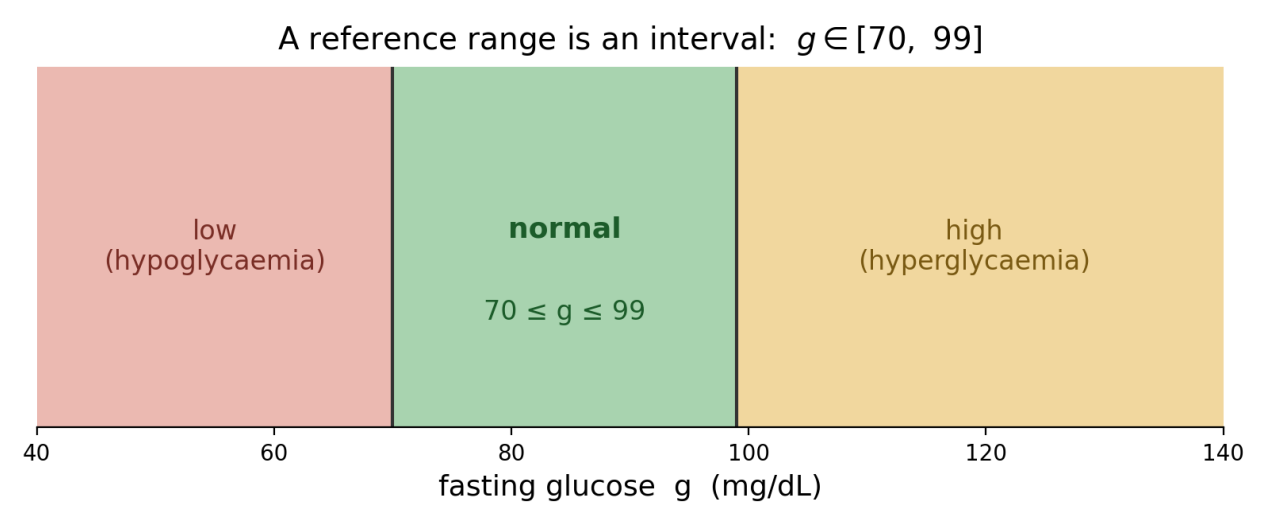
Un risultato clinico viene valutato rispetto a un intervallo di riferimento — un intervallo di valori 'normali'.

I valori interni all'intervallo sono normali; al di fuori, segnalano una possibile condizione patologica.

Per la glicemia a digiuno l'intervallo normale è:

$70 \leq g \leq 99$ mg/dL $\quad\leftrightarrow\quad$ $g \in [70, 99]$

Intervalli e disequazioni sono esattamente il modo in cui si legge ogni referto di laboratorio.



Equazioni

Risolvere un'equazione significa trovare il valore, o i valori, incogniti per cui le due espressioni algebriche assumono lo stesso risultato.

Un insieme di valori che, sostituiti alle incognite, rende vera un'equazione si chiama insieme delle soluzioni o insieme delle radici.

Risolvere un'equazione significa quindi determinare esplicitamente l'insieme di tutte le sue soluzioni.

Esempio.

Risolvere l'equazione

$$5x + 3 = 2x + 4$$

significa trovare il valore di x per cui

Il primo membro $5x + 3$ e il secondo membro $2x + 4$

hanno lo stesso valore

Equazioni algebriche lineari

Un'equazione algebrica di primo grado (o lineare) è un'equazione in cui il grado massimo dell'incognita è uno e che, dopo opportune semplificazioni, può essere scritta nella forma normale:

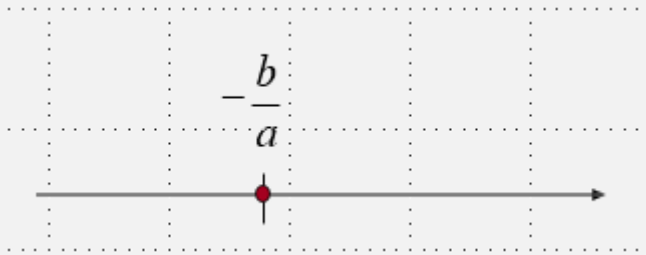
$$ax + b = 0$$

dove $a \neq 0$ e $a, b \in \mathbb{R}$.

Risolvendo rispetto a x si ottiene:

$$x = -\frac{b}{a}$$

SOLUZIONE UNICA!



Casi particolari

Data l'equazione:

$$ax + b = 0 \text{ con } a, b \in \mathbb{R}$$

Se $a = 0$, si possono distinguere due casi:

- $0 \cdot x + b = 0 \quad con\, b \neq 0$ → equazione impossibile (nessuna soluzione)
- $0 \cdot x + b = 0 \quad con\, b = 0$ → equazione indeterminata (infinite soluzioni)

Esempio 1. Risolvere la seguente equazione: $x + 6 = 21$

Sommando a entrambi i membri il numero -6, l'insieme delle soluzioni non cambia:

$$x + 6 - 6 = 21 - 6$$

La soluzione è $x = 15$



Equazioni algebriche di secondo grado

Un'equazione di secondo grado (o quadratica) è un'equazione algebrica in un'incognita x, di grado massimo pari a 2, e può essere scritta nella forma normale:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$
$$a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}$$

Esempio

L'equazione $3x^2 + 2x - 5 = 0$ è un'equazione algebrica di secondo grado scritta

in forma normale con $a = 3, b = 2, c = -5$

Discriminante

Il Discriminantee di un'equazione di secondo grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

è definito come:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Esempio

Per l'equazione

$$3x^2 + 2x - 5 = 0$$

Il Discriminantee è:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4(3)(-5) = 4 + 60 = 64$$

Natura delle soluzioni

A differenza delle equazioni di primo grado, che ammettono sempre un'unica soluzione, un'equazione di secondo grado può non ammettere soluzioni reali oppure ammetterne due, eventualmente coincidenti.

L'esistenza e la natura delle soluzioni reali sono determinate dal segno del discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

l'equazione ammette due soluzioni reali distinte, indicate con x_1 e x_2

→ E vale la seguente fattorizzazione:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

- se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

l'equazione ammette due soluzioni reali coincidenti, indicate con x_0

→ E vale la seguente fattorizzazione:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$$

- se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

l'equazione non ammette soluzioni reali

Natura delle soluzioni

- se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

l'equazione ammette due soluzioni reali distinte

- se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

l'equazione ammette due soluzioni reali coincidenti

se $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ le due soluzioni sono date dalla formula:

$$x_{1,2} = -\frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Esempio. Risolvere la seguente equazione: $x^2 + x - 2 = 0$

Calcoliamo il valore del discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 8 = 9 > 0$$

Quindi l'equazione ammette due soluzioni reali distinte.
Determiniamole:

$$x_{1,2} = -\frac{1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} x_1 = -\frac{4}{2} = -2 \\ x_2 = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

Equazioni con Valore Assoluto

Definizione

Il valore assoluto di un numero reale x è definito come:

- x se x è maggiore o uguale a zero
- $-x$ se x è minore di zero

$$|x| \rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ -x \end{cases}$$

Disequazioni

In matematica, una disequazione è una relazione d'ordine tra due espressioni contenenti incognite.

Risolvere una disequazione significa determinare l'insieme dei valori che, assegnati alle incognite, rendono vera la disequazione.

Tipicamente, le soluzioni di una disequazione sono costituite da uno o più insiemi numerici, detti intervalli.

Disequazioni

PRINCIPI DI EQUIVALENZA

L'insieme delle soluzioni di una disequazione non cambia se:

- si aggiunge la stessa quantità (numero o incognita) a entrambi i membri della disequazione;

di conseguenza, lo stesso termine può essere eliminato da entrambi i membri o spostato da un membro all'altro cambiandone il segno;

- entrambi i membri della disequazione vengono moltiplicati o divisi per la stessa quantità, a condizione di invertire il verso della disequazione quando questa quantità è negativa;

di conseguenza, tutti i termini di entrambi i membri possono cambiare segno, a condizione di invertire anche il verso della disequazione.

Disequazioni Algebriche di Primo Grado

Una disequazione si dice di primo grado (o lineare) se, dopo opportune semplificazioni, può essere scritta nella forma:

$$ax + b \geq 0 \qquad \text{oppure} \quad > 0, \leq 0, < 0$$

dove $a \neq 0$ e $\mathrm{a}, b \in \mathbb{R}$.

Ricordando che le disequazioni

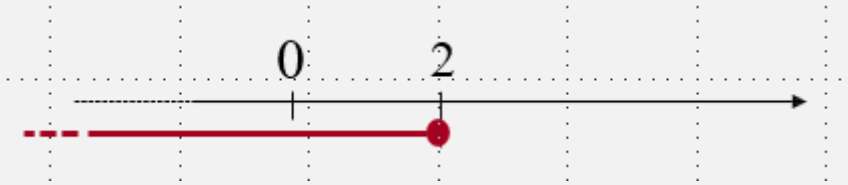
$$ax + b > 0 \text{ e } -ax - b < 0 \text{ con } a \neq 0$$

sono equivalenti, la risoluzione delle disequazioni di primo grado può sempre essere ricondotta al caso in cui il coefficiente a è positivo.

Esempio. Risolvere la seguente disequazione: $5x - 10 \leq 0$

Soluzione:

$$5x \leq 10 \rightarrow x \leq \frac{10}{5} \rightarrow x \leq 2$$



Disequazioni Algebriche di Secondo Grado

Una disequazione di secondo grado (o quadratica) è una disequazione algebrica in un'incognita x, il cui grado massimo è pari a 2 e che può essere ricondotta alla forma:

$$ax^2 + bx + c > 0$$

$$(ax^2 + bx + c < 0)$$

$$a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}$$

Disequazioni Algebriche di Secondo Grado – Soluzioni

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ oppure } (ax^2 + bx + c < 0)$$

$$a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}$$

- Passo 1: Verificare il segno del coefficiente a. Se $a < 0$, cambiare il segno di tutti i termini e invertire il verso della disequazione.

- Passo 2: Determinare le radici reali x_1 e x_2 (se esistono) dell'equazione di secondo grado associata:

$$x_{1,2} = -\frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ con } \Delta = b^2 - 4ac$$

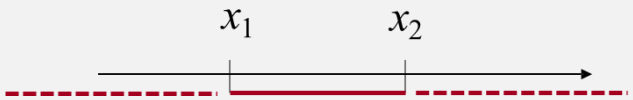
Disequazioni Algebriche di Secondo Grado – Soluzioni

I CASO: $\Delta > 0, a > 0$ → Due soluzioni reali distinte

- $ax^2 + bx + c > 0 \Leftrightarrow x < x_1, \; x > x_2$



- $ax^2 + bx + c < 0 \Leftrightarrow x_1 < x < x_2$



I CASO: $\Delta > 0, a > 0$ → Due soluzioni reali distinte

- $ax^2 + bx + c \geq 0 \Leftrightarrow x \leq x_1, \; x \geq x_2$



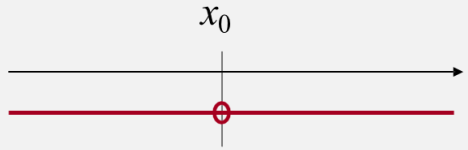
- $ax^2 + bx + c \leq 0 \Leftrightarrow x_1 \leq x \leq x_2$



Disequazioni Algebriche di Secondo Grado – Soluzioni

II CASO: $\Delta = 0, a > 0$ → Due soluzioni reali coincidenti

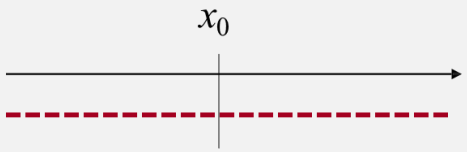
- $ax^2 + bx + c > 0 \Rightarrow \forall x \in R, x \neq x_0$



Ricordiamo che, se il trinomio ammette 2 radici coincidenti pari a x_0 allora si può scrivere:

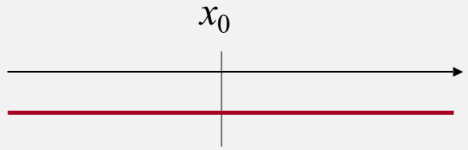
$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$$

- $ax^2 + bx + c < 0 \Rightarrow \nexists x \in R$



II CASO: $\Delta = 0, a > 0$ → Due soluzioni reali coincidenti

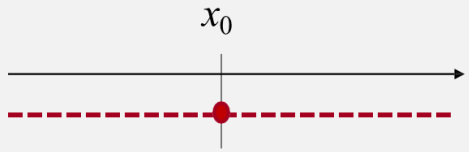
- $ax^2 + bx + c \geq 0 \Rightarrow \forall x \in R$



Ricordiamo che, se il trinomio ammette 2 radici coincidenti pari a x_0 allora si può scrivere:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$$

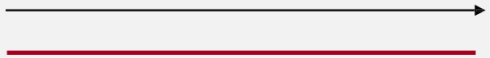
- $ax^2 + bx + c \leq 0 \Rightarrow x = x_0$



Disequazioni Algebriche di Secondo Grado – Soluzioni

III CASO: $\Delta < 0, a > 0$ → Non esistono soluzioni reali

- $ax^2 + bx + c > 0 \Rightarrow \forall x \in R$



- $ax^2 + bx + c < 0 \Rightarrow \nexists x \in R$



III CASO: $\Delta < 0, a > 0$ → Non esistono soluzioni reali

- $ax^2 + bx + c \geq 0 \Rightarrow \forall x \in R$



- $ax^2 + bx + c \leq 0 \Rightarrow \nexists x \in R$



Esempio. Risolvere la seguente disequazione: $-x^2 + 12x - 11 \geq 0$

Soluzione: Cambiamo il segno di tutti i termini e invertiamo il verso della disequazione:

$$x^2 - 12x + 11 \leq 0$$

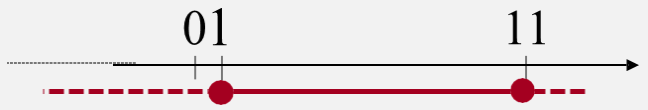
Calcoliamo il discriminante $\Delta = b^2 - 4ac = 144 - 44 = 100$

L'equazione associata ammette due soluzioni reali distinte:

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{12 \pm 10}{2} = \begin{matrix} 1 \\ 11 \end{matrix}$$

In base al verso della disequazione e al segno del discriminante, l'insieme delle soluzioni è:

$$1 \leq x \leq 11$$



Disequazioni con valore assoluto

Disequazioni con un solo valore assoluto con un numero positivo n al secondo membro

- $|A| > n \rightarrow A < -n \vee A > n$
- $|A| \geq n \rightarrow A \leq -n \vee A \geq n$
- $|A| < n \rightarrow \begin{cases} A < n \\ A > -n \end{cases}$
- $|A| \leq n \rightarrow \begin{cases} A \leq n \\ A \geq -n \end{cases}$

Disequazioni con un solo valore assoluto con un numero negativo $-n$ al secondo membro

- $|A| > -n \rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$
- $|A| \geq -n \rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$
- $|A| < -n \rightarrow$ nessuna soluzione
- $|A| \leq -n \rightarrow$ nessuna soluzione

Disequazioni con un solo valore assoluto con zero al secondo membro

- $|A| > 0 \rightarrow A \neq 0$
- $|A| \geq 0 \rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$
- $|A| < 0 \rightarrow$ nessuna soluzione
- $|A| \leq 0 \rightarrow A = 0$

RICORDA

- $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
- $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$
- $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
- $(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

Ricorda: i Logaritmi

il logaritmo di un numero è l'esponente x da dare alla base a per ottenere l'argomento b → $a^x = b$

$$log_a(b) = x$$

a = base → deve essere $a > 0$ e $a \neq 1$
b = argomento → deve essere $b > 0$
x = logaritmo di b in base a → è $\in \mathbb{R}$

Proprietà: $log_a(a) = 1$ | $log_a(1) = 0$ | $a^x > 0$

Alcuni teoremi:

$log_a(b \cdot c) = log_a(b) + log_a(c)$	$log_2(3 \cdot x) = log_2(3) + log_2(x)$
$log_a\left(\frac{b}{c}\right) = log_a(b) - log_a(c)$	$log_2\left(\frac{x}{3}\right) = log_2(x) - log_2(3)$
$log_a(b)^c = c\, log_a(b)$	$log_2(x)^3 = 3\, log_2(x)$

Esempio: il pH è un logaritmo

La concentrazione di ioni idrogeno varia su molti ordini di grandezza, perciò la comprimiamo con un logaritmo:

$$pH = -\log_{10}[H^+]$$

Una diminuzione di un'unità di pH significa dieci volte più H^+.

Il sangue è mantenuto strettamente vicino a pH 7,4; piccole variazioni sono clinicamente gravi.

I logaritmi trasformano un enorme intervallo moltiplicativo in una semplice scala additiva.

