FISICA APPLICATA E BIOSTATISTICA

MODULO MAT3 — Funzioni Elementari e Modelli Biomedici

Numeri, Intervalli, Equazioni e Disequazioni

Prof.ssa Valentina Notarstefano | Università degli Studi di Teramo

Ogni funzione elementare modella qualcosa in Biologia

Le poche funzioni elementari sono i mattoni costitutivi di ogni modello biomedico.

Lineare → taratura, Beer–Lambert. Potenza → scala allometrica (metabolismo ∝ massa^0.75).

Esponenziale → crescita di cellule e virus; decadimento di farmaci e traccianti (emivita).

Logaritmo → pH, decibel, dose–risposta logaritmica — per comprimere intervalli enormi.

Trigonometriche (periodiche) → battito cardiaco, respirazione, ritmi circadiani.

Funzioni Elementari

Funzione Lineare

Funzione Lineare

Una funzione lineare è definita come una funzione la cui forma generale è:

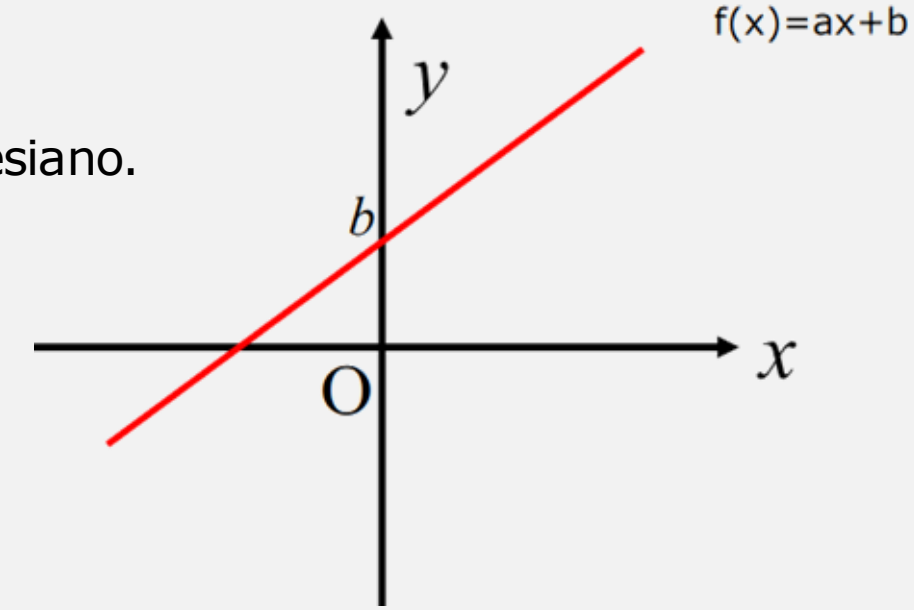
$$f(x) = ax + b, \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

$$f : x \in \mathbb{R} \rightarrow (ax + b) \in \mathbb{R}$$

La costante a è detta pendenza (o coefficiente angolare) della funzione e rappresenta il tasso di variazione della funzione rispetto alla variabile indipendente.

La costante b è detta y-intercetta (o termine noto).

Il grafico di ogni funzione lineare è una retta nel piano cartesiano.



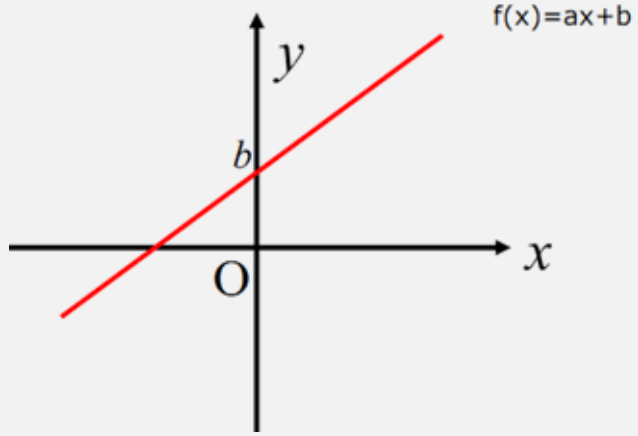
Il Termine Noto b

Una funzione lineare è caratterizzata da due costanti, a e b.

Se $x = 0 \rightarrow y = b$, quindi il punto $P(0, b)$ che si trova sull'asse verticale y, appartiene al grafico della funzione.

Il termine noto b è l'ordinata dell'intersezione del grafico della funzione con l'asse y ed è detta INTERCETTA.

Se la variabile indipendente è il tempo e la funzione si scrive come $f(t) = at + b$, il coefficiente $b = f(0)$ è detto VALORE INIZIALE

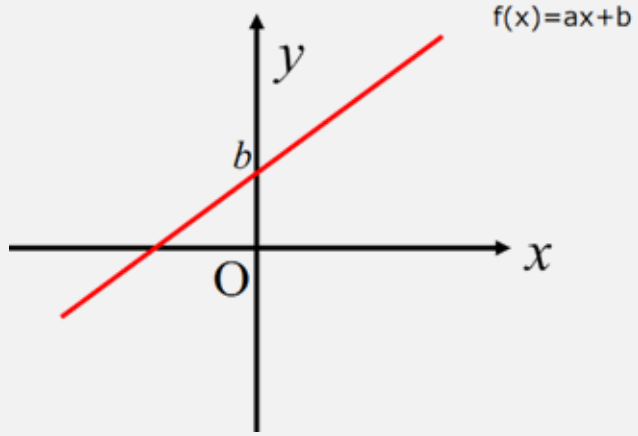


La Pendenza a

Data la funzione $f(x) = ax + b$, il coefficiente a rappresenta la variazione delle ordinate di due punti arbitrari del grafico rispetto alla corrispondente variazione delle ascisse:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

- Il coefficiente a quantifica l'inclinazione della retta rispetto all'asse orizzontale.
- Il coefficiente a è costante.

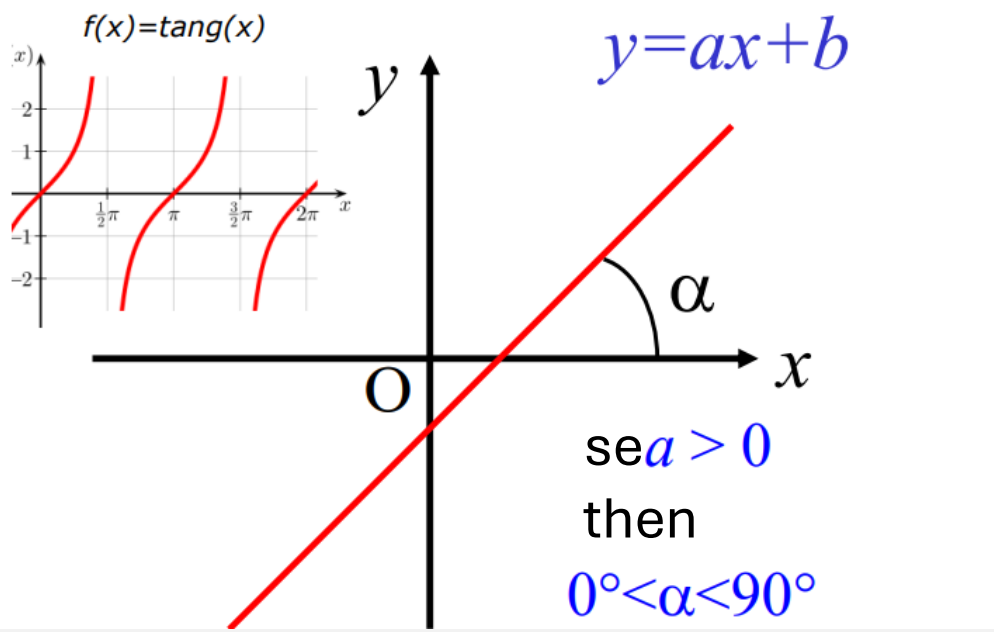


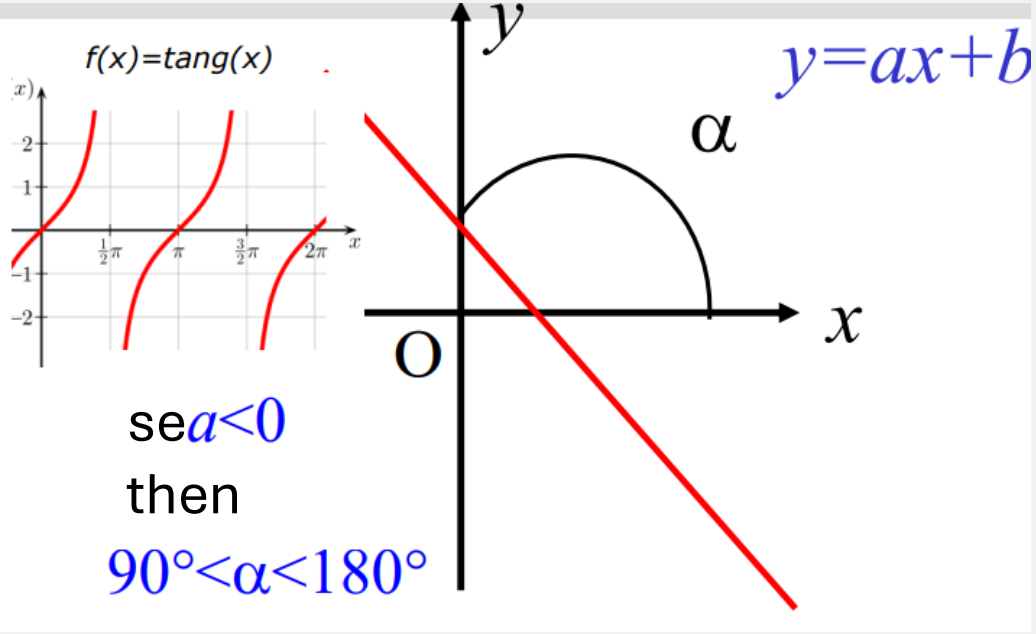
La Pendenza a

La pendenza a è data da:

$$a = \tan\alpha$$

dove α è l'angolo formato dalla retta con l'asse orizzontale, misurato in senso antiorario





f strettamente crescente in R

$\sup(ax+b) = +\infty;\ \inf(ax+b) = -\infty$

f strettamente decrescente in R

$\sup(ax+b) = +\infty;\ \inf(ax+b) = -\infty$

Funzioni Elementari

Funzione Valore Assoluto

La Funzione Valore Assoluto

La funzione valore assoluto è definita da:

$$f(x) = |x|$$

$$f : x \in \mathbb{R} \to |x| \in [0, +\infty)$$

dove

$$|x| = \begin{cases} x \text{ se } x \geq 0 \\ -x \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

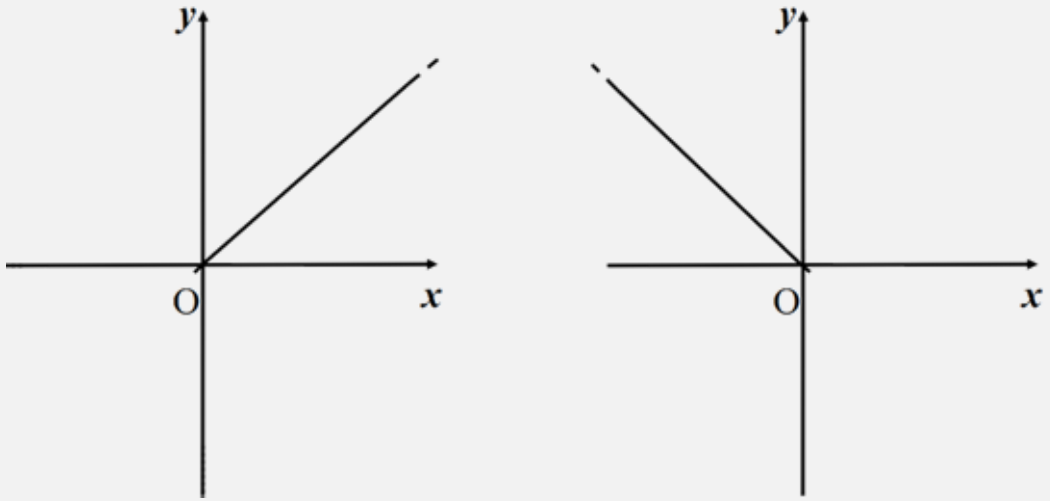
Il suo grafico è costituito da due semirette passanti per l'origine.

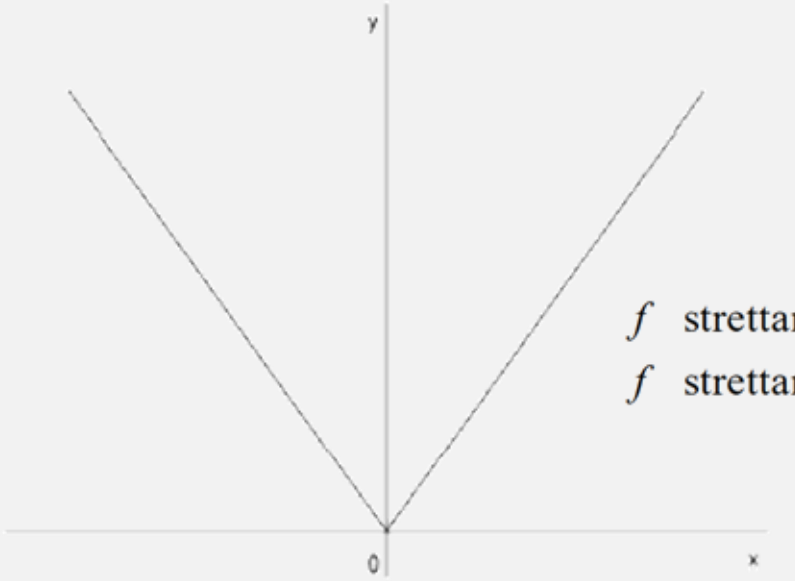
$$f(x) = x \text{ e } f(x) = -x$$

$$f(x) = |x|$$

$$f : x \in \mathbb{R} \rightarrow |x| \in [0, +\infty)$$

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x \text{ se } x \geq 0 \\ -x \text{ se } x < 0 \end{cases}$$





f strettamente decrescente in $(-\infty,0]$

f strettamente crescente in $[0,+\infty)$

$\sup|x| = +\infty; \inf|x| = 0$

Funzioni Elementari

Funzione Potenza

La Funzione Potenza con Esponente Naturale

$$f(x) = x^n, \qquad n \in \mathbb{N} \text{ fissato}$$

$$f : x \in \mathbb{R} \to x^n \in \text{codominio che dipende da } n$$

x è la base della funzione potenza e varia nel dominio
n è l'esponente della funzione potenza ed è fissato

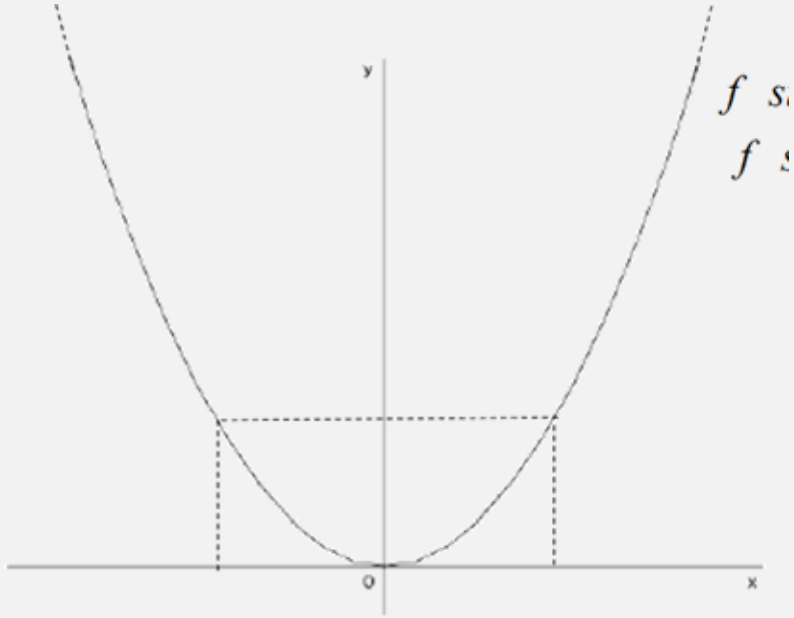
Regole:

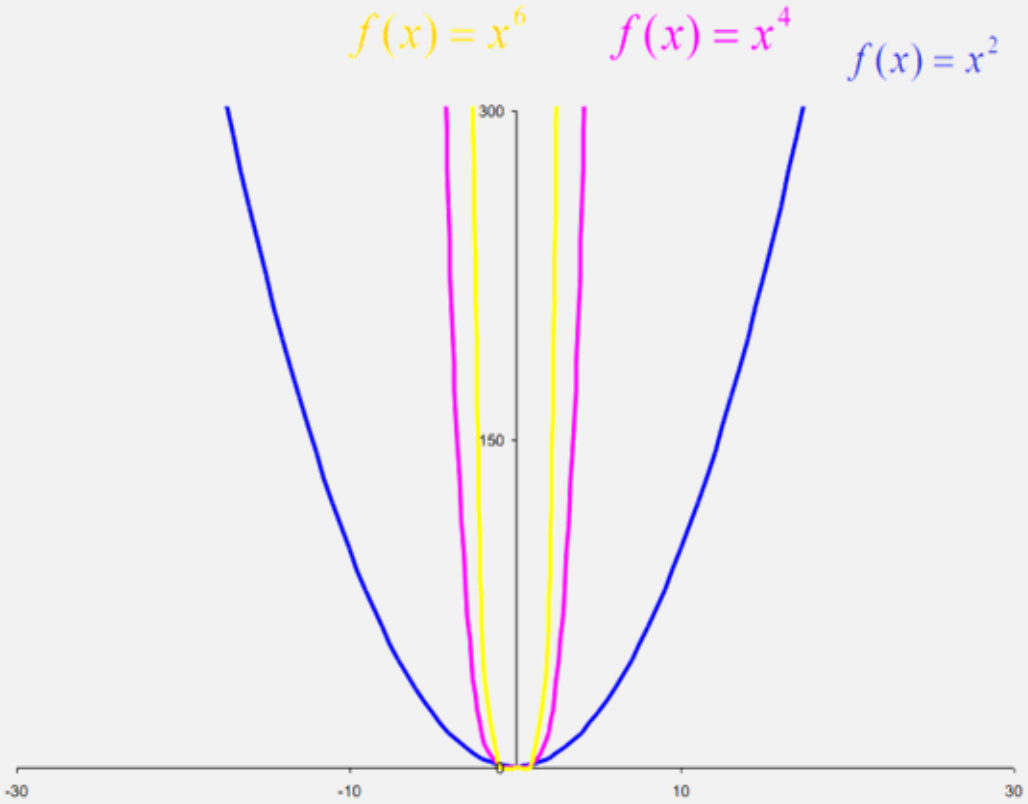
Base positiva: qualsiasi esponente è ammesso
Base negativa: esponente intero o esponente razionale con denominatore dispari

La Funzione Potenza con Esponente Naturale Pari

$$f(x) = x^n, \qquad n \in \mathbb{N} \text{ fissato e pari}$$

$$f : x \in \mathbb{R} \to x^n \in [0, +\infty)$$



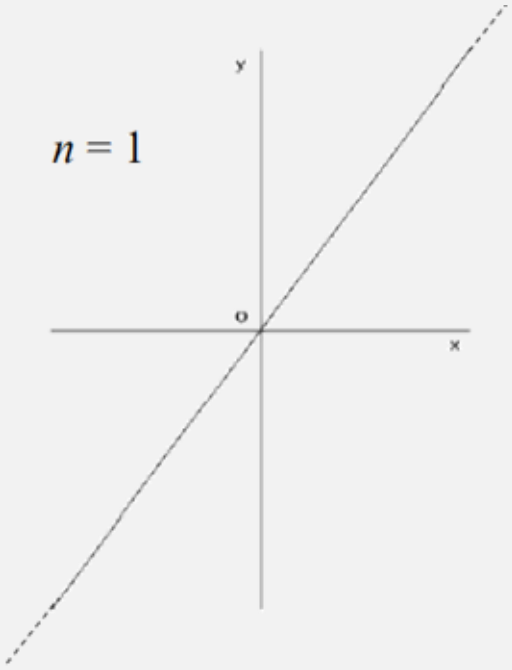


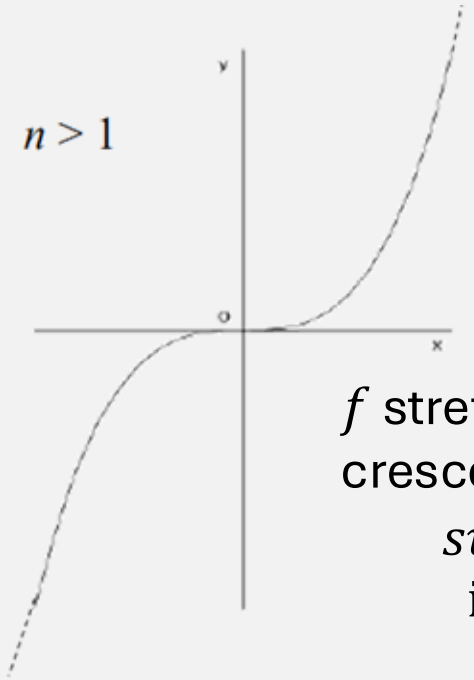
f strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$
f strettamente crescente in $(0, +\infty)$
$sup\ x^n = +\infty;\ \inf x^n = 0$

La Funzione Potenza con Esponente Naturale Dispari

$$f(x) = x^n, \qquad n \in \mathbb{N} \text{ fissato e dispari}$$

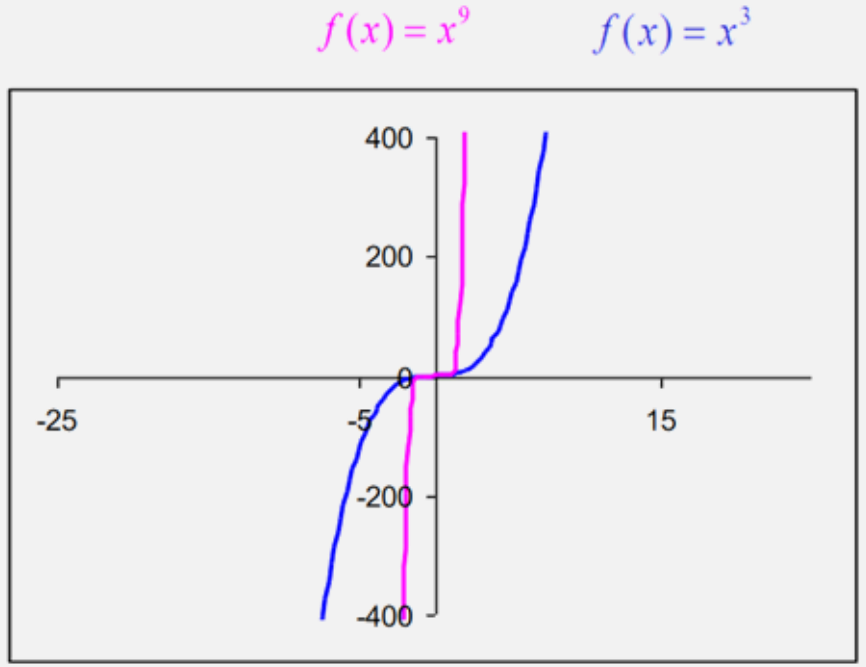
$$f : x \in \mathbb{R} \to x^n \in \mathbb{R}$$





f strettamente crescente in $\mathbb{R}$

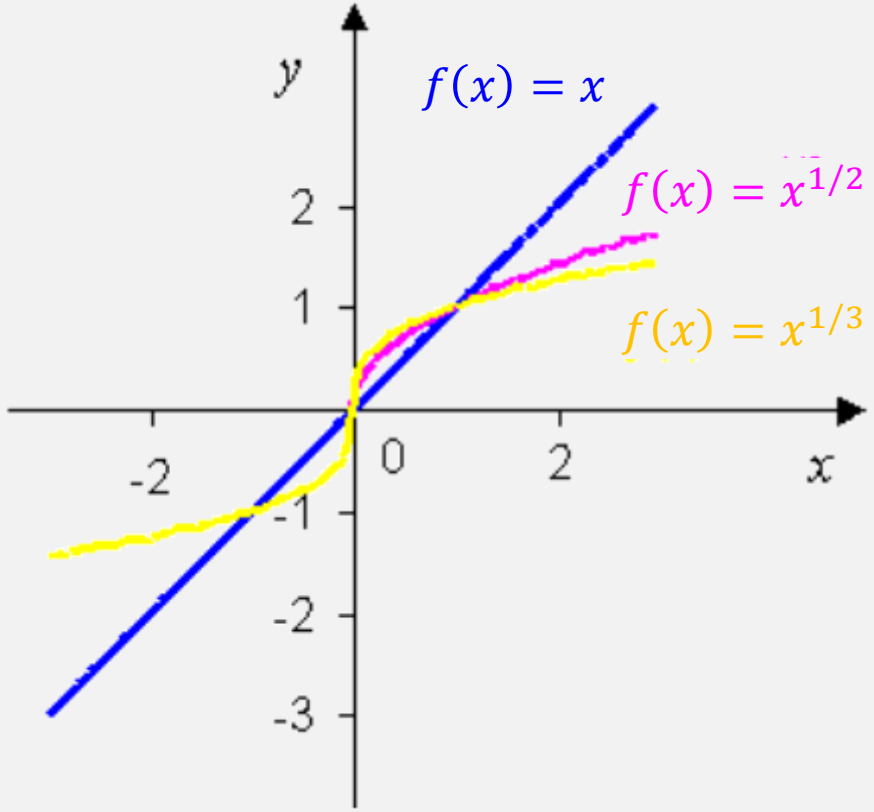
$$sup\ x^n = +\infty;$$
$$\inf x^n = -\infty$$



La Funzione Potenza con Esponente $1/n$ (Funzione Radice)

$$f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}, \qquad n \in \mathbb{N} \text{ fissato}, n \geq 2$$

Il dominio e il codominio dipendono dal valore di n



Funzioni Elementari

Funzione Polinomiale

La Funzione Polinomiale (o Quadratica)

Una funzione polinomiale è definita come una funzione (in generale non monotona) espressa dalla forma generale:

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$
$$f : D \to \mathbb{R}$$

$n \in \mathbb{N}$ è il grado del polinomio

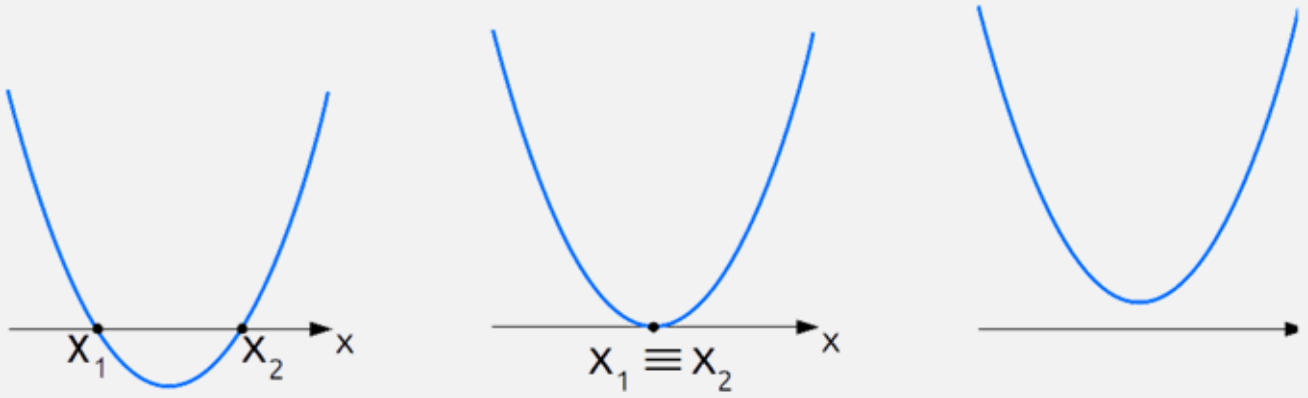
$a_n, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ sono i coefficienti

Il coefficiente di grado massimo a_n è $\neq 0$

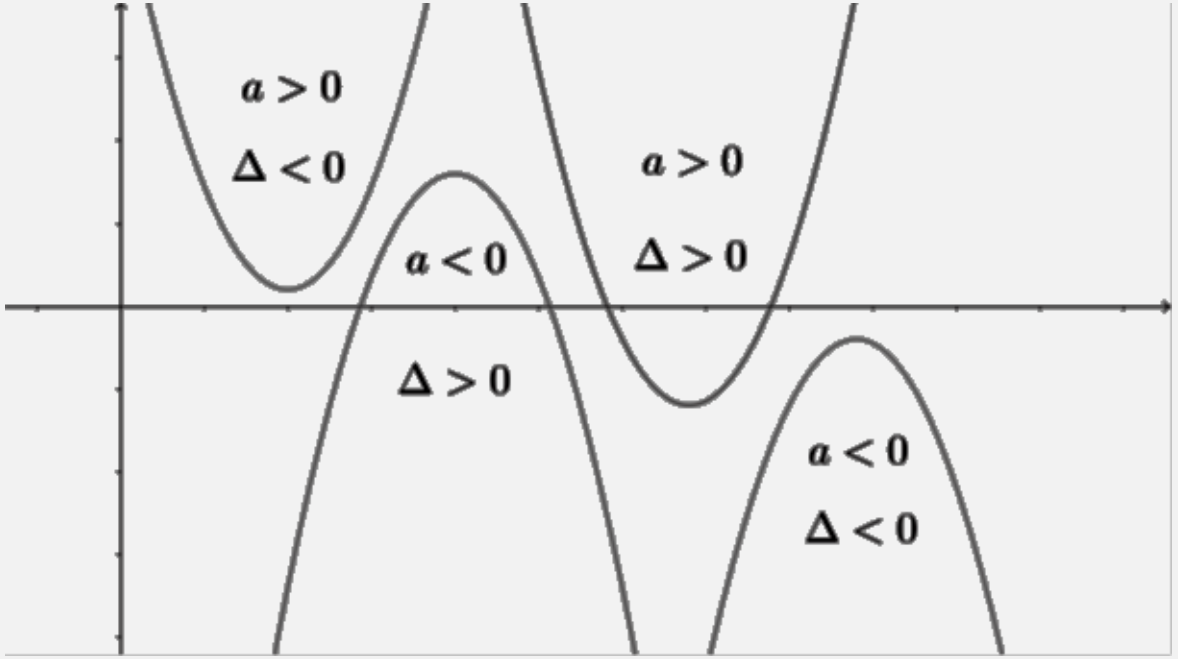
Se il grado del polinomio che definisce f è uguale a 2:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \qquad a \neq 0$$

- se $a > 0$, la parabola è rivolta verso l'alto, mentre se $a < 0$, la parabola è rivolta verso il basso
- l'ascissa del vertice è $x = -\frac{b}{2a}$
- il vertice è $V = (-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a})$ e rappresenta l'asse di simmetria della parabola
- se $a > 0$ l'ordinata del vertice rappresenta il valore minimo della funzione $f(x) = ax^2 + bx + c$, mentre se $a < 0$ rappresenta il valore massimo
- il punto $(0, c)$ è l'intersezione con l'asse y.
- Le soluzioni dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ danno le intersezioni con l'asse x.



$\Delta > 0$ $\Delta = 0$ $\Delta < 0$



Funzioni Elementari

Funzione Esponenziale

La Funzione Esponenziale

$$f(x) = a^x, a \in \mathbb{R} \text{ fissato}, a > 0, a \neq 1$$

$$f : x \in \mathbb{R} \to a^x \in (0, +\infty)$$

a è la base della funzione esponenziale ed è fissata
x è l'esponente e varia nel dominio

La funzione esponenziale è sempre positiva

La Funzione Esponenziale con base $a > 1$

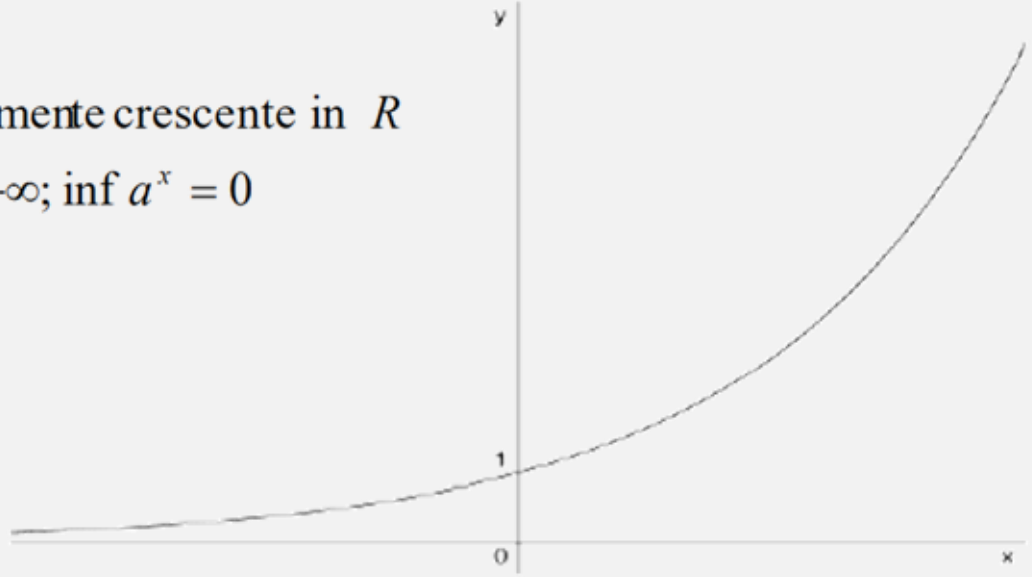
$$f(x) = a^x, a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$$

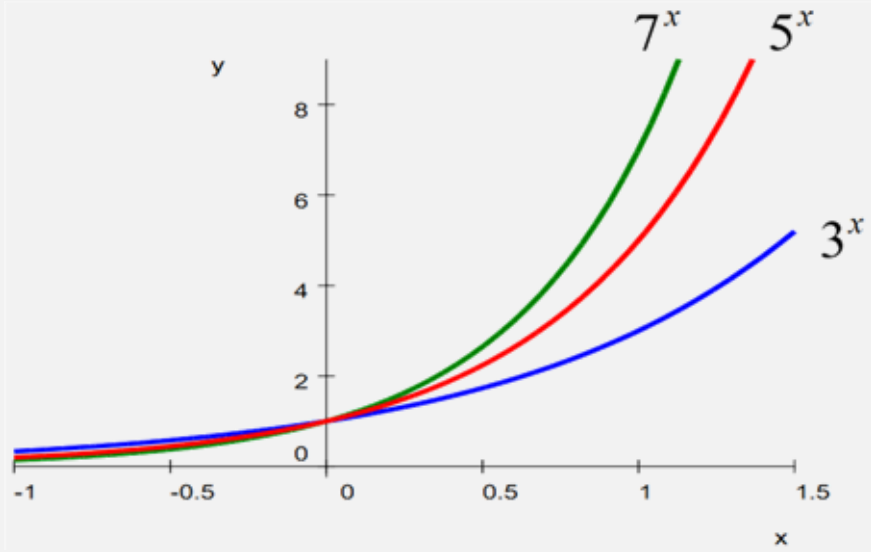
caso $a > 1$

$$f : x \in \mathbb{R} \to a^x \in (0, +\infty)$$

f strettamente crescente in R

$\sup a^x = +\infty; \inf a^x = 0$



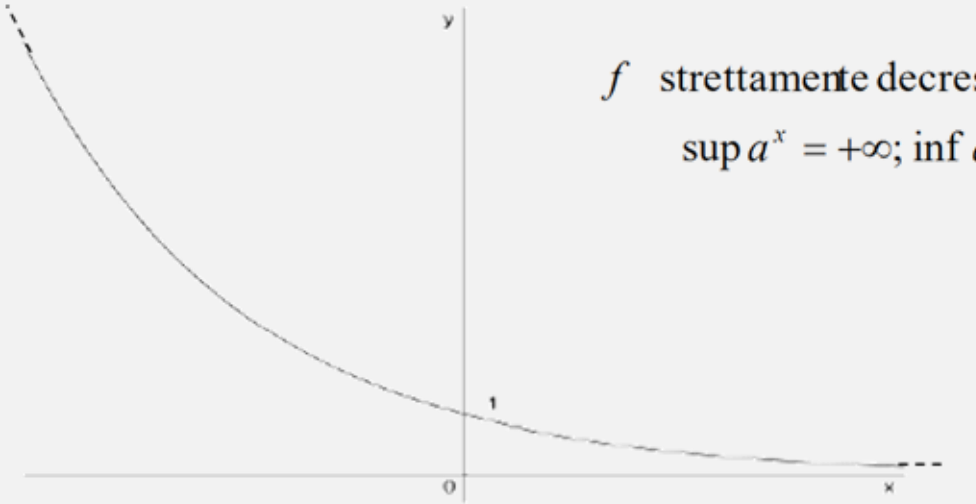


La Funzione Esponenziale con base $0 < a < 1$

$$f(x) = a^x, a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$$

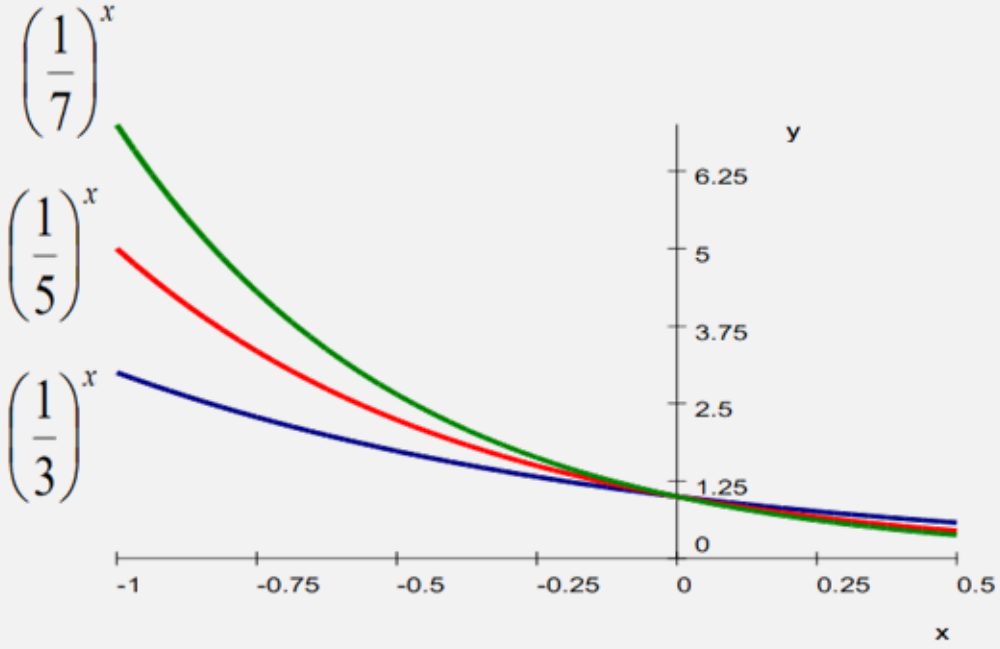
caso $0 < a < 1$

$$f : x \in \mathbb{R} \to a^x \in (0, +\infty)$$



f strettamente decrescente in R

$\sup a^x = +\infty; \inf a^x = 0$



La Funzione Esponenziale con base e

Una funzione esponenziale particolarmente importante ha come base il numero irrazionale

$$e = 2.7182$$

detto numero di Nepero

La funzione esponenziale $f(x) = e^x$ è strettamente crescente in $\mathbb{R}$ poiché $e > 1$

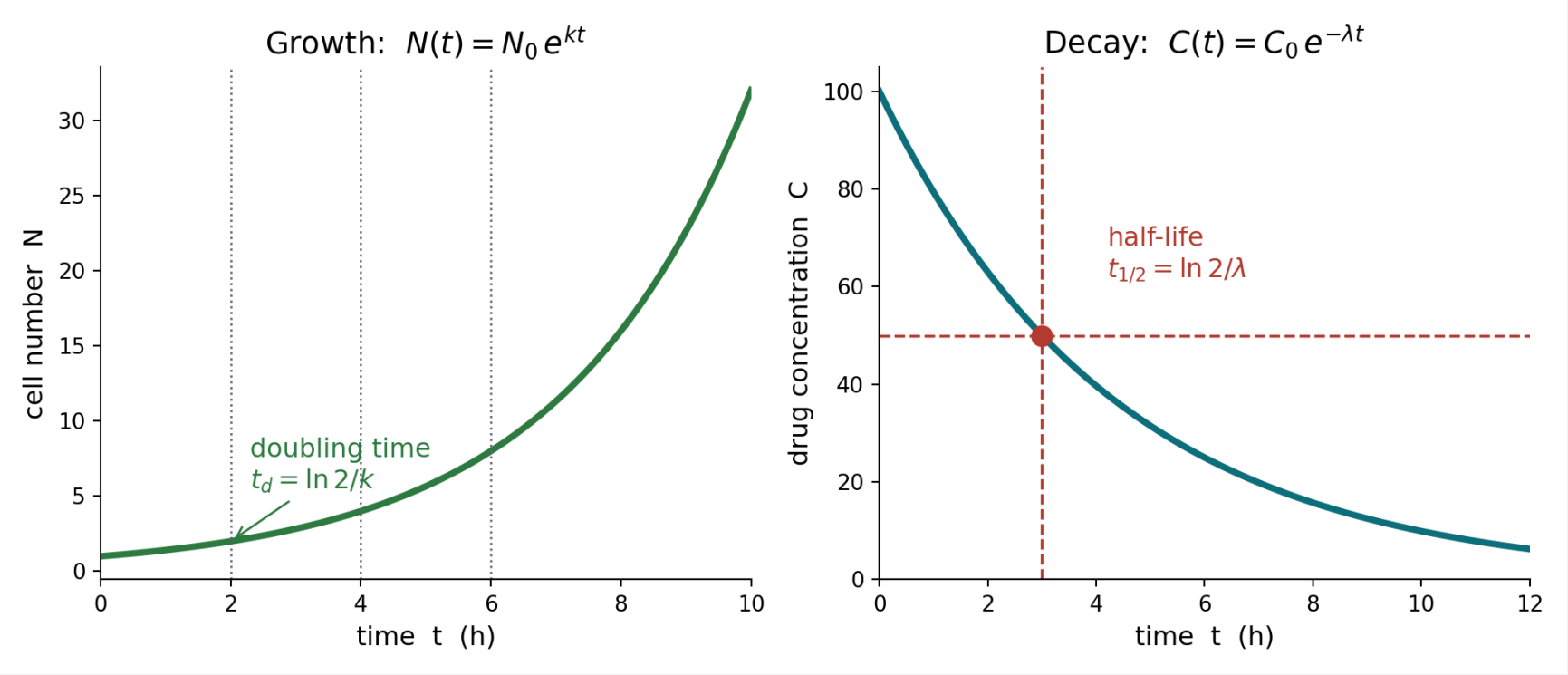
Esempio - Crescita e Decadimento Esponenziale

La stessa forma descrive biologie opposte, a seconda del segno dell'esponente:

Crescita (batteri, virus): $N(t) = N_0 e^{(kt)}$, tempo di raddoppio $t_d = ln2/k$

Decadimento (eliminazione del farmaco, tracciante): $C(t) = C_0 e^{(-\lambda t)}$, emivita $t(1/2) = ln2/\lambda$

Un tempo di raddoppio (o un'emivita) costante è la caratteristica distintiva di un processo esponenziale.



Funzioni Elementari

Funzione Logaritmica

La Funzione Logaritmica

$$f(x) = \log_a x\,, a \in \mathbb{R}\,\text{fissato}, a > 0, a \neq 1$$

$$f : x \in (0, +\infty) \to \log_a x \in \mathbb{R}$$

a è la base del logaritmo
x è l'argomento e varia nel dominio

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$$

Il logaritmo è la funzione inversa dell'esponenziale:

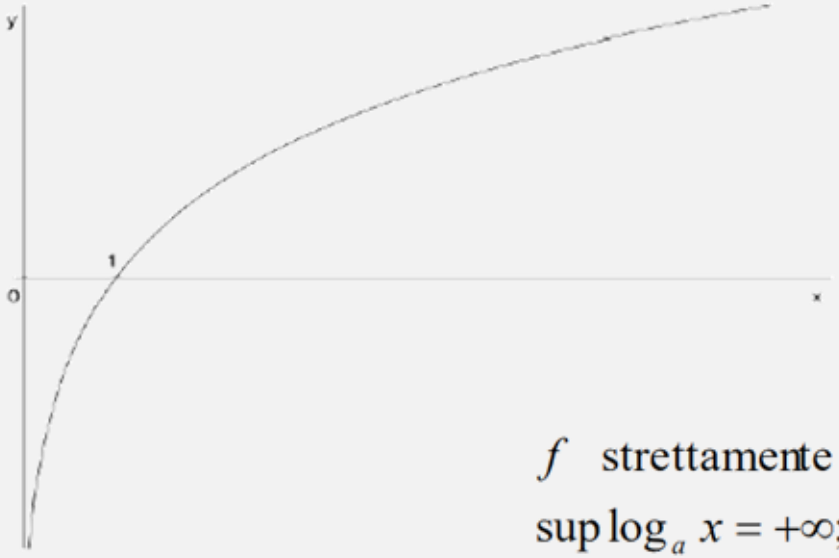
$$x = a^{\log_a x} \qquad x = \log_a(a^x)$$

La Funzione Logaritmica con base $a > 1$

$$f(x) = \log_a x\,, a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$$

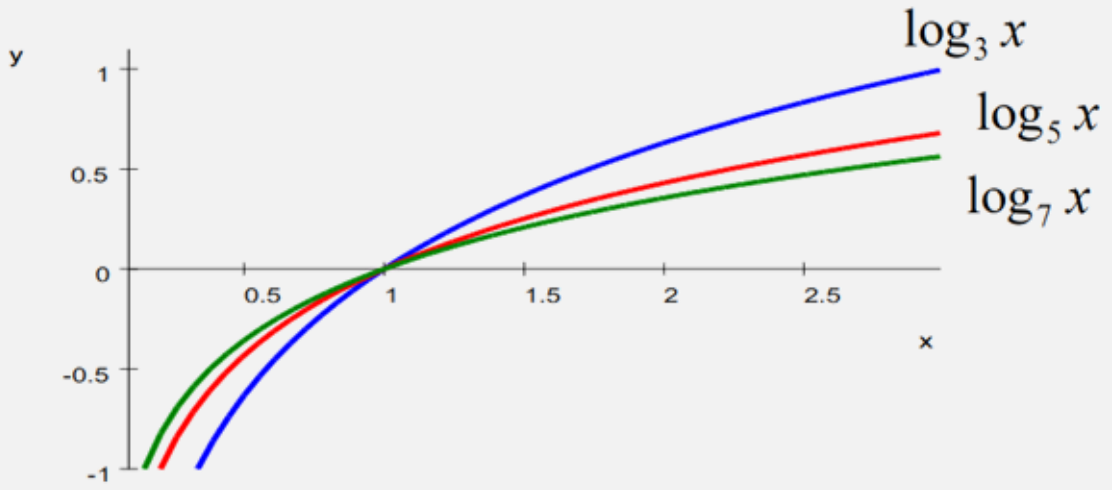
caso $a > 1$

$$f : x \in (0, +\infty) \to \log_a x \in \mathbb{R}$$



f strettamente crescente in $(0,+\infty)$

$\sup \log_a x = +\infty; \inf \log_a x = -\infty$

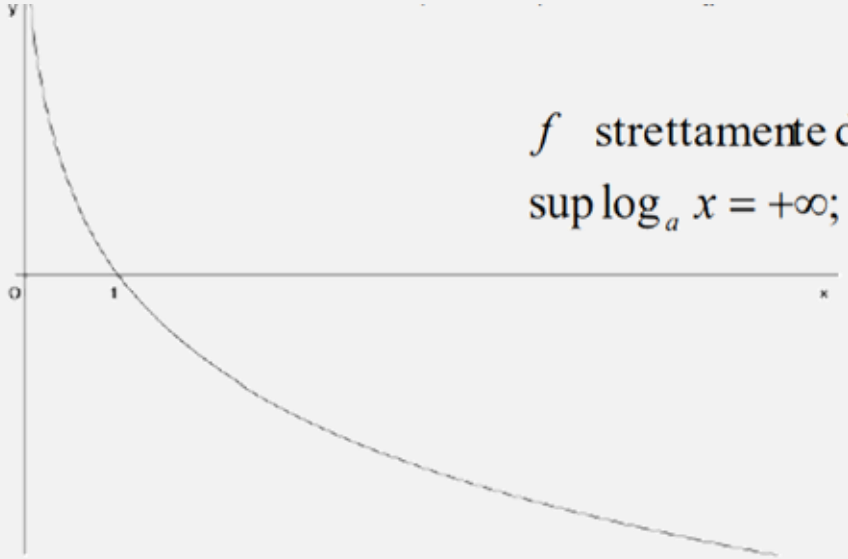


La Funzione Logaritmica con base $0 < a < 1$

$$f(x) = \log_a x\,, a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$$

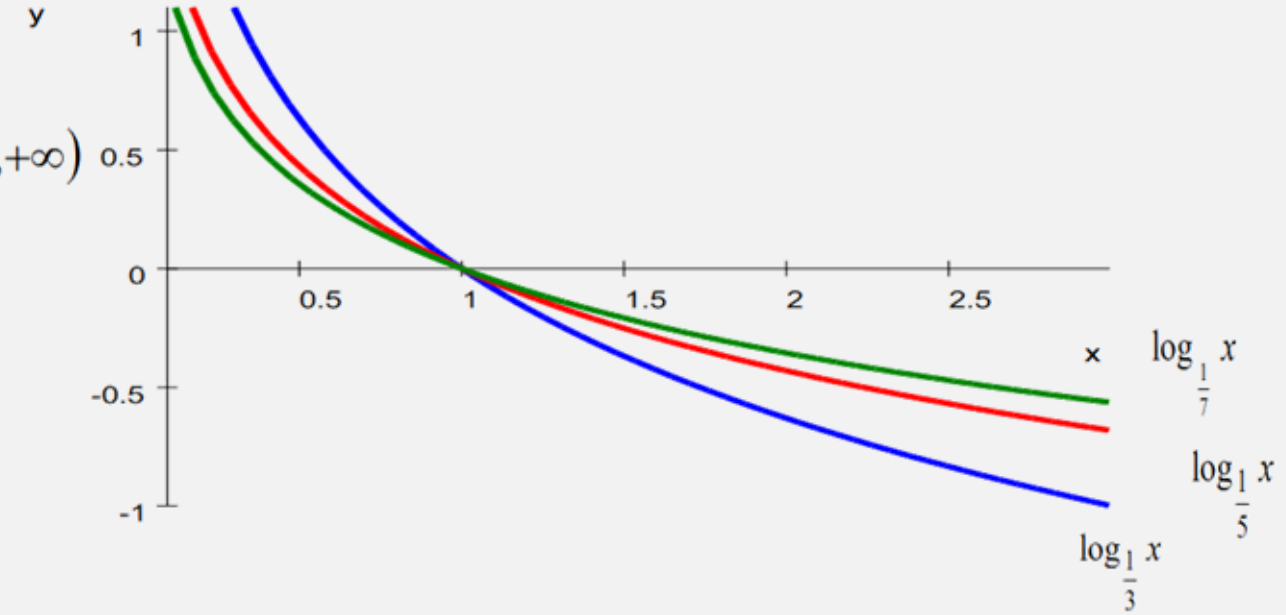
caso $0 < a < 1$

$$f : x \in (0, +\infty) \to \log_a x \in \mathbb{R}$$



f strettamente decrescente in $(0,+\infty)$

$\sup \log_a x = +\infty;\ \inf \log_a x = -\infty$



La Funzione Esponenziale con base e (o Logaritmo Naturale)

La funzione logaritmica con base e è detta logaritmo naturale:

$$f(x) = \log_e x = \log x = \ln x$$

La funzione esponenziale $f(x) = \log_e x$ è una funzione strettamente crescente poiché $e > 1$

Esempio – Dose-Risposta in Scala Logaritmica

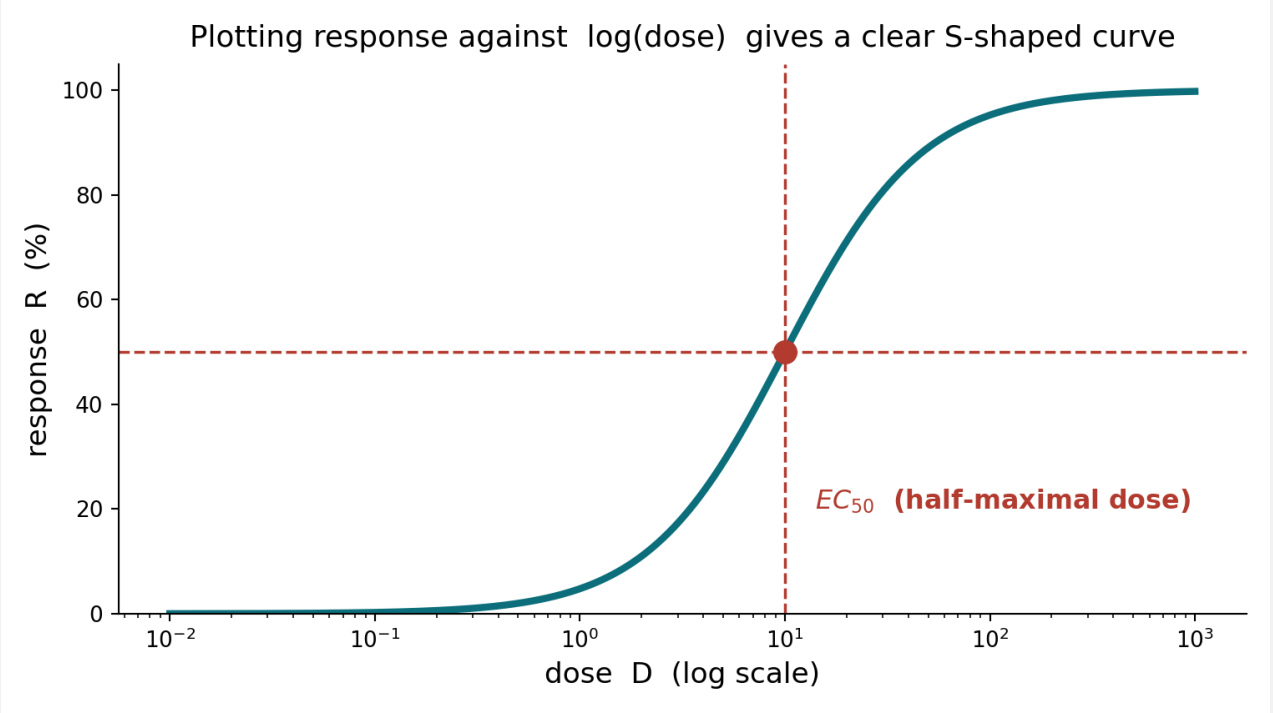
Le dosi di farmaco spaziano su più ordini di grandezza, perciò rappresentiamo la risposta in funzione di log(dose).

Su questa scala la risposta diventa una chiara curva a S (sigmoide).

La dose che dà metà della risposta massima è l'indicatore di potenza EC_{50}.

$$R = E_{max} \cdot D^{h} / (EC_{50}{}^{h} + D^{h})$$

I logaritmi rendono confrontabile un ampio intervallo di dosi e rivelano EC_{50} a colpo d'occhio.

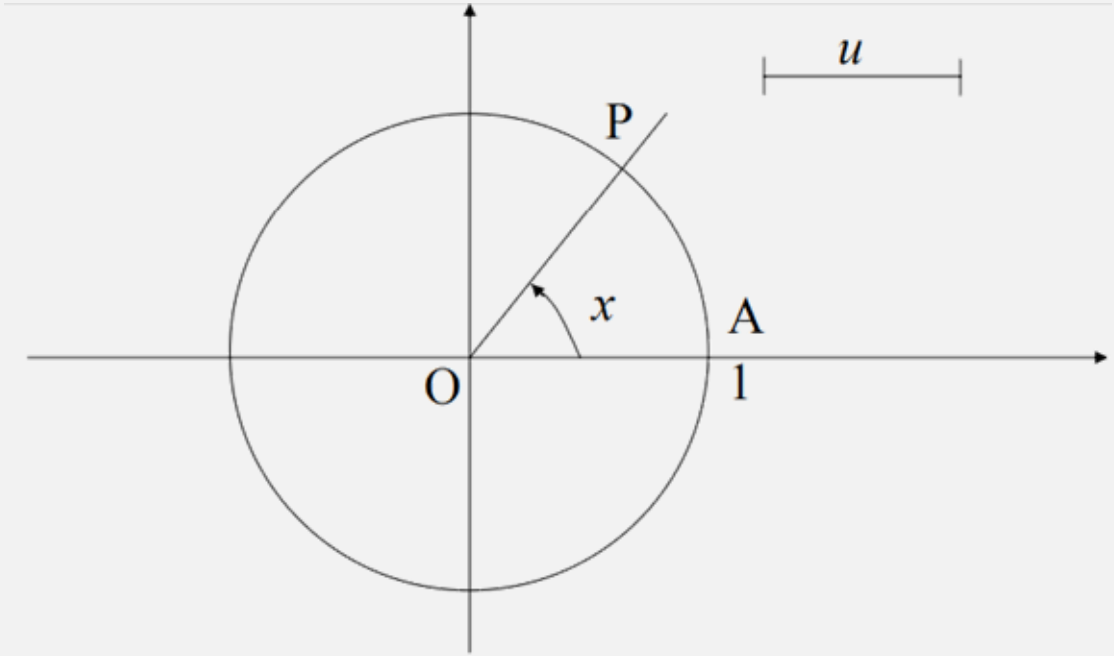


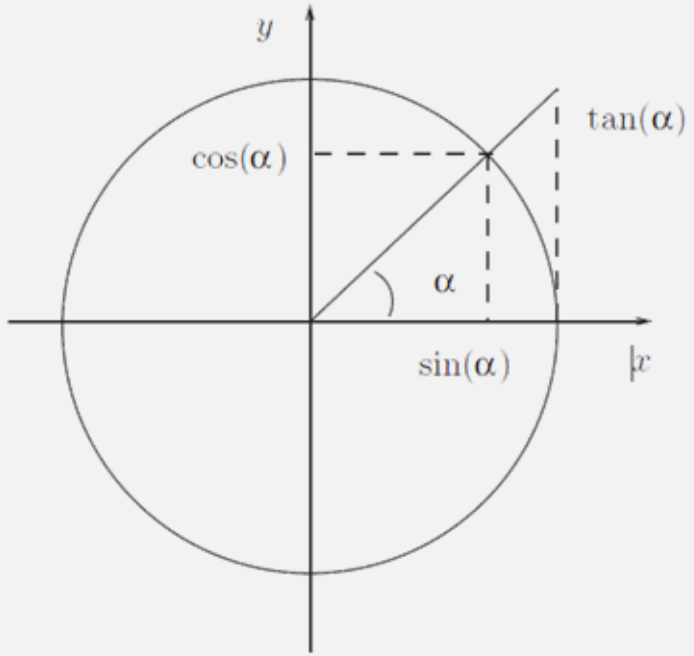
Funzioni Elementari

Funzioni Trigonometriche

Circonferenza Goniometrica

Sia P un punto che si muove sulla circonferenza goniometrica, a partire dal punto A, origine degli archi, e sia x l'angolo sotteso da P.

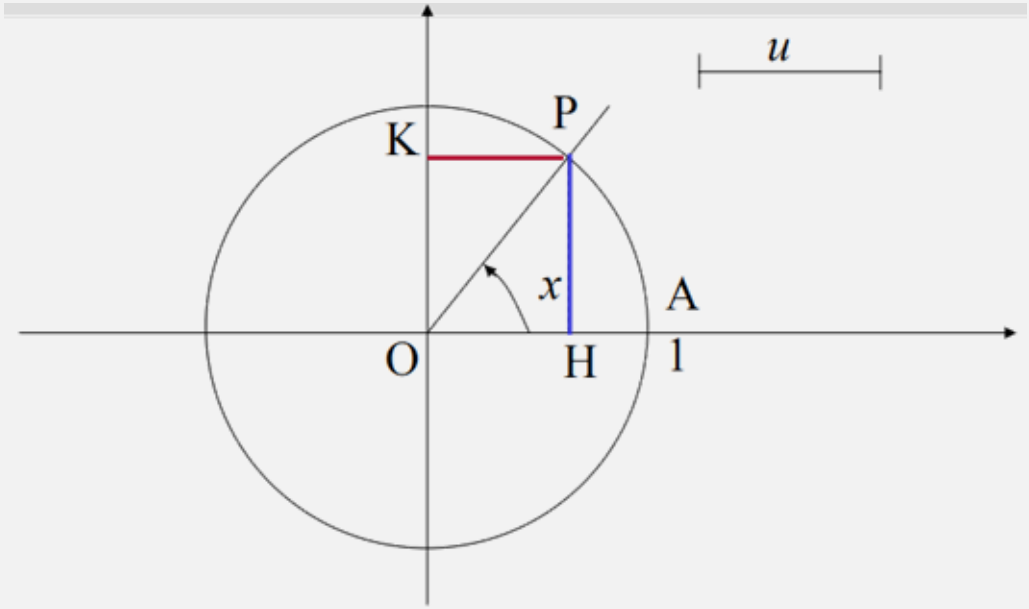


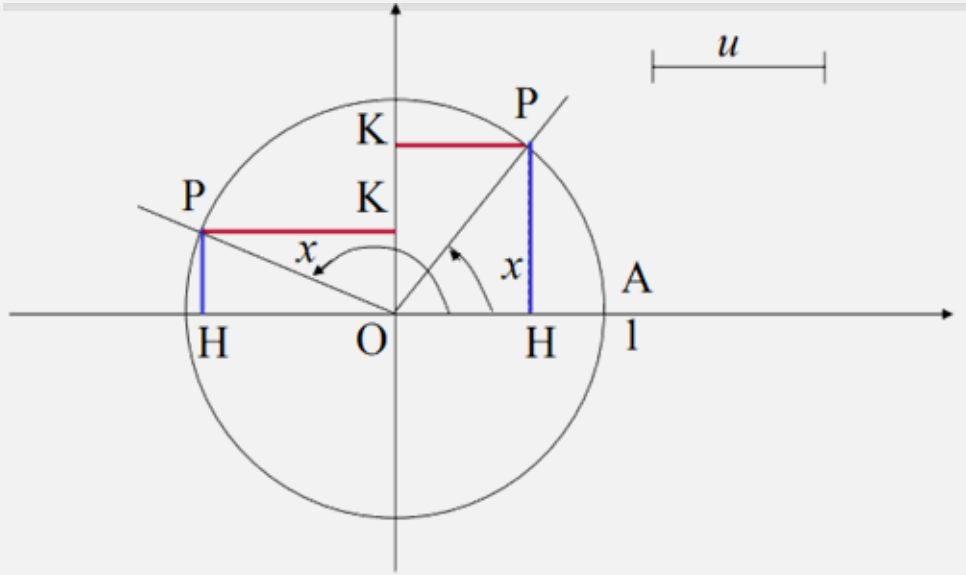


Identità fondamentale della trigonometria: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Seno e Coseno

$\sin x$ è definito come l'ordinata del punto P (cioè il segmento PH).
$\cos x$ è definito come l'ascissa del punto P (cioè il segmento PK).





Al variare della posizione di P, varia l'angolo x, e quindi $\sin x$ e $\cos x$ variano.

Funzione Seno

$$f(x) = \sin x$$

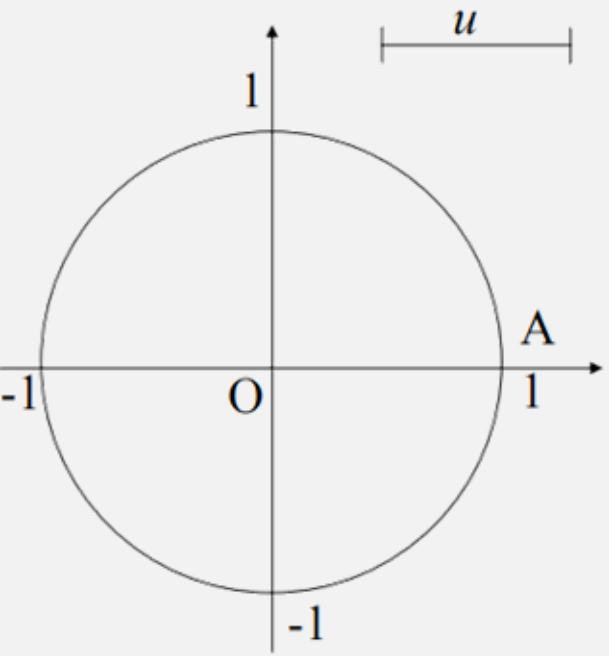
$$f : x \in \mathbb{R} \rightarrow \sin x \in [-1, +1]$$

Il dominio della funzione seno è tutto l'insieme $\mathbb{R}$, poiché un punto P che si muove sulla circonferenza goniometrica può percorrerla infinite volte, compiendo infiniti giri (a ogni giro, l'angolo aumenta di una quantità pari a 2π).

Il codominio della funzione seno è l'intervallo $[-1, +1]$, poiché il valore minimo assunto dall'ordinata del punto P è -1, mentre il valore massimo è $+1$.

Funzione Seno

Per ogni valore fissato dell'arco x, la funzione seno assume un corrispondente valore numerico.



x	*sen x*
0	0
π/4	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
π/2	1
π	0
π/6	1/2
π/3	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
3/2 π	-1
2 π	0

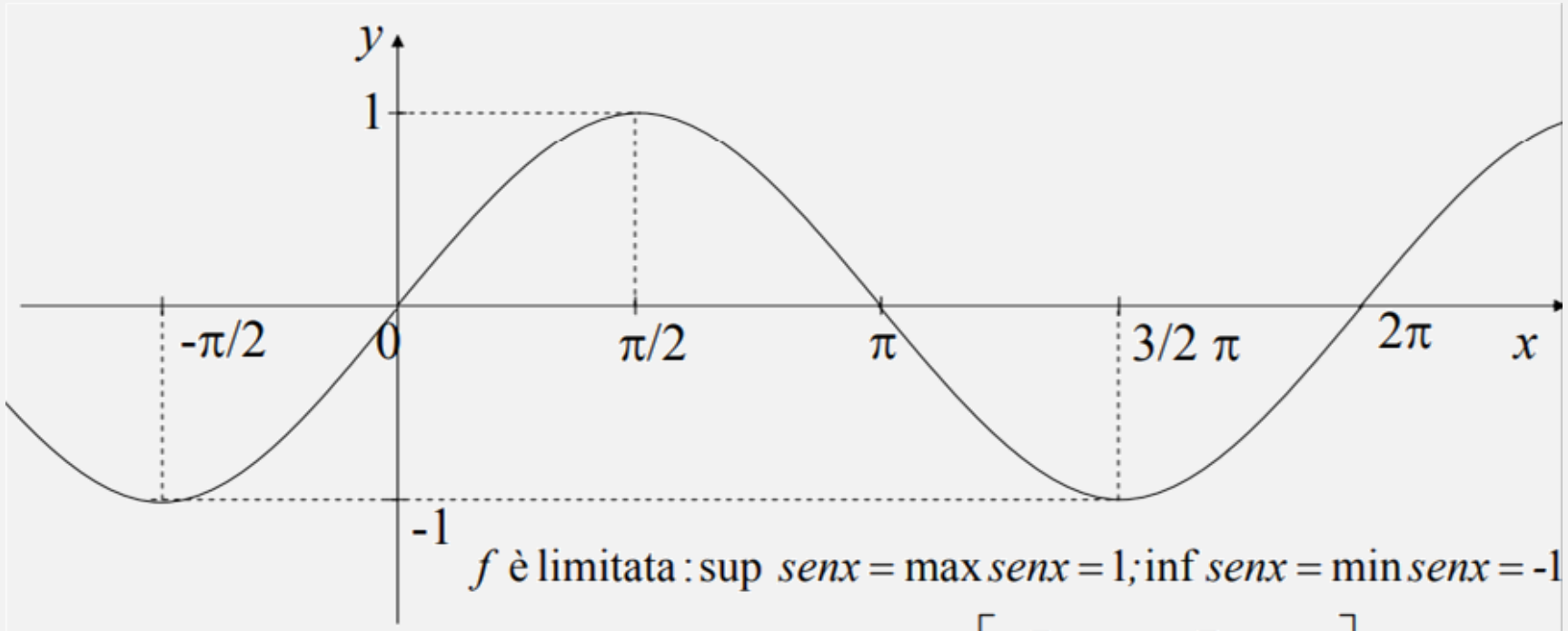
Periodicità
A ogni giro completo (corrispondente a un arco di lunghezza 2π), la funzione assume gli stessi valori $\sin x$

→ quindi la funzione seno è periodica di periodo 2π:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x\,, \forall x \in \mathbb{R}$$

Punti importanti

- $(0,0) \rightarrow f(0) = 0$
- $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) \rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
- $(\pi, 0) \rightarrow f(\pi) = 0$
- $\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right) \rightarrow f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$
- $(2\pi, 0) \rightarrow f(2\pi) = 0$



f è limitata : $\sup\ senx = \max senx = 1; \inf\ senx = \min senx = -1$

f strettamente crescente in $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right], k \in Z$

f strettamente decrescente in $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right], k \in Z$

f dispari : $-senx = sen(-x)$

Non è invertibile su R!

Funzione Coseno

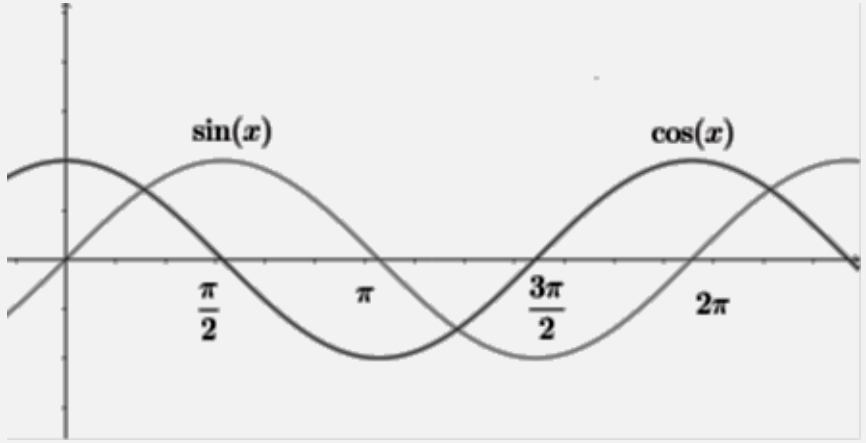
$$f(x) = \cos x$$

$$f : x \in \mathbb{R} \rightarrow \cos x \in [-1, +1]$$

Il dominio della funzione coseno è tutto l'insieme $\mathbb{R}$, poiché un punto P che si muove sulla circonferenza goniometrica può percorrerla infinite volte, compiendo infiniti giri (a ogni giro, l'angolo aumenta di una quantità pari a 2π).

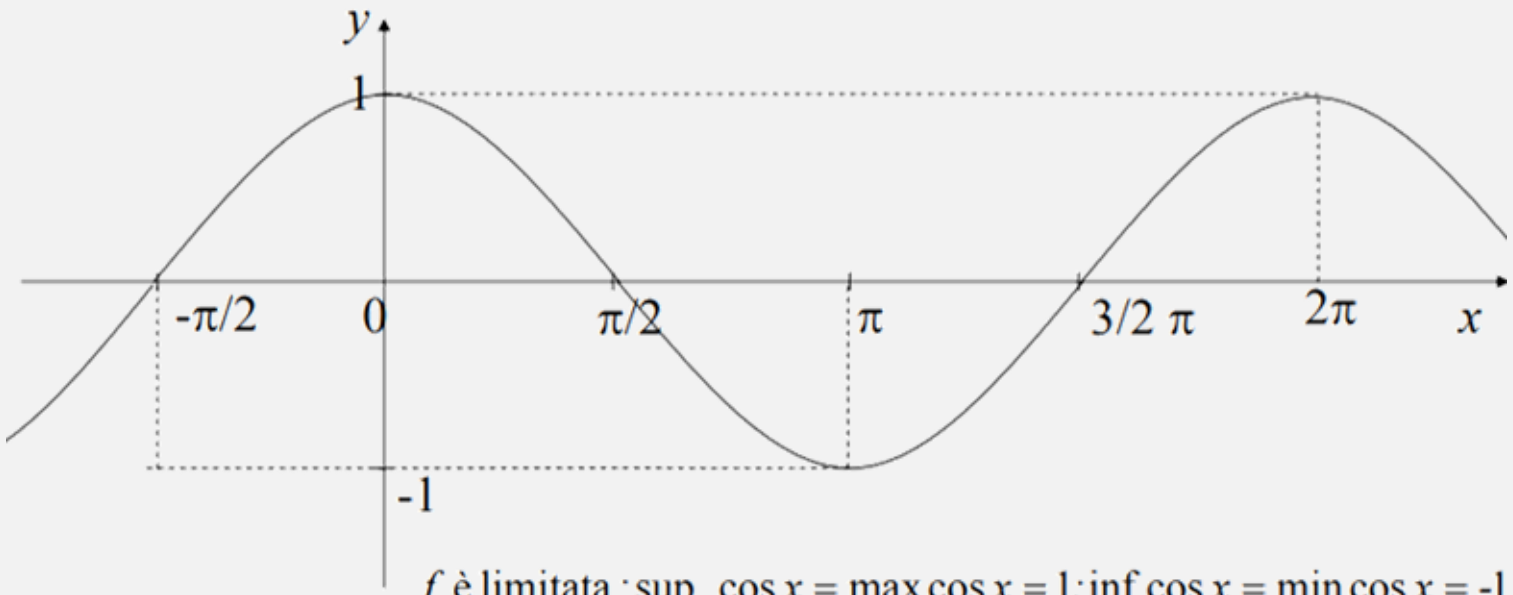
Il codominio della funzione coseno è l'intervallo $[-1, +1]$, poiché il valore minimo assunto dall'ordinata del punto P è -1, mentre il valore massimo è $+1$.

La funzione $\cos x$ risulta uguale a $\sin x$ traslata di $\frac{\pi}{2}$: $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$



Punti importanti

- $(0,1) \rightarrow f(0) = 1$
- $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
- $(\pi, -1) \rightarrow f(\pi) = -1$
- $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right) \rightarrow f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$
- $(2\pi, 1) \rightarrow f(2\pi) = 1$



f è limitata : sup $\cos x = \max \cos x = 1$; inf $\cos x = \min \cos x = -1$

f strettamente crescente in $[\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi]$, $k \in Z$

f strettamente decrescente in $[2k\pi, \pi + 2k\pi]$, $k \in Z$

f pari : $\cos x = \cos(-x)$

⇩

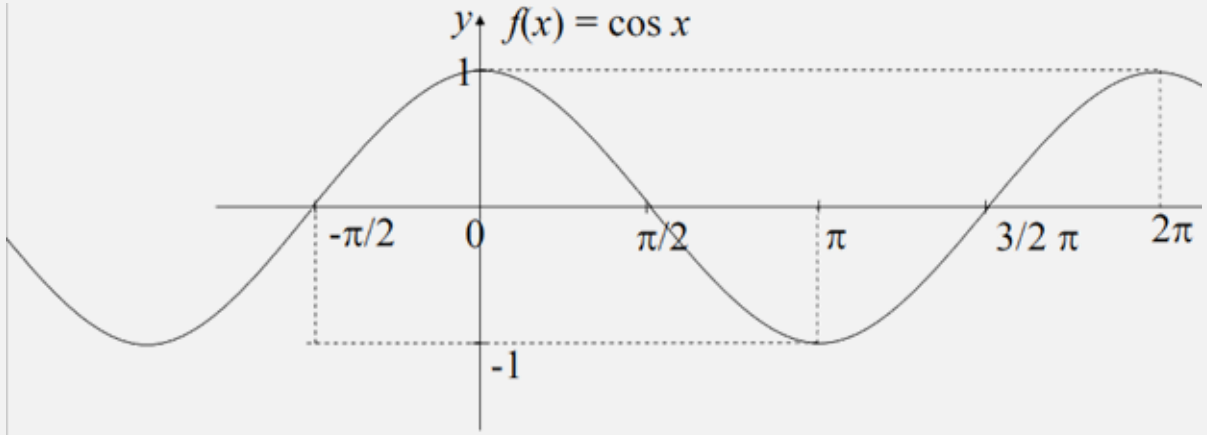
Non è invertibile su R!

Funzione Tangente

$$f(x) = \tan x = \mathrm{tg}\, x$$
$$= \frac{\sin x}{\cos x}, \text{con cos} \quad x \neq 0$$

$$f : x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots\right\}$$

Il dominio della funzione tangente è tutto l'insieme $\mathbb{R}$ privato dei valori che annullano il coseno al denominatore.



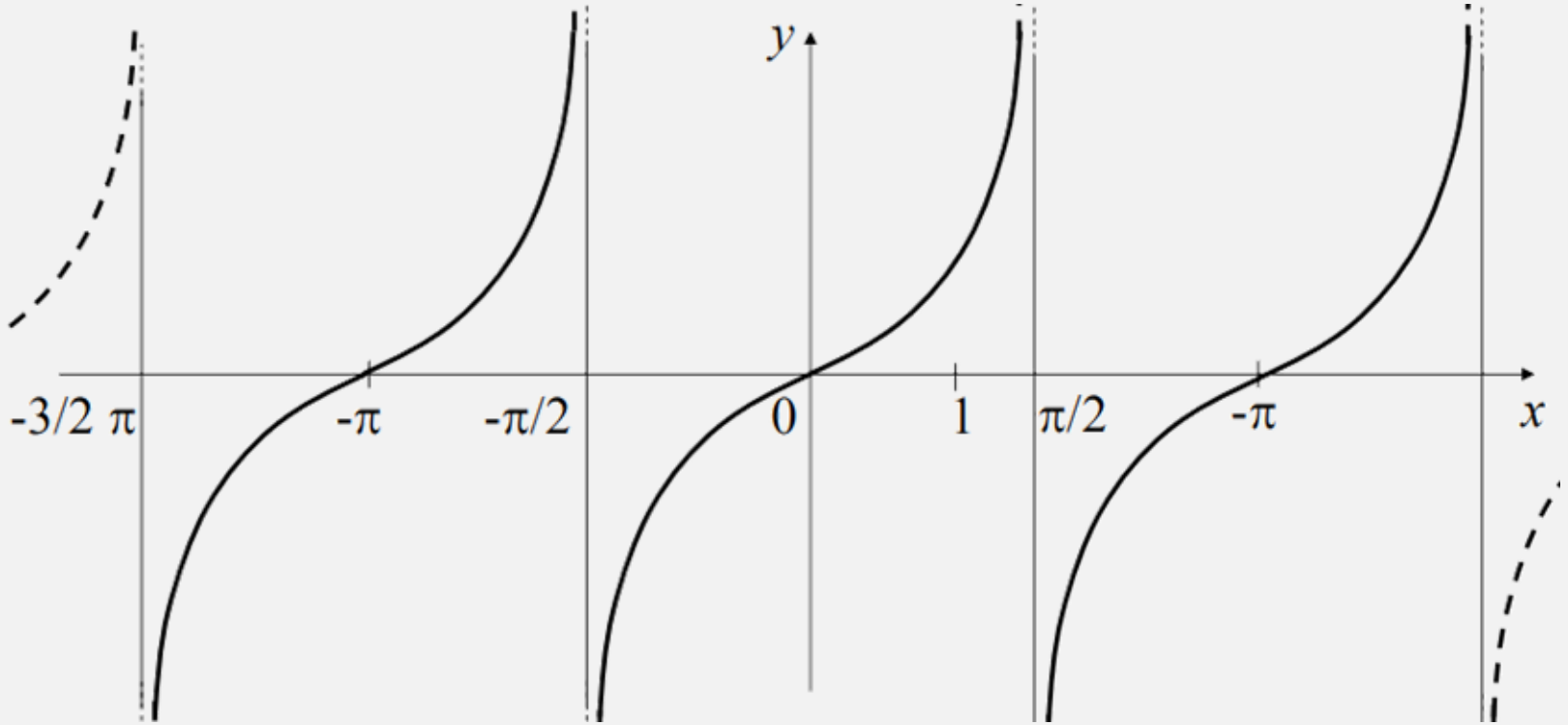
$$\cos x \neq 0 \quad \text{se } x \neq \ldots, -\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \ldots$$

$$\cos x \neq 0 \quad \text{se } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$$

$$f(x) = \tan x = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, con \cos x \neq 0$$

$$f : x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots\right\} = f : x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \to \tan x \in \mathbb{R}$$

Il **codominio** della funzione tangente è tutto $\mathbb{R}$



Per ogni valore fissato dell'arco x, la funzione tangente assume un corrispondente valore numerico

x	$\tan x$
0	0
π/4	1
π/2	/
π	0
π/6	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
π/3	$\sqrt{3}$
3/2 π	/
2 π	0

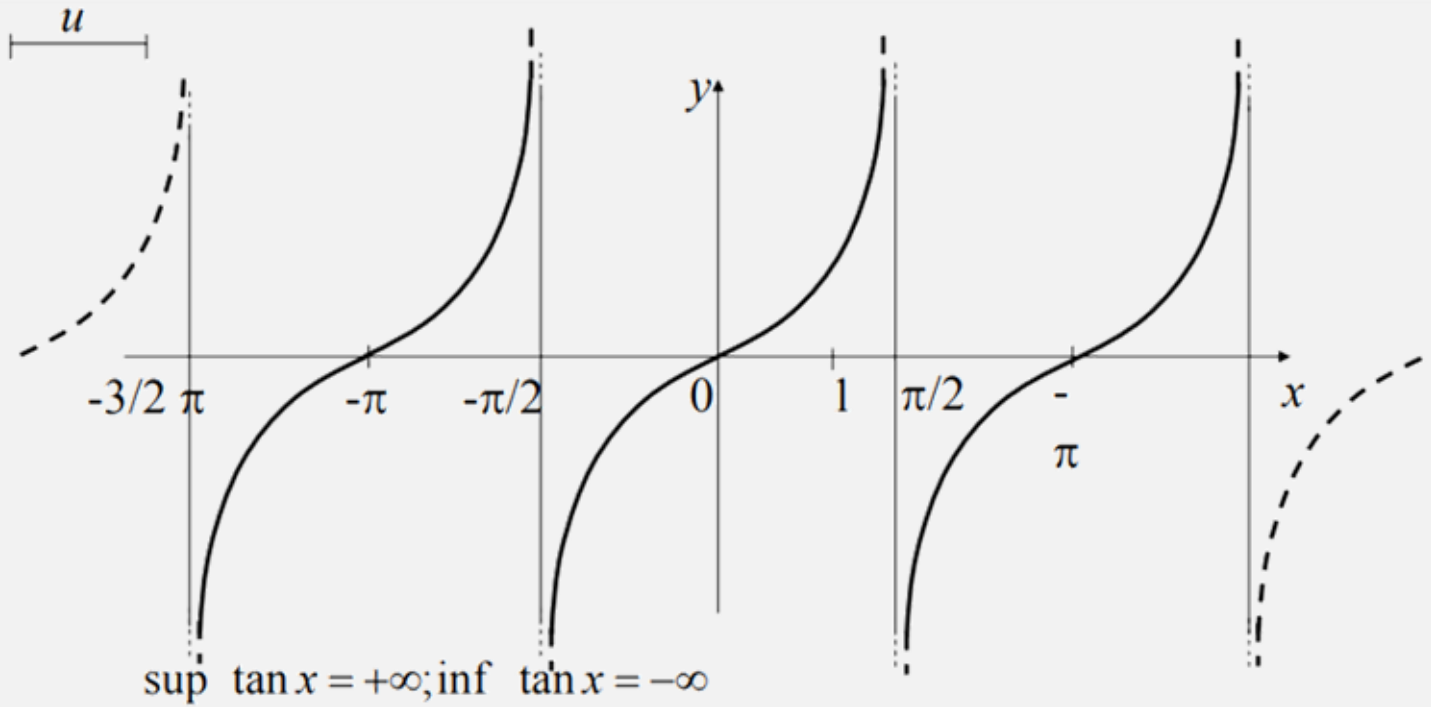
Periodicità
Ogni **mezzo** giro (pari ad metà arco che misura π) la funzione $\tan x$ assume gli stessi valori

→ La funzione seno è PERIODICA di periodo π:

$$\tan(x + \pi) = \tan x$$
$$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Punti importanti

- $(0,0) \rightarrow f(0) = 0$
- $(\pi, 0) \rightarrow f(\pi) = 0$
- $(2\pi, 0) \rightarrow f(2\pi) = 0$



$\sup \tan x = +\infty; \inf \tan x = -\infty$

f strettamente crescente in $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), \forall k \in Z$

f dispari: $-\tan x = \tan(-x)$

Le funzioni trigonometriche, essendo periodiche, non sono iniettive

Tuttavia, sono strettamente crescenti o decrescenti in opportuni intervalli: le restrizioni in questi intervalli sono iniettive, quindi sono invertibili.

Per ciascuna funzione trigonometrica, si sceglie una **regione fondamentale**, cioè un insieme su cui la restrizione della funzione risulti iniettiva.

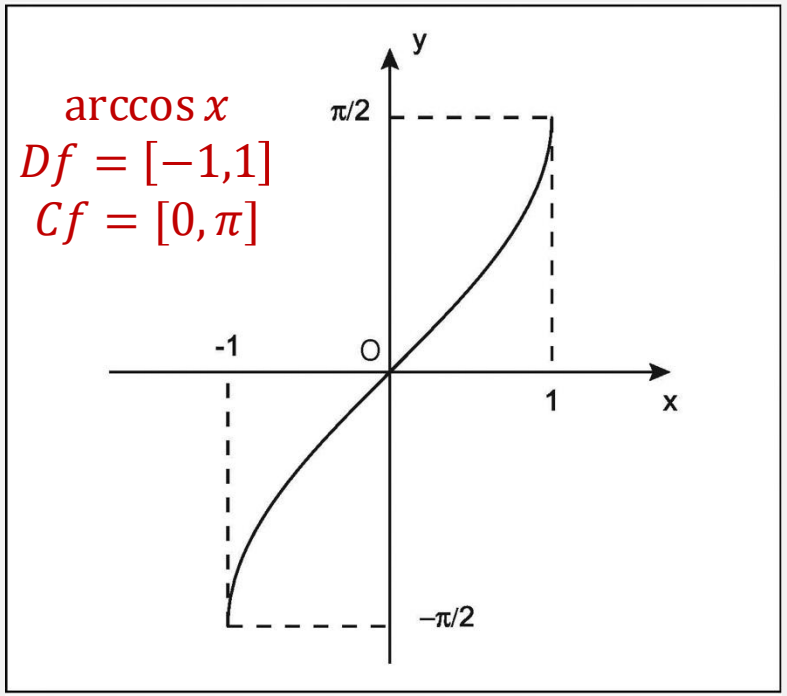
In ogni regione fondamentale, si può considerare la **funzione inversa** della funzione.

Funzione trigonometrica	*Regione fondamentale*	*Funzione inversa*
$\sin x$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$\arcsin x$
$\cos x$	$[0, \pi]$	$\arccos x$
$\tan x$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$\arctan x$

Valgono le seguenti identità (per tutte le funzioni trigonometriche):

$\arcsin(\sin x) = x, \quad \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

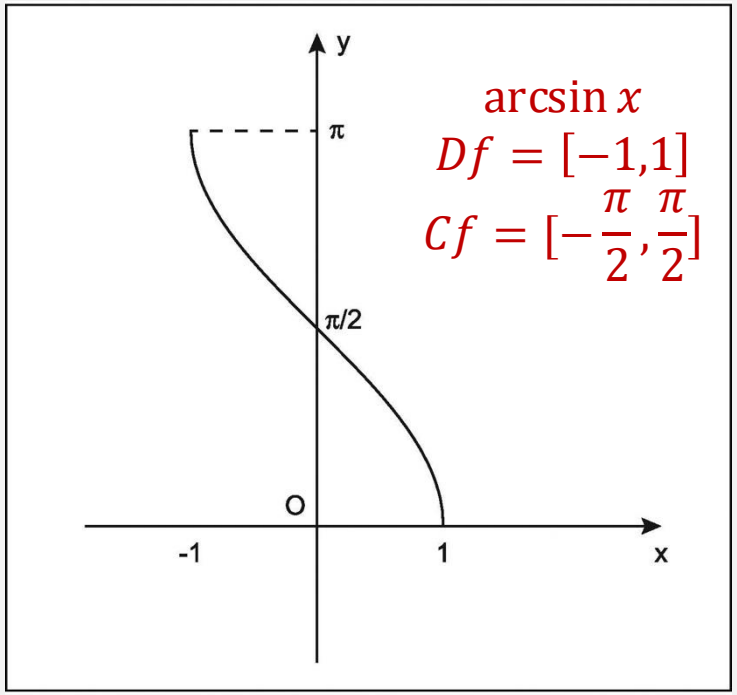
$\sin(\arcsin x) = x, \forall x \in [-1,1]$



$\arccos x$

$Df = [-1,1]$

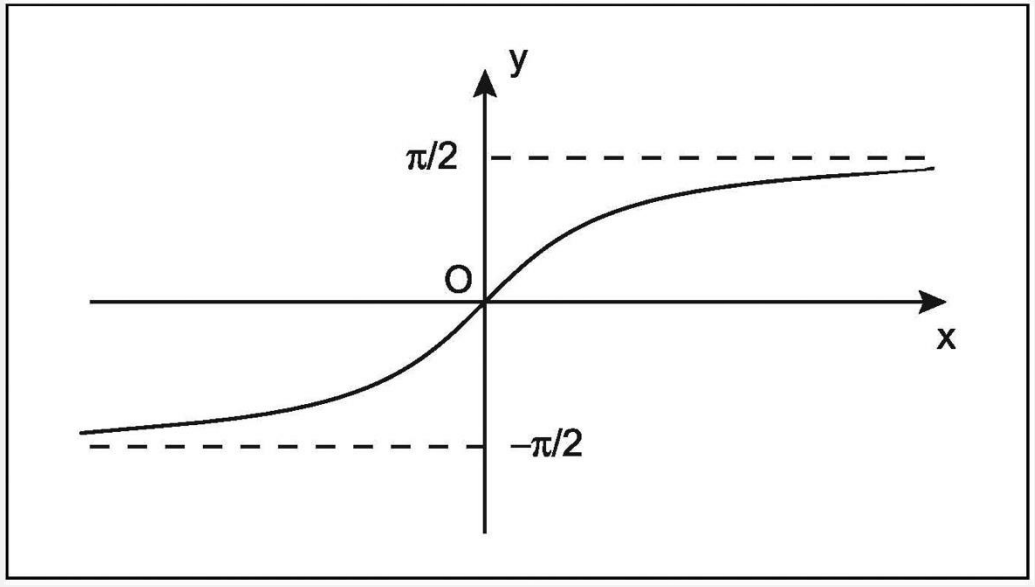
$Cf = [0, \pi]$



$\arcsin x$

$Df = [-1,1]$

$Cf = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



$\arctan x$

$Df = \mathbb{R}$

$Cf = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Esempio – Biosegnali Periodici

Molte grandezze biologiche si ripetono nel tempo: battito cardiaco, respirazione, ormoni, temperatura.

Un seno o un coseno cattura un ritmo attraverso il suo periodo e la sua ampiezza:

$T(t) = T_0 + A \cdot sin(2\pi t/P)$, periodo P

La temperatura corporea oscilla di circa 1 °C in un periodo di 24 ore (circadiano).

Periodo, ampiezza e fase sono il modo in cui quantifichiamo qualsiasi ritmo biologico.

