FISICA APPLICATA E BIOSTATISTICA

MODULO MAT4 — Limiti, Continuità, Asintoti

Descrivere il comportamento tendenziale dei sistemi biologici

Prof.ssa Valentina Notarstefano | Università degli Studi di Teramo

MODULO MAT4 — LIMITI

I Limiti descrivono verso dove tende un Processo Biologico

Un limite chiede: a quale valore si avvicina una grandezza quando il suo argomento cresce indefinitamente, o si avvicina a un punto?

Saturazione → all'aumentare del substrato, la velocità di un enzima si avvicina a un tetto V_{max} (un asintoto orizzontale).

Crescita limitata → una popolazione si avvicina alla sua capacità portante K quando t → ∞.

La continuità significa nessun salto improvviso; le discontinuità segnalano soglie o comportamenti a scatto.

Gli asintoti sono i 'livelli limite' che leggiamo su ogni curva di saturazione e di crescita.

1. Definizione “intuitiva” di limite

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Sia $f : D \to \mathbb{R}$ una funzione definita per ogni x in un intorno di x_0, tranne eventualmente in $x = x_0$

Diciamo che f tende al limite L per x che tende a x_0, se $f(x)$ assume valori arbitrariamente vicini a L quando x è sufficientemente vicino a x_0 (da entrambi i lati), escluso il punto $x = x_0$.

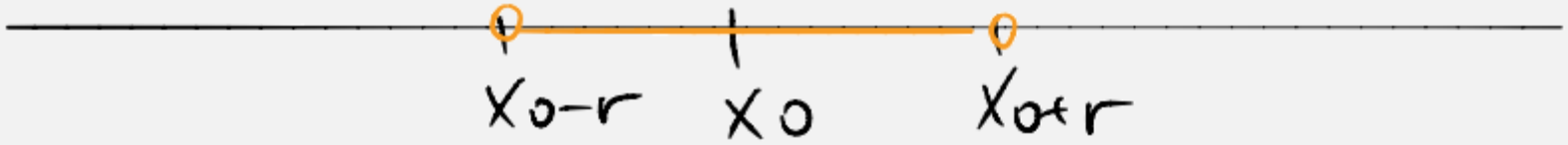
Richiamo: Definizione di Intorno

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e $r > 0$.

Consideriamo

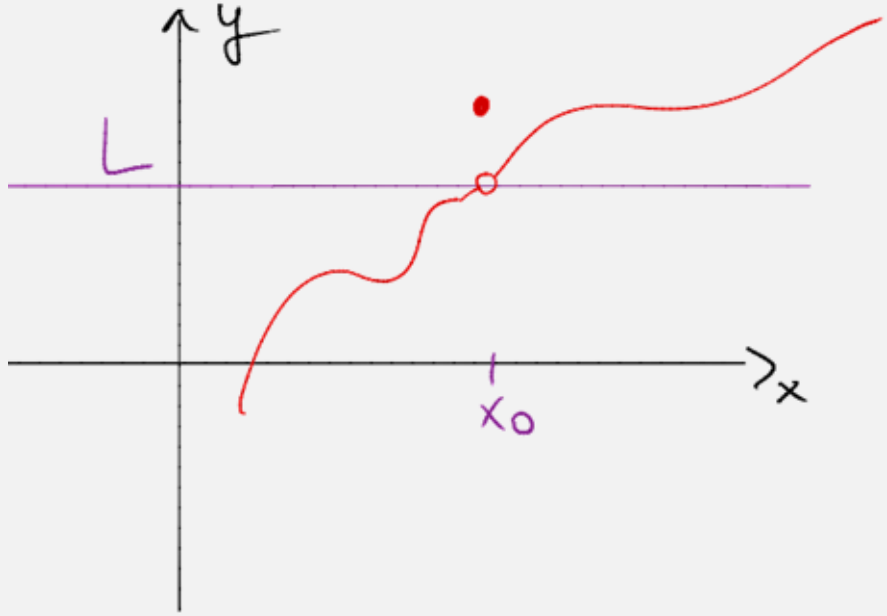
$$I_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\} = \{x \in \mathbb{R} : x_0 - r < x < x_0 + r\},$$

l'intorno aperto di centro x_0, cioè l'insieme dei numeri reali la cui distanza da x_0 è minore di $r > 0$.



2. Definizione mediante gli Intorni

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$



con

- $L \in \mathbb{R}$

Diciamo che la funzione f tende al limite L per $x \to x_0$ se:

Per ogni intorno $I(L, \varepsilon)$, con $\varepsilon > 0$, esiste un intorno $I(x_0, \delta)$, con $\delta > 0$, tale che per ogni $x \in (I(x_0, \delta) - \{x_0\}) \cap D$ si ha che $f(x) \in I(L, \varepsilon)$

$$\forall I(L, \varepsilon), \varepsilon > 0 \; \exists \, I(x_0, \delta), \delta > 0 : \forall x \in (I(x_0, \delta) - \{x_0\}) \cap D \Longrightarrow f(x) \in I(L, \varepsilon)$$

Casi di Limiti

Caso generale:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall I_L \; \exists \, I_{x0} : \; \forall x \in I_{x0} - \{x_0\} \Longrightarrow f(x) \in I_L$$

se e solo se per ogni intorno di L esiste un intorno di x_0 tale che, per ogni x appartenente all'intorno di x_0 (eventualmente escluso x_0), $f(x)$ appartiene all'intorno di L.

I casi possibili sono:

$$L = \begin{cases} \in \mathbb{R} \to I_L = (L - \varepsilon, L + \varepsilon) \\ +\infty \to I_L \quad = (n, +\infty) \\ -\infty \to I_L = (-\infty, -n) \end{cases}$$

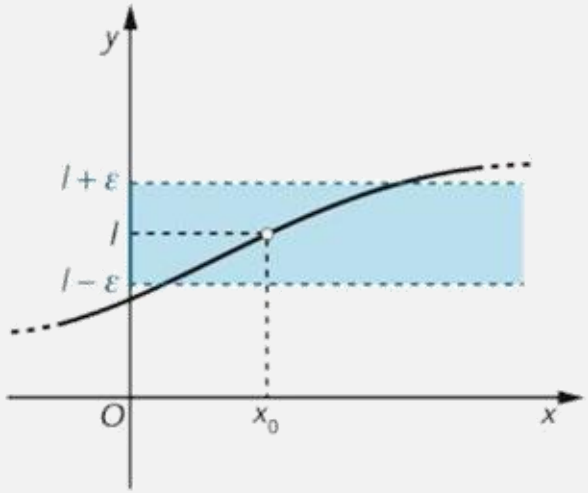
$$x_0 = \begin{cases} \in \mathbb{R} \to I_L = (L - \varepsilon, L + \varepsilon) \\ +\infty \to I_L \quad = (n, +\infty) \\ -\infty \to I_L = (-\infty, -n) \end{cases}$$

Limite finito in un punto finito: $L, x_0 \in \mathbb{R}$ $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

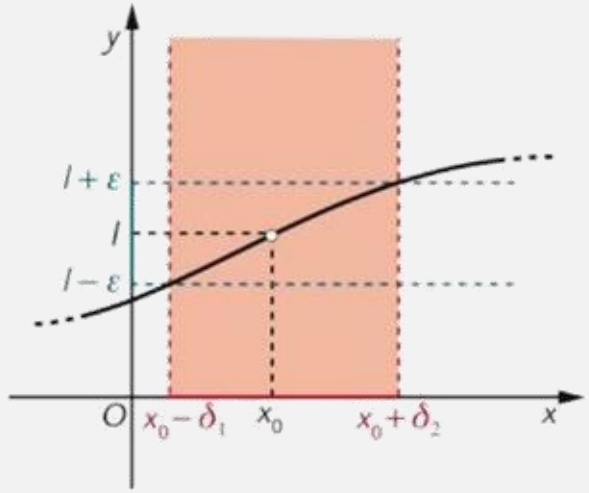
Sia $f(x)$ una funzione definita in un intervallo (a, b) escluso il punto x_0.

Diciamo che $f(x)$ tende al limite L per x che tende a x_0 se, per ogni numero positivo arbitrario ε, si può determinare un intorno di x_0 tale che per ogni x in tale intorno:

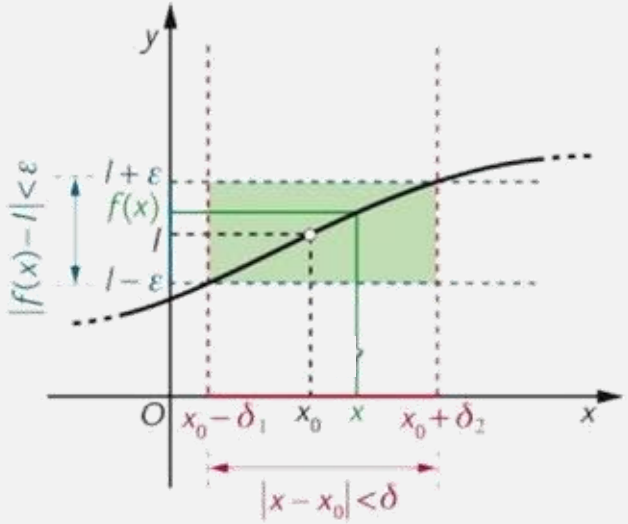
$$|f(x) - L| < \varepsilon \rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$



Per ogni $\varepsilon > 0$ (scegliendo ε, scegliamo un intorno arbitrario di l sull'asse y)…



… esiste $\delta > 0$ (che individua un opportuno intorno di x_0 sull'asse x)…



$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \, I_{x0} : \; \forall x \in I_{x0} - \{x_0\} \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

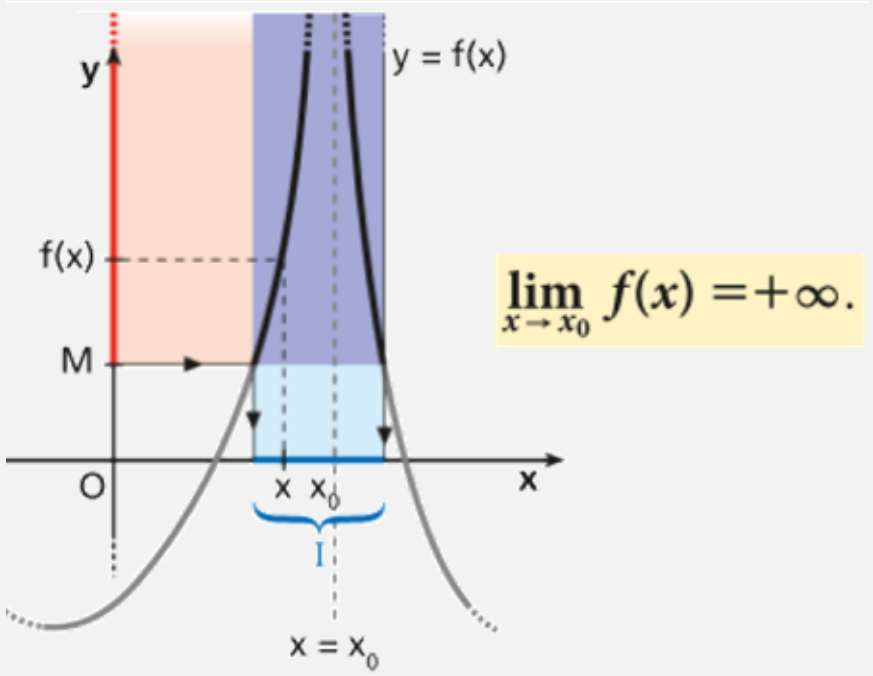
tale che per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ con $x \neq x_0$ si ha:
$f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$

Limite infinito in un punto finito:

$$L = \infty, x_0 \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

Sia $f(x)$ una funzione definita in un intervallo (a, b), escluso il punto x_0.
Diciamo che la funzione $f(x)$ tende a infinito quando x tende a x_0 se, per ogni numero positivo arbitrario M, è sempre possibile determinare un intorno (privato del punto) di x_0 tale che, per ogni x in tale intorno vale la disuguaglianza:

$$|f(x)| > M$$



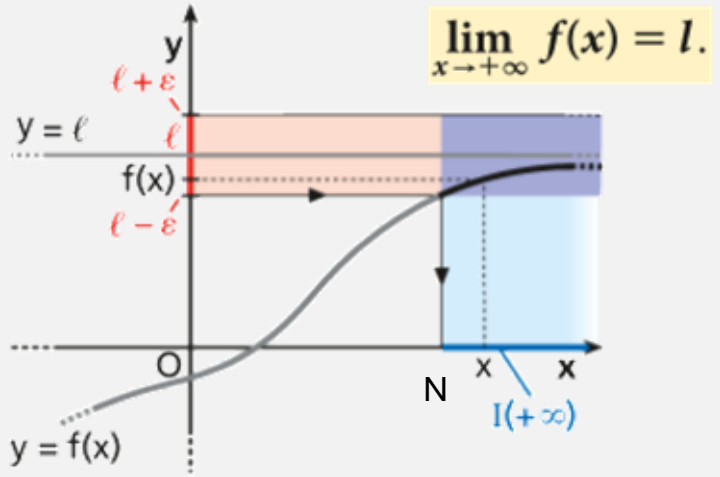
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall n > 0 \; \exists \, I_{x0} : \; \forall x \in I_{x0} - \{x_0\} \Longrightarrow |f(x) - L| > M$$

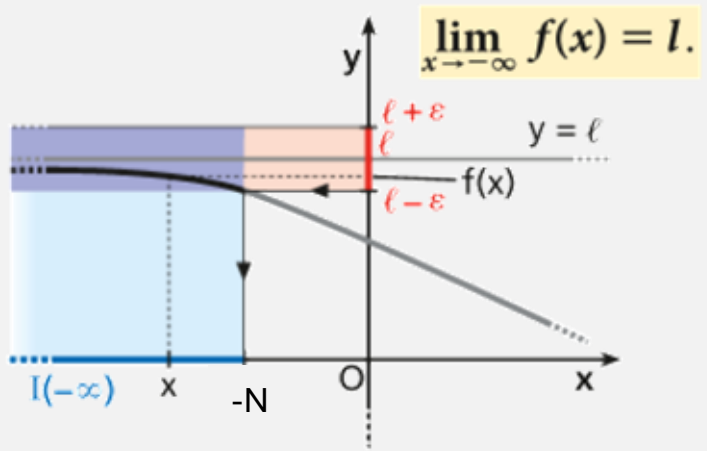
Limite finito all'infinito:

$$L \in \mathbb{R}, x_0 = \infty \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

Sia $f(x)$ una funzione definita in un intervallo (a, b).
Diciamo che $f(x)$ tende al limite L per x che tende a infinito se, per ogni numero positivo arbitrario ε, è sempre possibile determinare un numero $N > 0$ tale che, per ogni x con $|x| > N$ vale la condizione:

$$|f(x) - L| < \varepsilon \rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$





$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \, N > 0 : \; \forall x : |x| > N \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Limite destro e limite sinistro (retta reale estesa)

- Sia $x_0 = +\infty$: chiamiamo intorno aperto di x_0 una semiretta aperta $(a, +\infty)$ e intorno chiuso $[a, +\infty)$

- Sia $x_0 = -\infty$: chiamiamo intorno aperto di x_0 una semiretta aperta $(-\infty, a)$ e intorno chiuso $(-\infty, a]$

- Sia $a \subset \mathbb{R}$, $+\infty$ è un punto di accumulazione di A se

$$A \cap (a, +\infty) \neq \emptyset \quad \forall a > 0$$

- Sia $a \subset \mathbb{R}$, $\pm\infty$ è un punto di accumulazione di A se

$$A \cap (-\infty, a) \neq \emptyset \quad \forall a < 0$$

Definizione unificata di Limite

Sia $x_0, L \in \overline{\mathbb{R}}$.
Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$.
Sia x_0 punto di accumulazione per D_f.
$f(x)$ tende a L per x che tende a x_0 → $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, se, per ogni intorno J di L esiste un intorno I di x_0 tale che:

$$\forall x \in \left(I \cap D_f\right) - \{x_0\} \text{ si ha: } \quad f(x) \in J$$

Limite destro

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e sia $f : D_f \to \mathbb{R}$, si supponga che x_0 sia un punto di accumulazione dell'insieme $D_f \cap (x_0, +\infty)$.

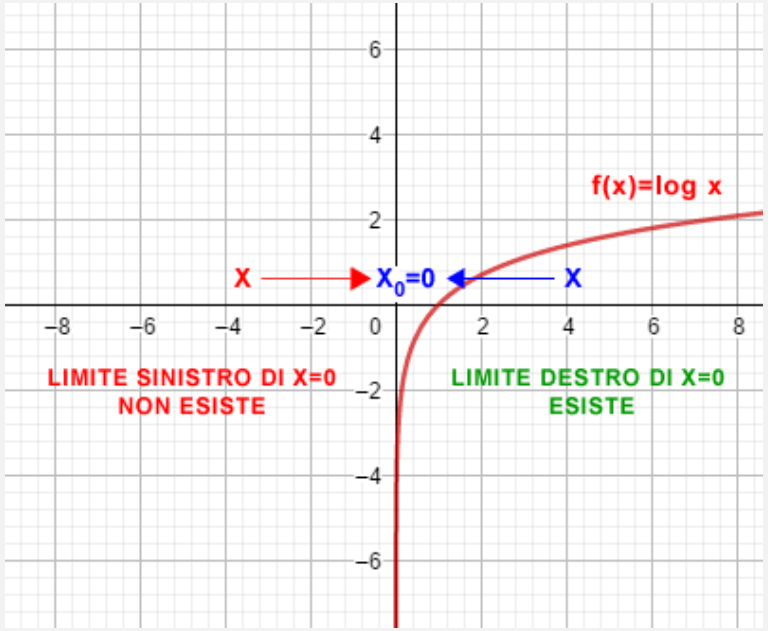
Se il limite della restrizione di f a $D_f \cap (x_0, +\infty)$ esiste per $x \to x_0$, allora questo valore si chiama limite destro di f in x_0, indicato con:

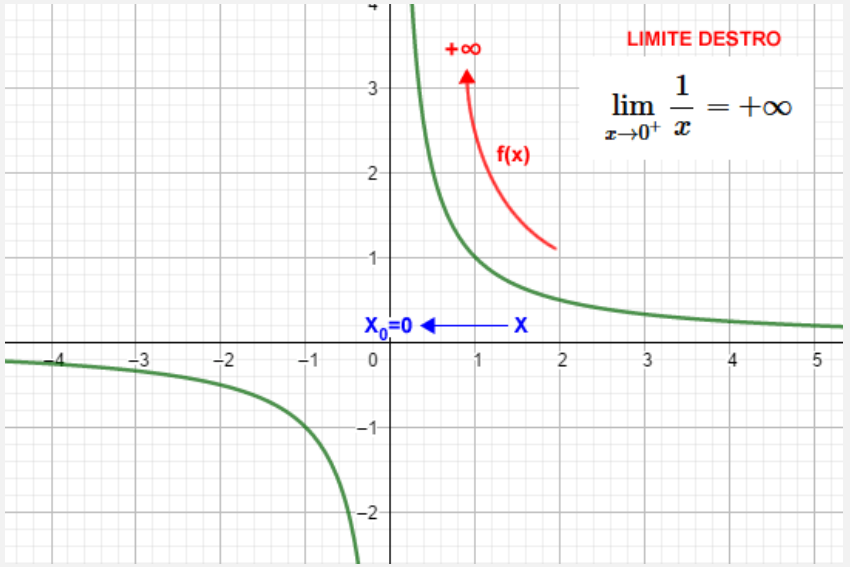
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Formulazione con i quantificatori (per $L \in \mathbb{R}$):

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap D_f \; \to \quad |f(x) - L| \leq \varepsilon$$

$$x_0 < x < x_0 + \delta$$



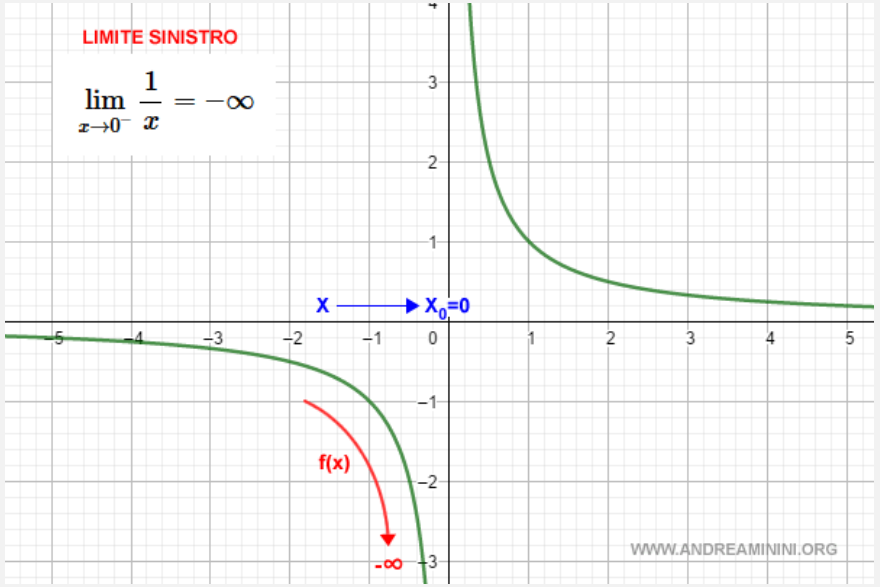


Limite sinistro

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e sia $f : D_f \to \mathbb{R}$, si supponga che x_0 sia un punto di accumulazione dell'insieme $D_f \cap (-\infty, x_0)$.

Se il limite della restrizione di f a $D_f \cap (-\infty, x_0)$ esiste per $x \to x_0$, allora questo valore si chiama limite sinistro di f in x_0, indicato con:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x)$$



Formulazione con i quantificatori (per $L \in \mathbb{R}$):

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap D_f \; \rightarrow \quad |f(x) - L| \leq \varepsilon$$

$$x_0 - \delta < x < x_0$$

Limiti di Funzioni Polinomiali

Dai teoremi sui limiti segue che il limite per $x \to x_0 \in \mathbb{R}$ esiste per ogni funzione polinomiale:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

Usando la definizione di limite, si verifica facilmente che:

$$\lim_{x \to x_0} a_0 = a_0, \qquad \lim_{x \to x_0} a_1 x = a_1 x_0, \qquad \lim_{x \to x_0} a_n x^n = a_n x_0$$

Quindi, in generale:

$$\lim_{x \to x_0} p(x) = p(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n$$

Limiti di quozienti di polinomi (funzioni razionali)

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \begin{array}{c} 1.\, n > m \to \lim = \pm\infty \\ 2.\, n < m \to \lim = 0 \\ 3.\, n = m \to \lim = a_n/b_m \end{array}$$

Esempi.

1. $\lim_{x\to-\infty}\frac{1-x^2+3x^3}{2x^2-1+5x^3} = \frac{3}{5} \to n = m$

2. $\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^3+2}{12x^4-x+7} = 0^- \to n < m$

3. $\lim_{x\to1^{\pm}}\frac{x^3-7x+1}{x^2-1} = \frac{-3}{0} = \pm\infty \to n > m$

Forme Indeterminate

Le forme indeterminate nascono da operazioni con infinitesimi e infiniti per cui il limite non è determinabile a priori:

$$\infty - \infty \quad 0 \cdot \infty \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \frac{0}{0} \quad 0^0 \quad 1^\infty \quad \infty^0$$

Non sono forme indeterminate:

$$k + \infty = +\infty$$
$$k - \infty = -\infty$$
$$\infty + \infty = \infty$$
$$k \cdot \infty = \infty$$
$$\infty \cdot \infty = \infty$$
$$\frac{k}{\infty} = 0$$
$$\frac{0}{\infty} = 0$$
$$\frac{\infty}{k} = \infty$$
$$\frac{k}{0} = \infty$$

Esempi

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{polinomio}{polinomio} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

il numeratore ha grado superiore

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^5 - 3x + 2}{2x^2 + 4} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x^2 + 2x - 5}{x - 4} = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4x^5 - 3x + 2}{2x^2 + 4} = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^4 + 5x^3}{x^3 + 2x^2 - 1} = +\infty$$

i gradi sono uguali

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{7x^3 - 3x + 2}{2x^3 + 4} = \frac{7}{2} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 - x + 2}{4x - 2x^2 - 1} = -\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{7x^3 - 3x + 2}{2x^3 + 4} = \frac{7}{2} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2 - x + 2}{4x - 2x^2 - 1} = -\frac{3}{2}$$

il denominatore ha grado superiore

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^3 - 3x + 1}{2x^4 + 4} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{2x^3 + 4} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^3 - 3x + 1}{2x^4 + 4} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{2x + 1}{-2x^2 + 4x + 3} = 0$$

Limiti di funzioni continue

Sia una funzione reale f definita in un intervallo I continua in $x_0 \in I$

f è continua in x_0 se:

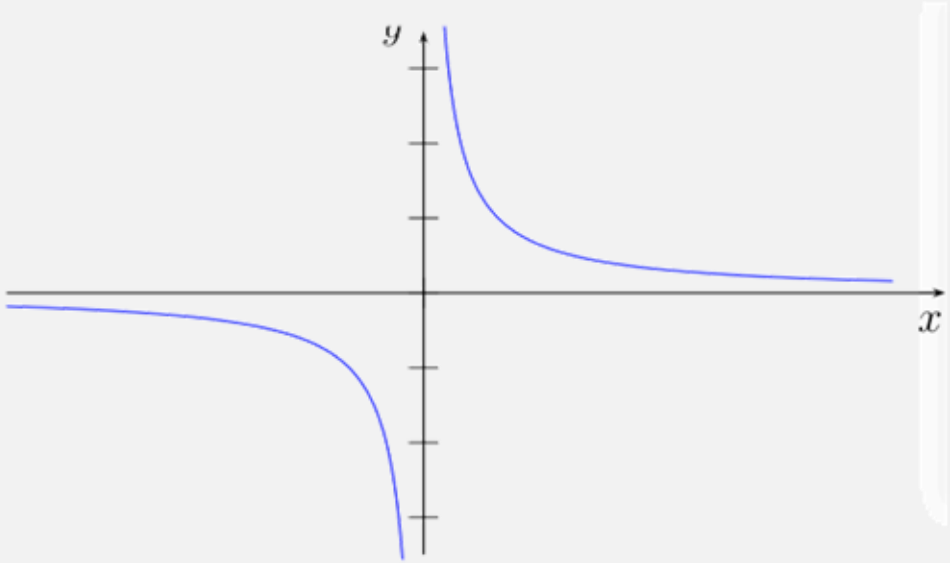
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Quindi, f è continua in un punto x_0 interno all'intervallo di definizione se:

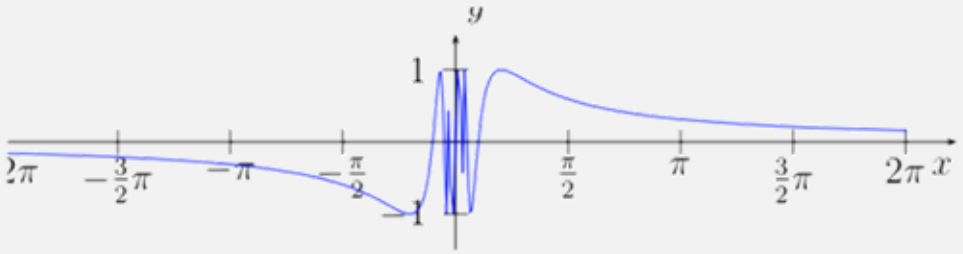
- $\exists f(x_0)$
- $\exists$ limite finito di $f(x)$ per $x \to x_0$
- il limite coincide con il valore $f(x_0)$ di f in x_0

Limiti di funzioni continue

$f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ è continua in $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

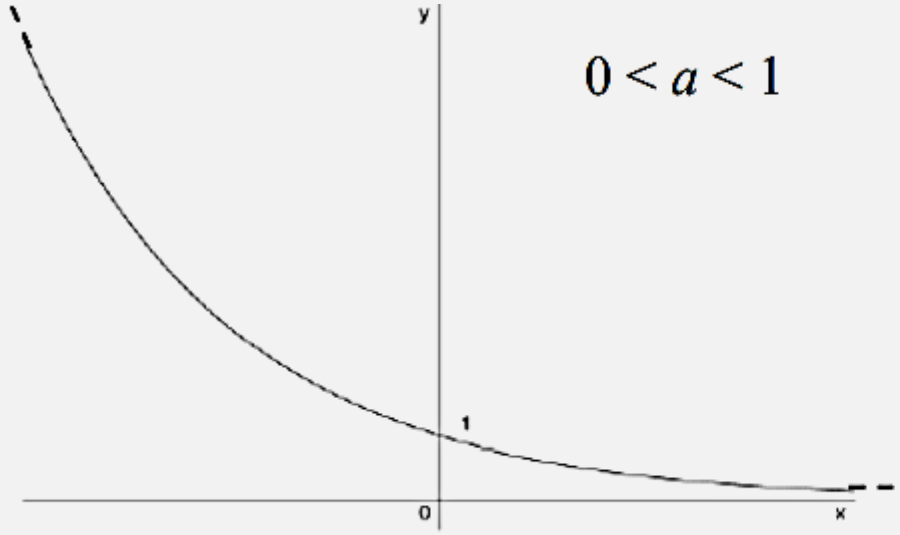


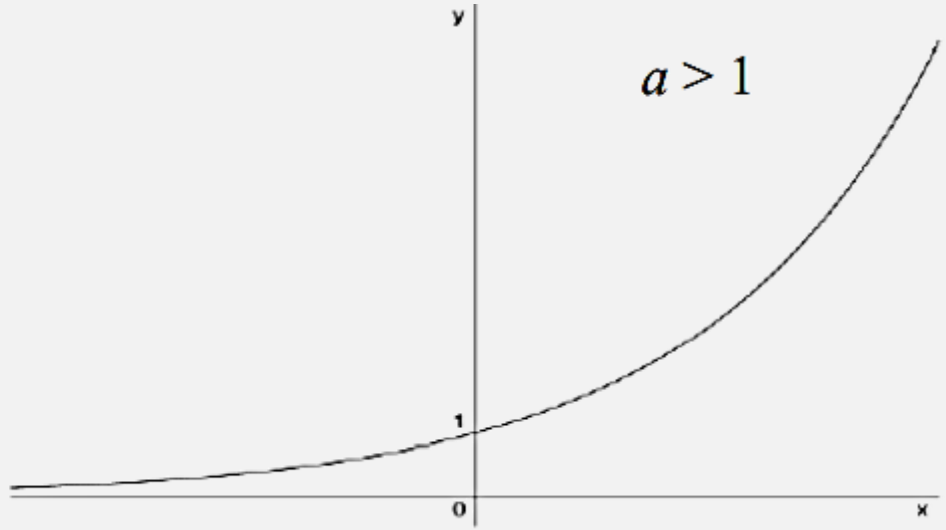
$f : x \mapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ è continua in $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



Limiti di funzioni elementari

Funzione esponenziale





$$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$$

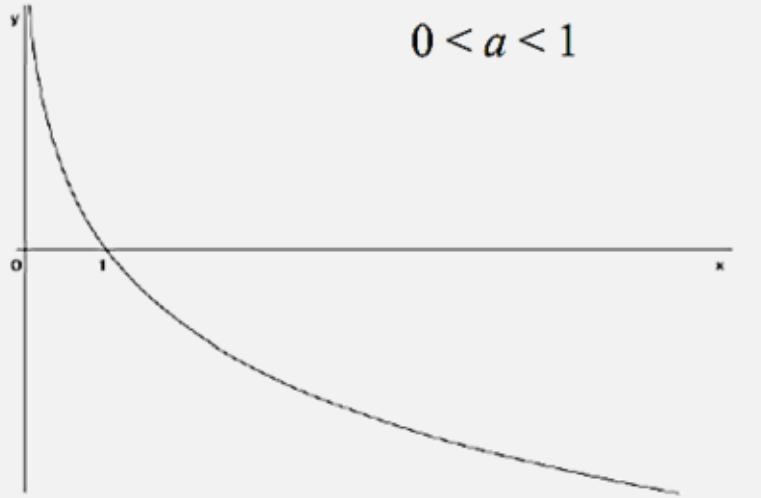
$$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$$

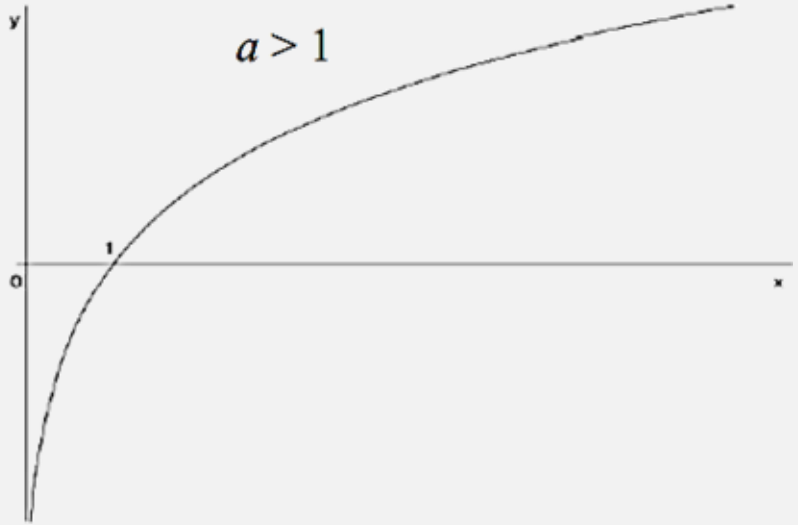
$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$$

Limiti di funzioni elementari

Funzione logaritmica





$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$$

Asintoti Orizzontali

Data una funzione reale f definita in un intervallo illimitato I, se il limite all'infinito è finito, cioè:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = l$$

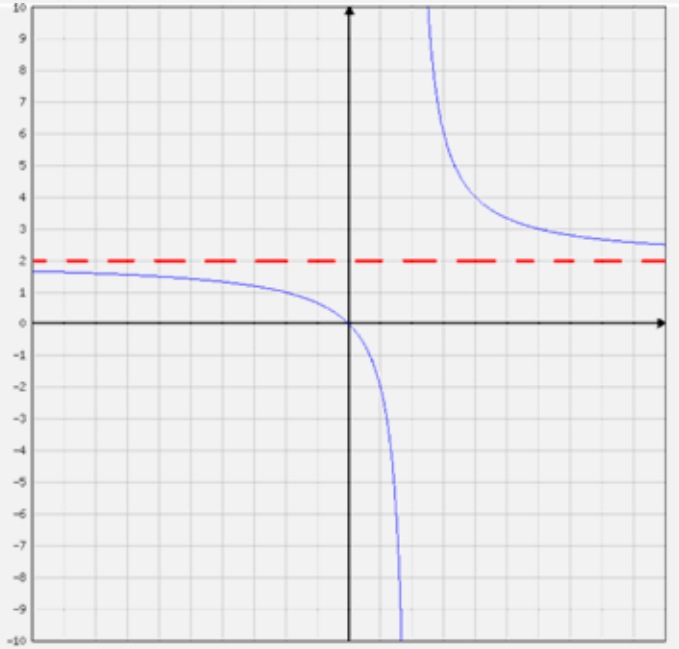
allora la retta $y = l$ si chiama asintoto orizzontale del grafico di $f(x)$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$$

$$y = 2$$

asintoto orizzontale



Asintoti Orizzontali

Se

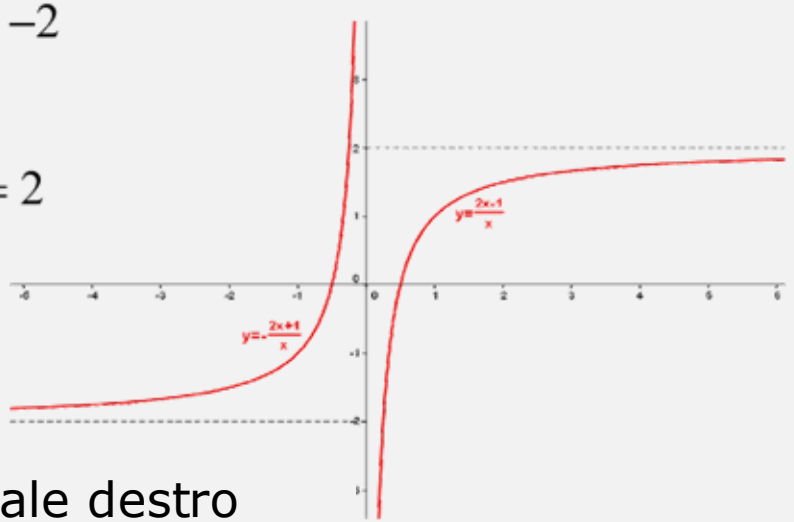
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l_1 \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = l_2$$

allora il grafico di $f(x)$ ammette due asintoti orizzontali: $y = l_1$ per $x \to +\infty$ e $y = l_2$ per $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -2$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$$

$$y = 2$$



asintoto orizzontale destro

$$y = -2$$

asintoto orizzontale sinistro

Esempio - Saturazione enzimatica e V_{max}

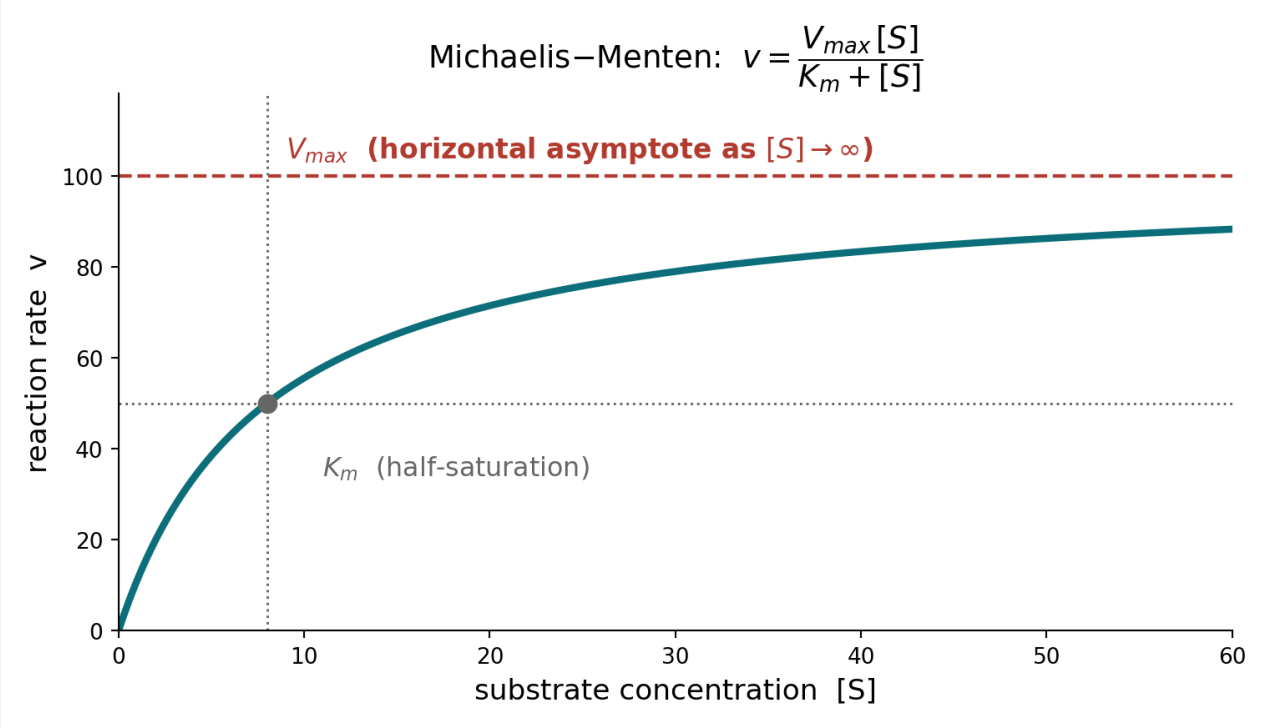
All'aumentare della concentrazione di substrato [S], la velocità di reazione non cresce indefinitamente.

Si avvicina a una velocità massima V_{max} — un asintoto orizzontale della curva:

$$\lim_{[S]\to+\infty} v = V_{max}$$

$$v = V_{max} \cdot [S]/(K_m + [S])$$

K_m, il livello di substrato che dà metà di V_{max}, è l'indicatore di affinità dell'enzima.



Asintoti Obliqui

Data una funzione reale f definita in un intervallo illimitato I, se

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

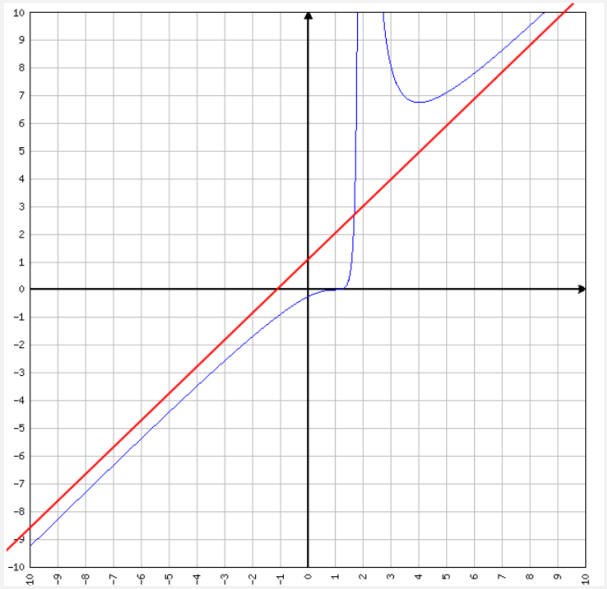
allora la funzione NON ammette asintoto orizzontale.
Si può verificare se il grafico ammette un asintoto obliquo di equazione $y = mx + q$.

Il grafico di $f(x)$ ammette un asintoto obliquo se:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0 \; finito$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx] = q \; finito$$



Asintoti Verticali

Data una funzione reale f definita in un intervallo I privato al più del punto x_0, se il limite nel punto finito x_0 è infinito, cioè,

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$$

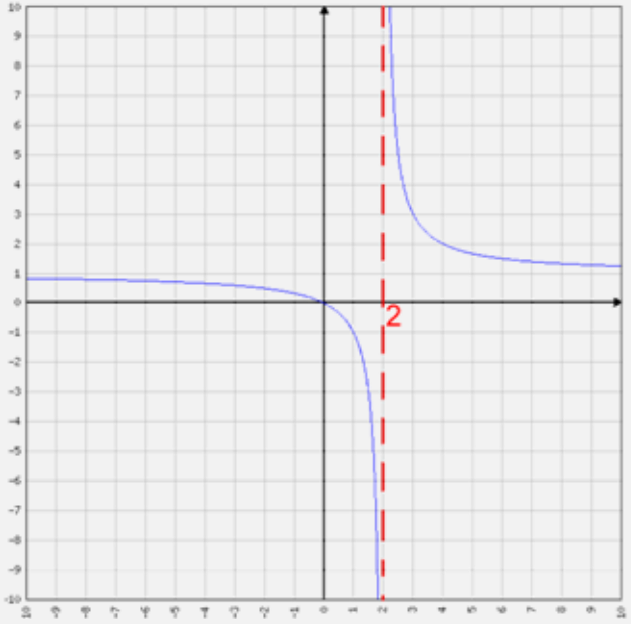
allora la retta $x = x_0$ si chiama asintoto verticale del grafico di $f(x)$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$$

$$x = 2$$

asintoto verticale

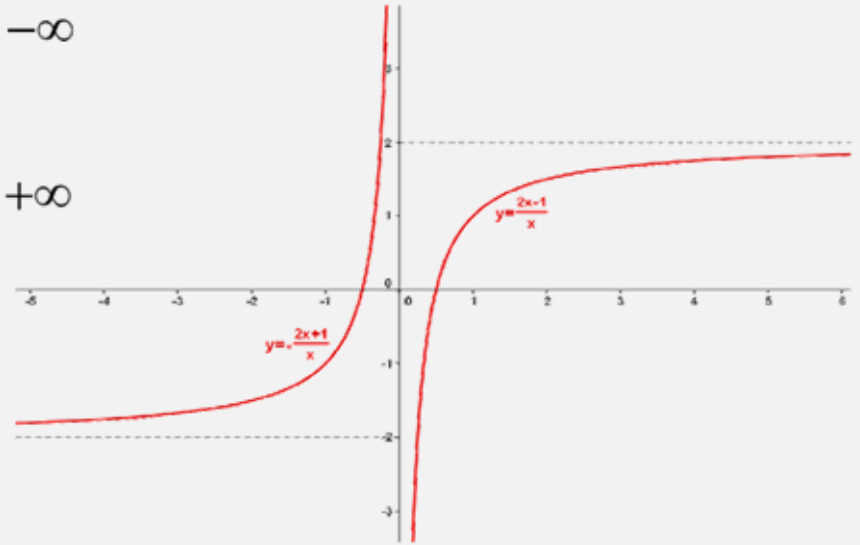


$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$$

$$x = 0$$

asintoto verticale



Esempio.

Determinare gli eventuali asintoti della seguente funzione: $f(x) = \frac{x^2-4}{x+1}$

Il primo passo per stabilire la presenza di asintoti è determinare il dominio della funzione:

$$x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$$

Quindi il dominio è:

$$(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$$

Poiché la funzione non è definita in un punto, ha senso cercare asintoti verticali e orizzontali:

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^2-4}{x+1} = \frac{-3}{-1^- + 1} = \frac{-3}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x^2-4}{x+1} = \frac{-3}{-1^+ + 1} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$

$\Rightarrow x = -1$ as. verticale

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-4}{x+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-4}{x+1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to -\infty} x = -\infty$$

$\nexists$ as. oriz. sinistro

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-4}{x+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-4}{x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty}$$

$\nexists$ as. oriz. destro

Discontinuità

- se f è definita in un intervallo $[a, b]$ escluso al più il punto x_0

o

- se f non è continua in un punto x_0,

allora x_0 si dice punto singolare o punto di discontinuità.

Discontinuità di prima specie (a salto)

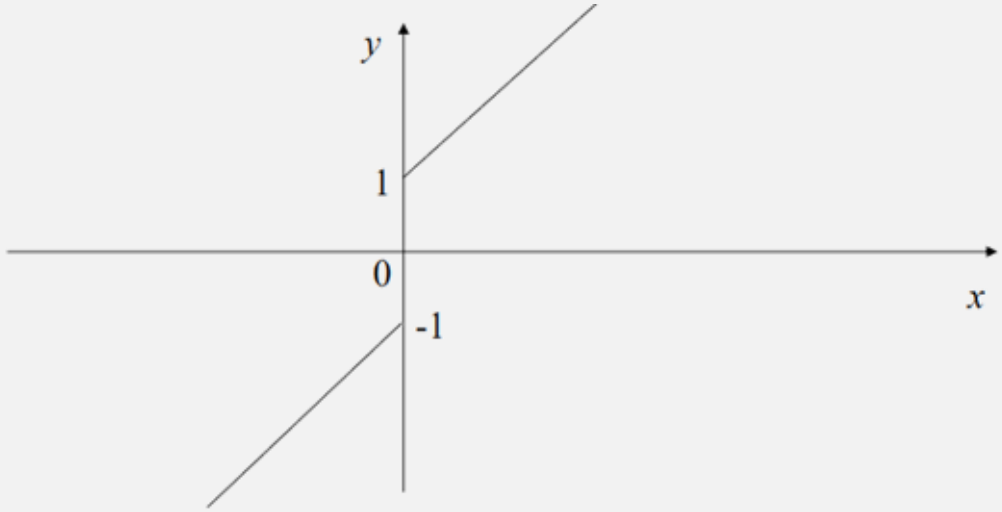
Una funzione f ha una discontinuità di prima specie in x_0 se il limite destro e il limite sinistro esistono, sono finiti ma diversi:

$$l_1 = \lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_2$$

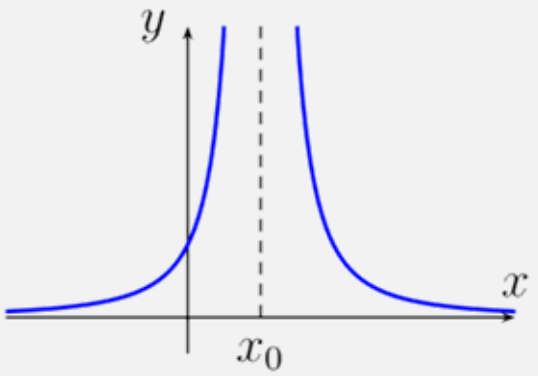
Esempio. La seguente funzione ha una discontinuità di prima specie in $x = 0$:

$$f(x) = x + \frac{|x|}{x} = \begin{cases} x + 1, se\ x > 0 \\ x - 1, se\ x < 0 \end{cases}$$

$$1 = \lim_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$$



Discontinuità di seconda specie

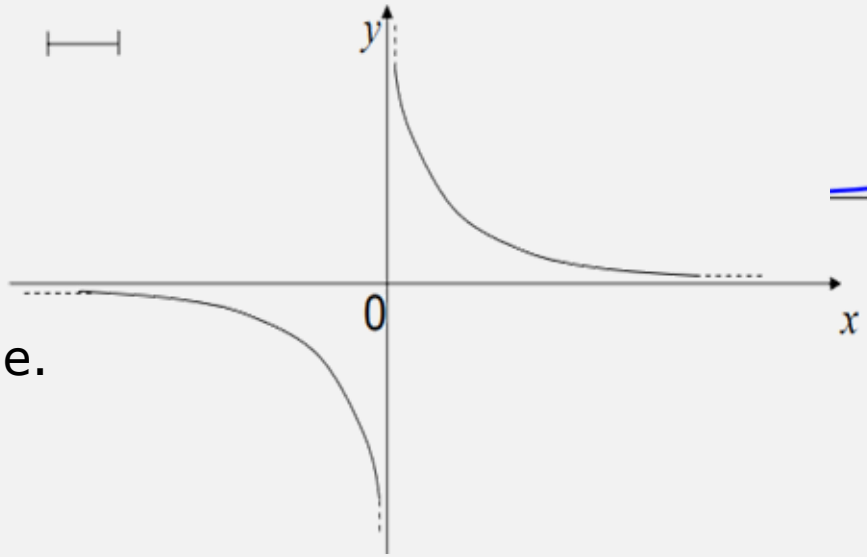


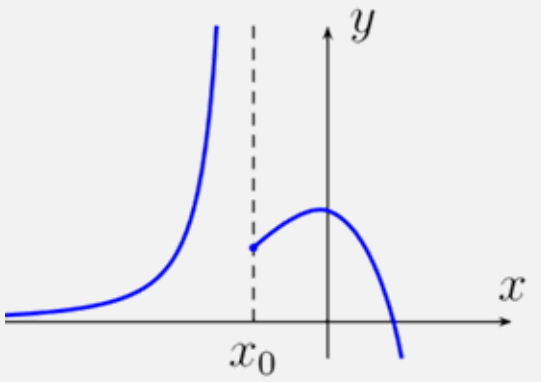
Una funzione f ha una discontinuità di seconda specie in x_0 se almeno uno dei limiti laterali è infinito o non esiste:

Esempio. La funzione ha una discontinuità di seconda specie in $x = 0$:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$+\infty = \lim_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$$





La presenza di asintoti verticali è tipica delle discontinuità di seconda specie.

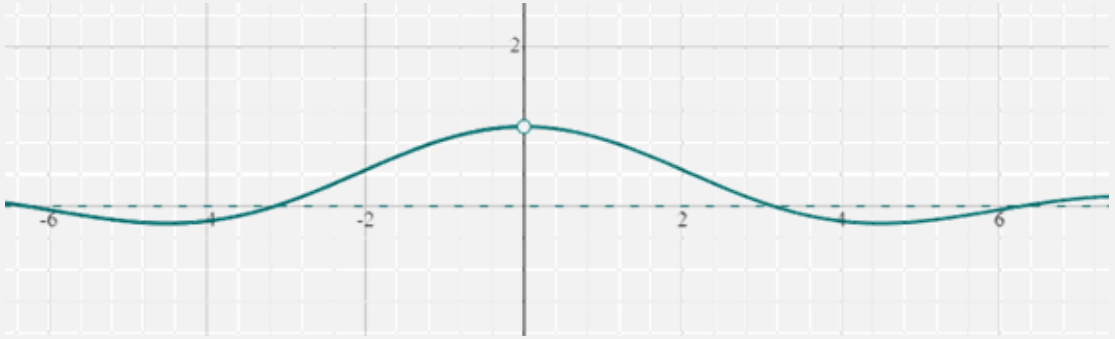
Discontinuità di terza specie (eliminabili)

Una funzione f ha una discontinuità eliminabile in x_0 se il limite di f in x_0 esiste ed è finito, ma:

- f non è definita in x_0
- $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

Esempio. La funzione ha una discontinuità eliminabile in $x = 0$:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$



Infatti:

- f non è definita in $x = 0 \Rightarrow \nexists f(0)$
- ma esiste $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

MODULO MAT4 — LIMITI

Limiti Notevoli

Limit	Indeterminate form
$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$	$\frac{0}{0}$
$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$	$\frac{0}{0}$
$\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$	1^∞
$\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln x=0$	$0\cdot\infty$
$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$	$\frac{0}{0}$
$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$	$\frac{0}{0}$
$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$	$\frac{0}{0}$
$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=1$	$\frac{0}{0}$

Limit	Indeterminate form
$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$	$\frac{0}{0}$
$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$	$\frac{0}{0}$
$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$	1^∞
$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$	$\frac{0}{0}$
$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$	$\frac{0}{0}$
$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^k-1}{x}=k$	$\frac{0}{0}$

Esempio – Crescita verso una capacità portante

Una popolazione (cellule, batteri, un tumore) non può crescere esponenzialmente per sempre.

Le risorse limitate fanno sì che N(t) si stabilizzi alla capacità portante K:

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = K$$

$$N(t) = K/\left(1 + c \cdot e^{(-rt)}\right)$$

La capacità portante K è l'asintoto orizzontale della curva di crescita.

