CORSO DI FISICA APPLICATA • FIS1

Cinematica I — vettori: posizione, velocità, accelerazione

Vettori - Vettori posizione, spostamento, velocità e accelerazione - Relazioni grafiche: posizione–velocità e velocità–accelerazione

Prof.ssa Valentina Notarstefano | Università degli Studi di Teramo

MODULO FIS2 — CINEMATICA I

La direzione conta: i vettori nel mondo vivente

Molte grandezze biologiche hanno una direzione, non solo un'intensità: il moto di una cellula, il flusso sanguigno, una molecola che diffonde, la trazione in una centrifuga.

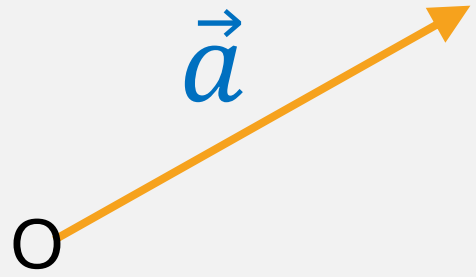
I vettori si sommano punta-coda: un microrganismo che nuota attraverso una corrente segue la somma della propria velocità e di quella della corrente.

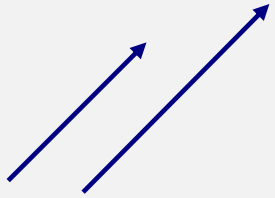
La velocità è il tasso di variazione della posizione; l'accelerazione è il tasso di variazione della velocità — entrambe sono vettori.

Lo spostamento netto (inizio → fine) è di solito molto più breve del percorso effettivamente compiuto.

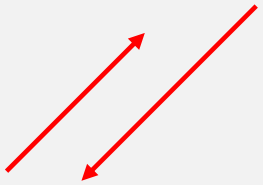
Ruotare in una centrifuga significa un'accelerazione costante verso l'asse — il principio su cui si basa la separazione.

I Vettori





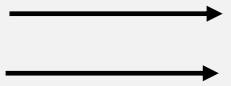
CONCORDI (paralleli) stessa direzione e stesso verso



DISCORDI (antiparalleli) stessa direzione ma verso opposto

Vettore $\vec{a}$ o $\boldsymbol{a}$

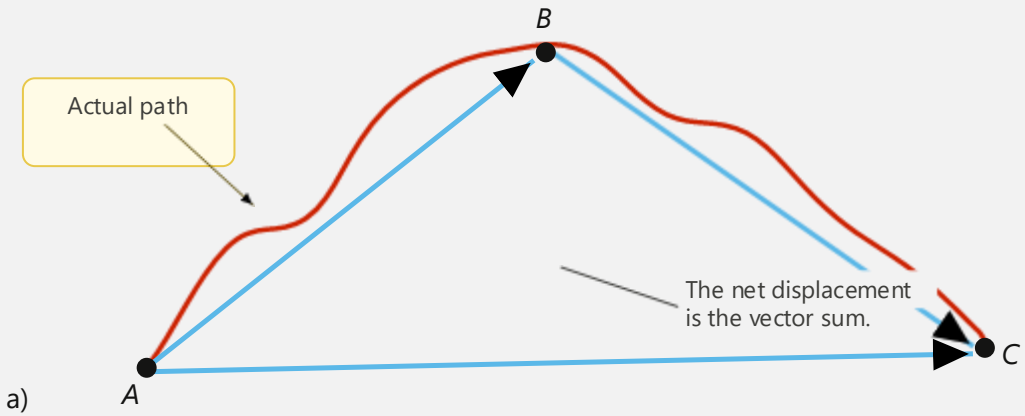
Il modulo del vettore è $|\overrightarrow{a}| = a$ e, graficamente, corrisponde alla lunghezza della freccia. L'origine del vettore è il punto O.



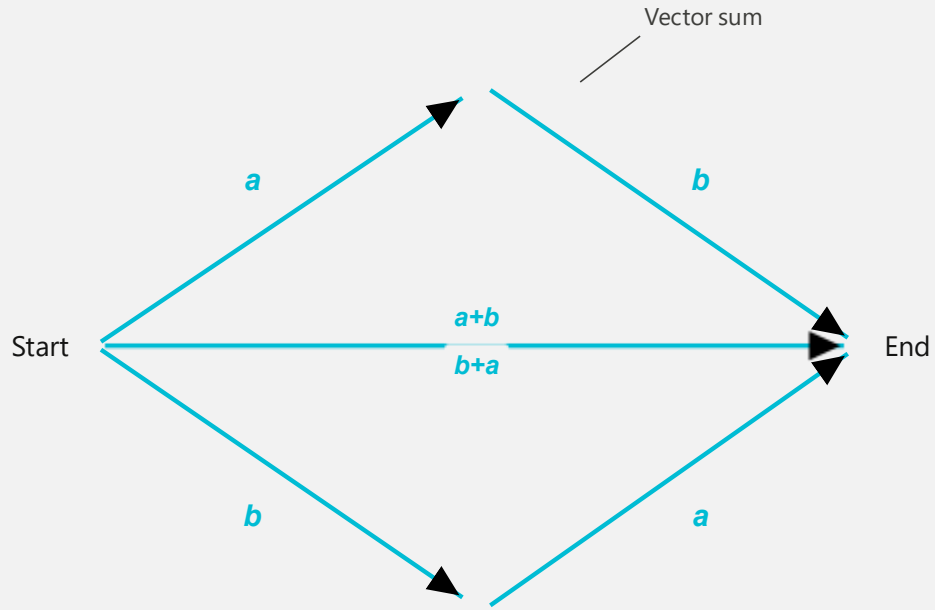
EQUIPOLLENTI
Uguali in modulo, verso e direzione

Operazioni vettoriali

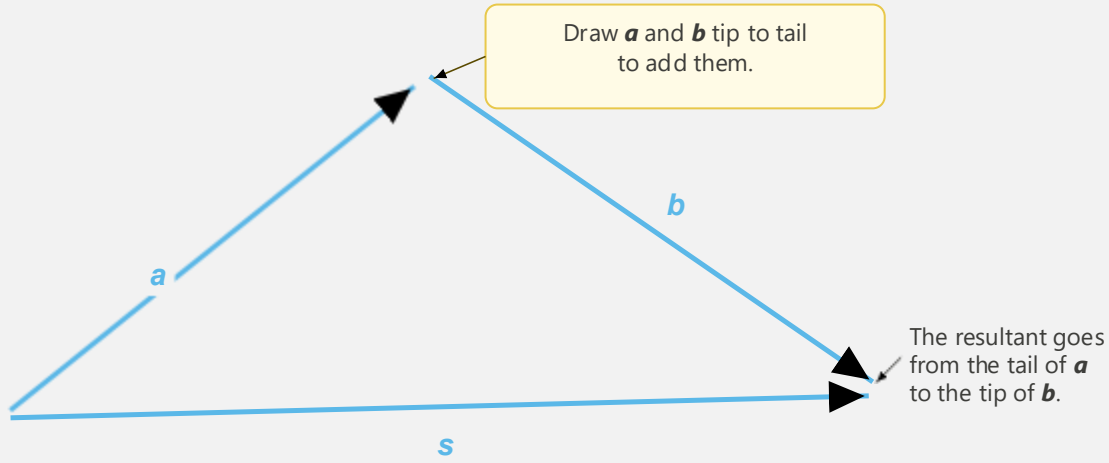
Somma di Vettori



a)



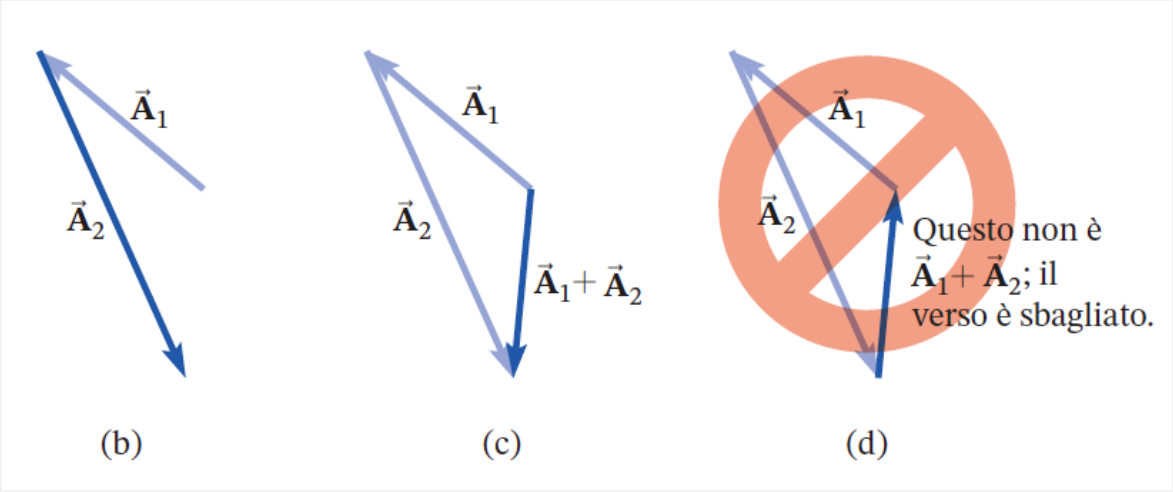
The resultant vector from the addition does not depend on the order of the vectors being added.

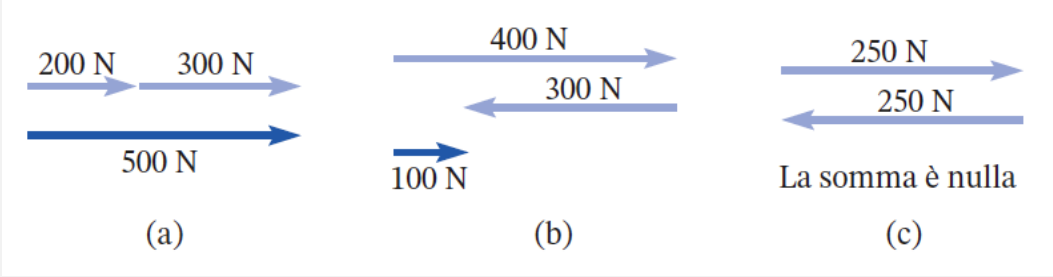


b)

Operazioni vettoriali

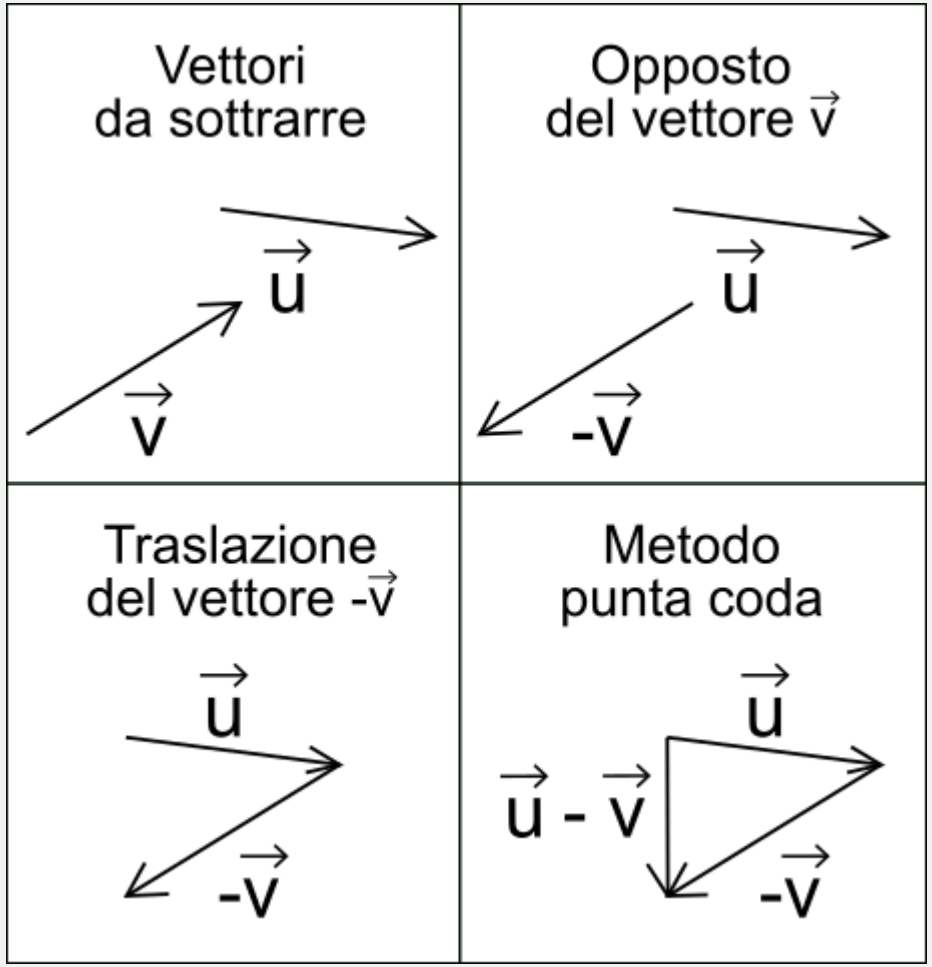
Somma di Vettori

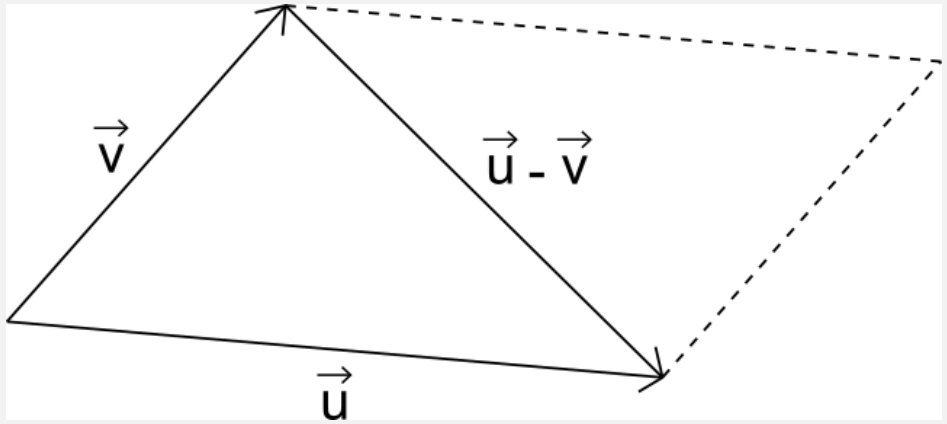


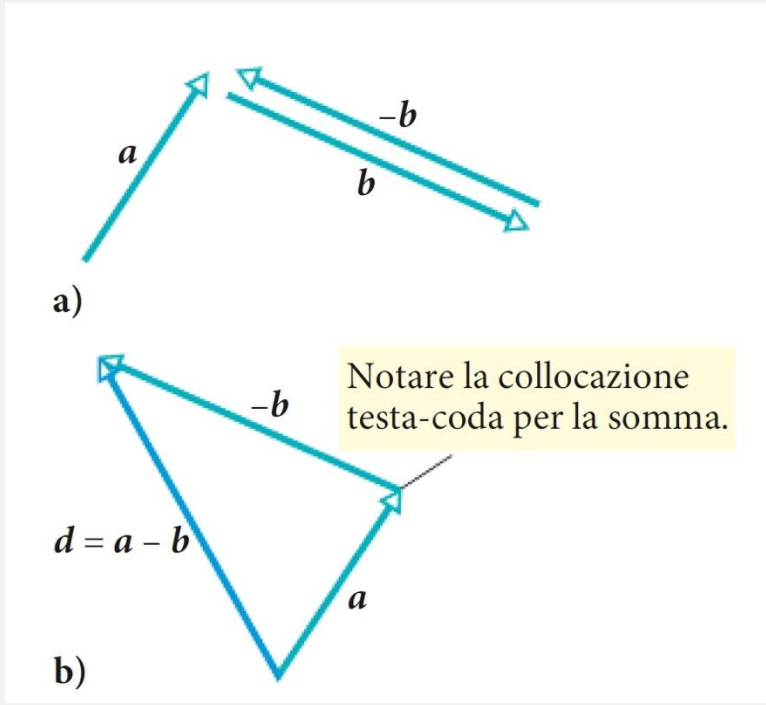


Operazioni vettoriali

Differenza di Vettori

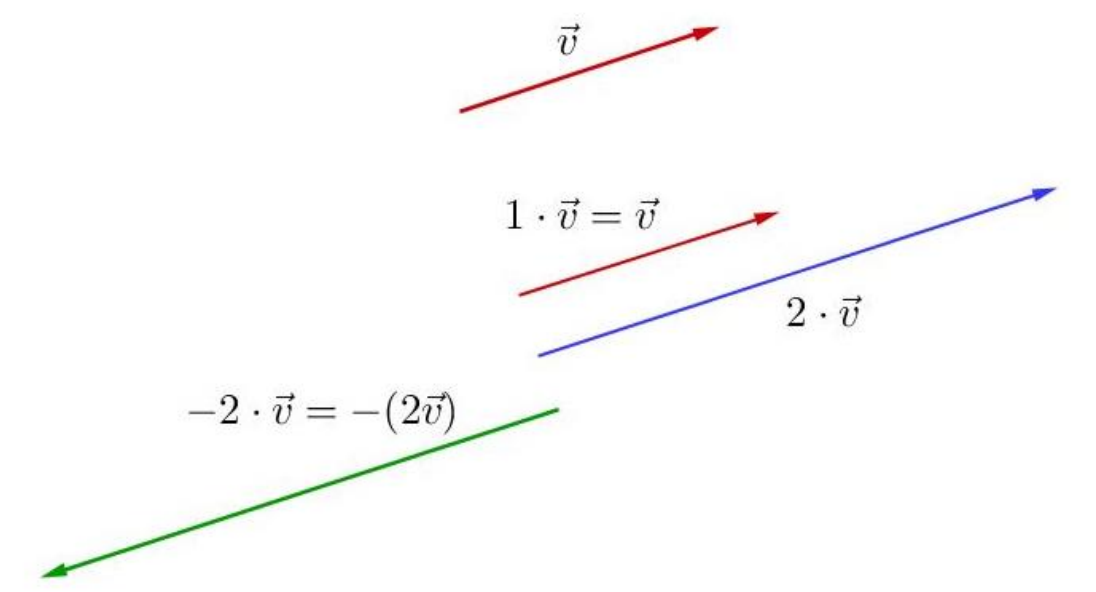






Operazioni vettoriali

Prodotto vettore-scalare



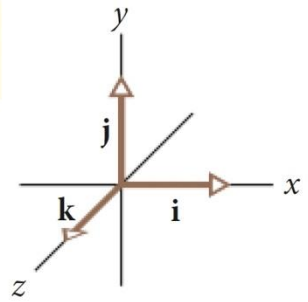
Il vettore $\vec{v}$ ha

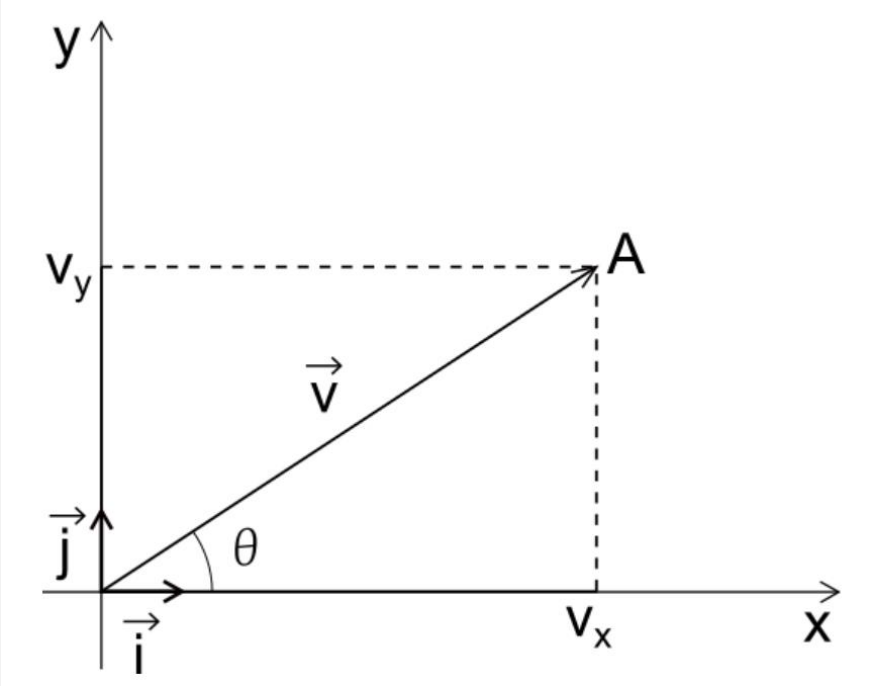
- la stessa direzione di $\vec{u}$
- lo stesso verso di $\vec{u}$ se $k > \mathbf{0}$, verso opposto se $k < \mathbf{0}$
- modulo $k|\vec{u}| = ku$

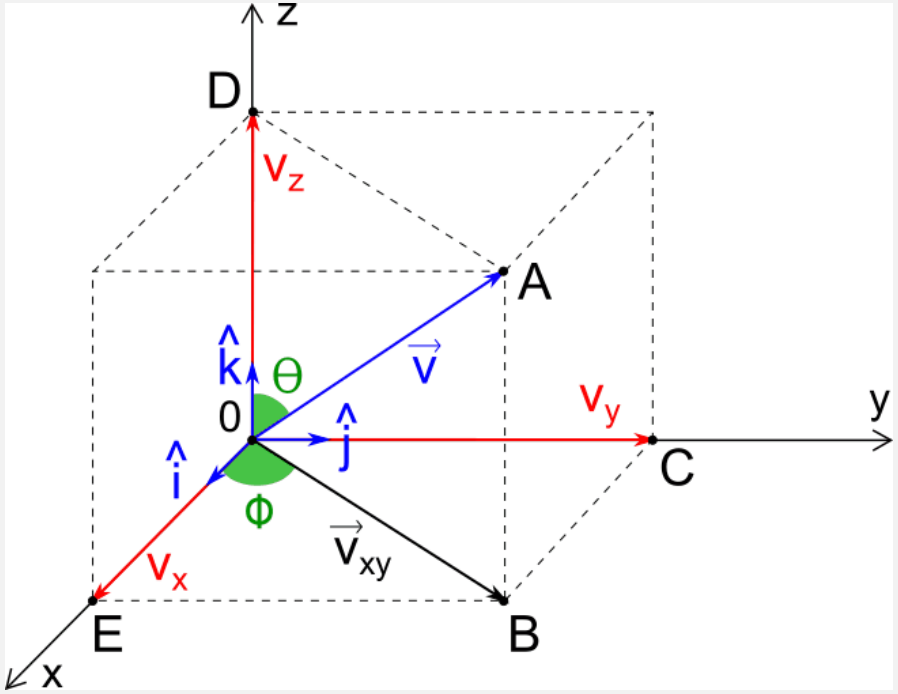
Operazioni vettoriali

Componenti Vettoriali / Proiezioni su x e y

I versori sono diretti come gli assi.

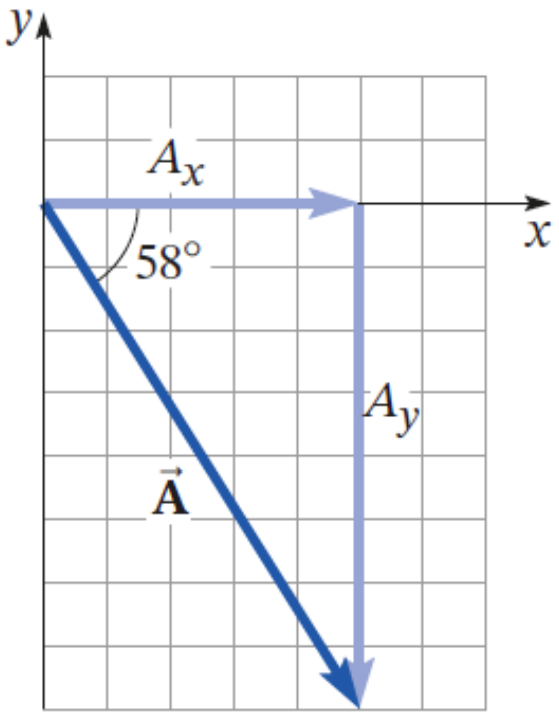






Operazioni vettoriali

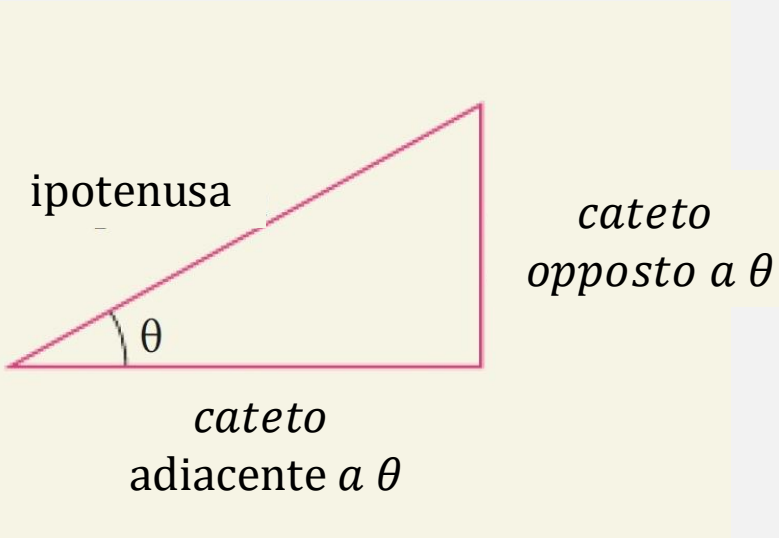
Componenti Vettoriali / Proiezioni su x e y



$$\sin\theta = \frac{\text{cateto opposto a } \theta}{\text{ipotenusa}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{cateto adiacente a } \theta}{\text{ipotenusa}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{cateto opposto a } \theta}{\text{cateto adiacente a } \theta}$$



Operazioni vettoriali

Algebra con le componenti

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$$

$$r_x = a_x + b_x$$

$$r_y = a_y + b_y$$

$$r_z = a_z + b_z$$

r è uguale al vettore (a+b): se ciò è vero, ogni componente di r deve coincidere con la corrispondente componente di (a+b)

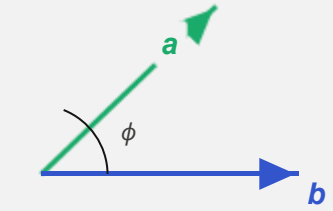
Due vettori sono uguali se le rispettive componenti sono tutte uguali tra loro

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b}) \longrightarrow d_x = a_x - b_x \qquad d_y = a_y - b_y \qquad d_z = a_z - b_z$$

dove $\boldsymbol{d} = d_x\boldsymbol{i} + d_y\boldsymbol{j} + d_z\boldsymbol{k}$

Operazioni vettoriali

Prodotto scalare

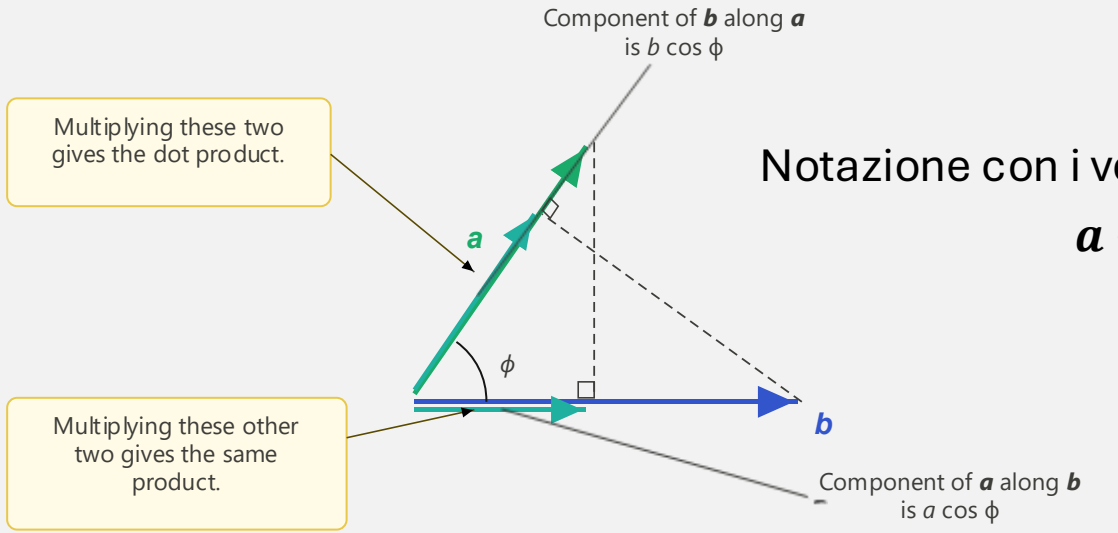


a)

Prodotto scalare dei vettori a e b («a scalare b»):

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ab\,cos\varphi$$

Tutti i termini a destra sono scalari; perciò il prodotto $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ è uno scalare!



b)

Notazione con i versori:

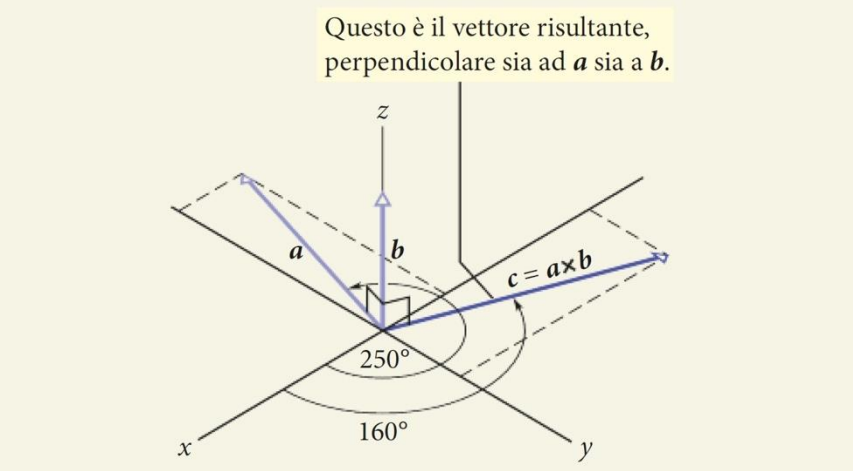
$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}) \cdot (b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k})$$

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

[Proprietà distributiva]

Operazioni vettoriali

Prodotto vettoriale

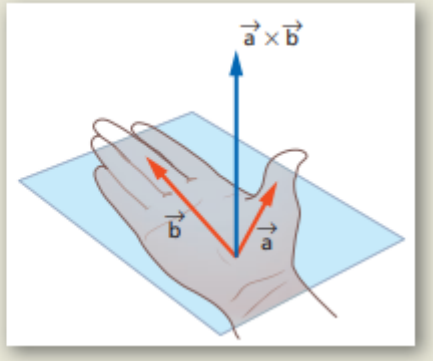


Prodotto vettoriale

Il prodotto vettoriale di due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ è il vettore $\vec{c}$ che ha:

- **modulo** uguale ad $ab \operatorname{sen} \alpha$;
- **direzione** perpendicolare al piano individuato dai due vettori;
- **verso** dato dalla regola della mano destra, illustrata nella figura.

Si indica con $\vec{a} \times \vec{b}$.



Prodotto vettoriale dei vettori a e b (“a vettore b”): il vettore c, il cui modulo è:

$$\boldsymbol{c = ab\,sin\varphi}$$

Nessuna Proprietà Commutativa: $\boldsymbol{a \times b \neq b \times a}$

Vale la Proprietà Distributiva: $\boldsymbol{a \times (b + c) = a \times b + a \times c}$

Con a // b a × b = 0

Con a ⊥ b |a × b| = massimo

Operazioni vettoriali

Esempio — nuotare attraverso una corrente (velocità relativa)

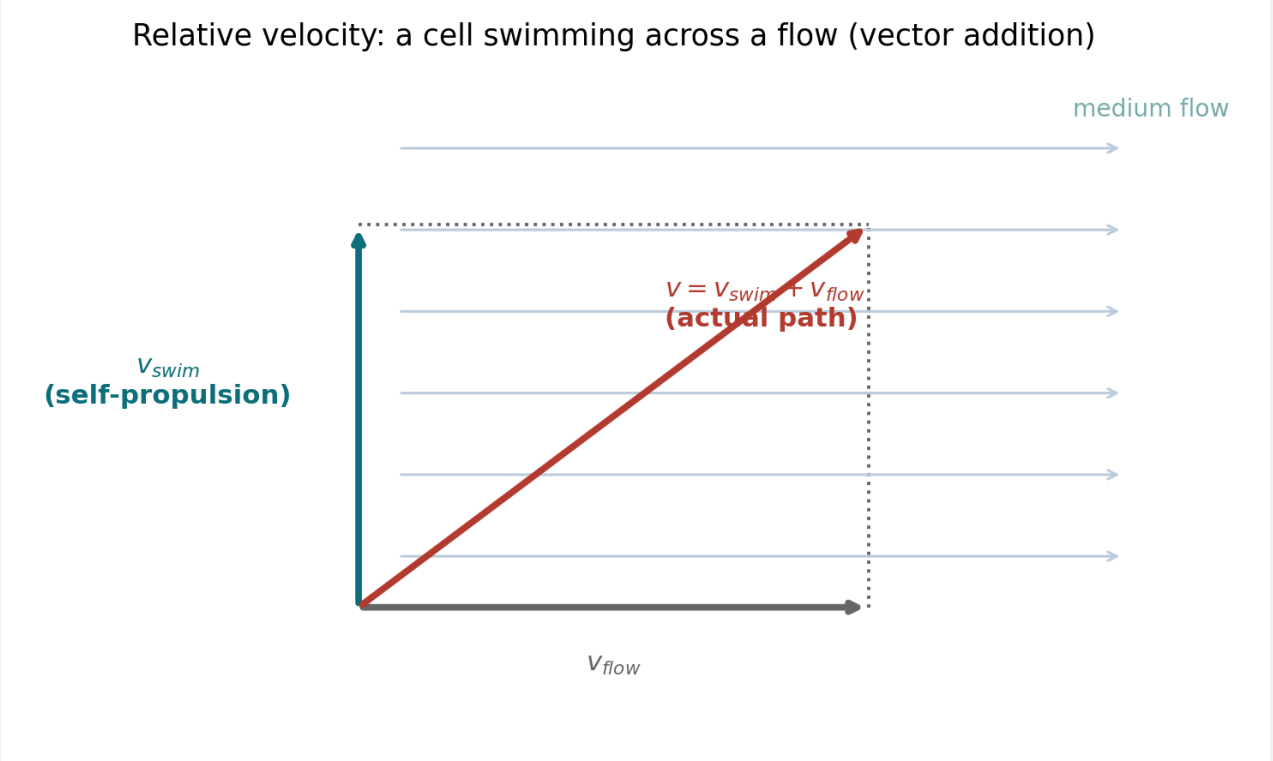
Una cellula o un microrganismo mobile in un mezzo in movimento non viaggia dove 'punta'.

La sua velocità reale è la somma vettoriale dell'auto-propulsione e del flusso del mezzo:

$$v = v_{\text{nuoto}} + v_{\text{corrente}}$$

La stessa regola governa una particella guidata in un canale microfluidico.

I vettori si sommano punta-coda; solo il risultante indica la traiettoria reale.



In pratica — la motilità in un mezzo in movimento

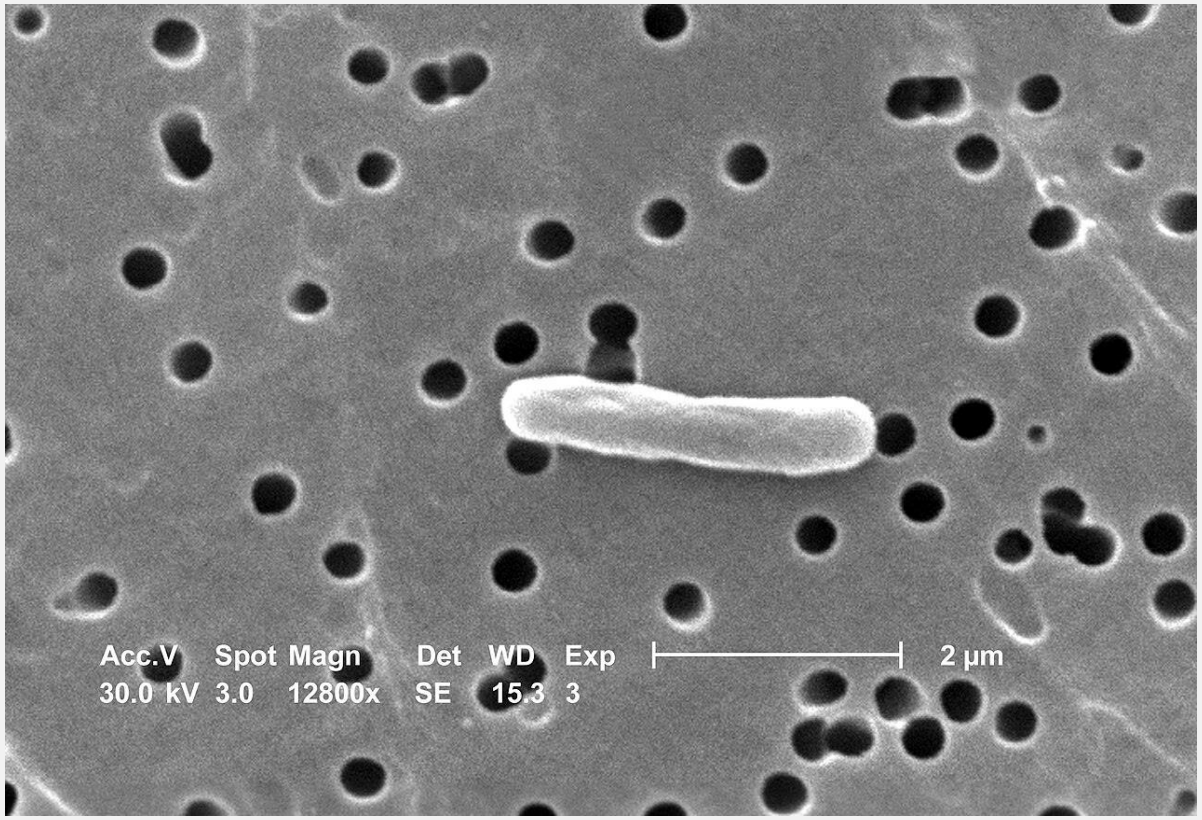
E. coli nuota a ~20 µm/s con flagelli rotanti; gli spermatozoi raggiungono ~50 µm/s.

Se il mezzo scorre a 40 µm/s mentre una cellula nuota trasversalmente a 30 µm/s:

risultante = $\sqrt{(30^2 + 40^2)} = 50$ µm/s, a $\arctan(30/40) \approx 37°$

La cellula viene trascinata a valle — per andare dritta deve 'puntare a monte'.

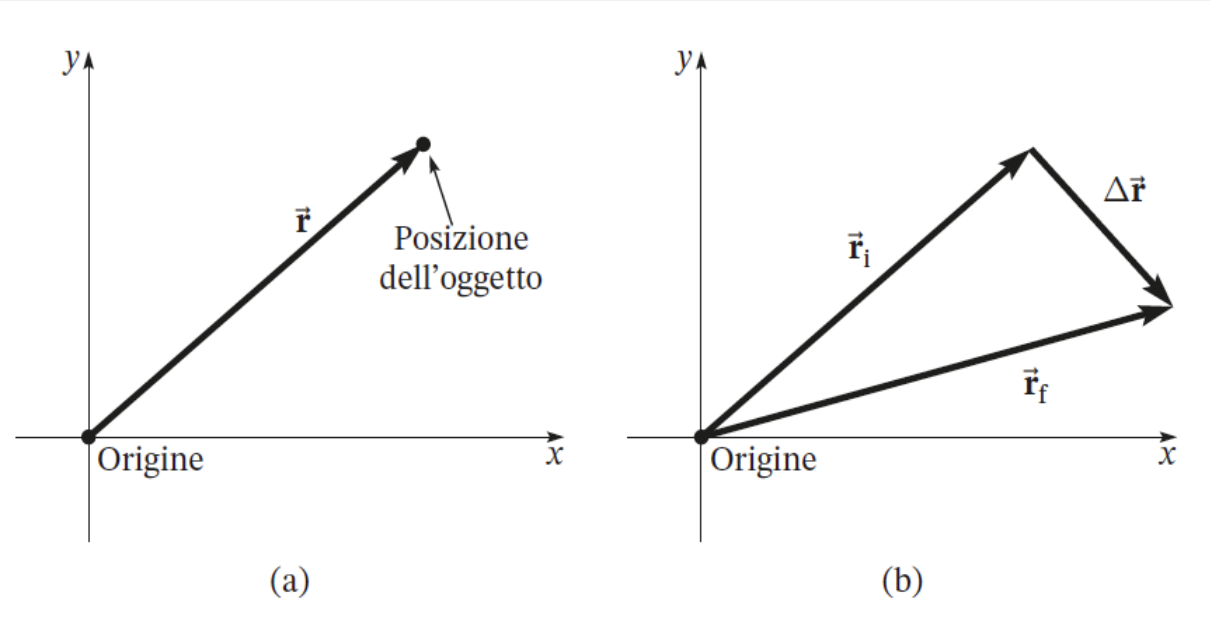
I dispositivi microfluidici sfruttano questo principio per guidare e separare le cellule nel flusso.

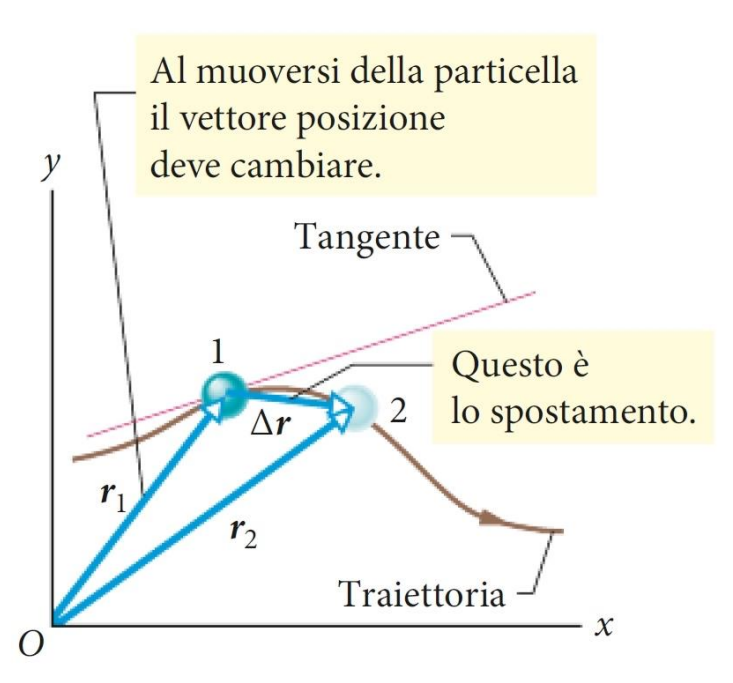


E. coli (SEM) — CDC, dominio pubblico

Vettori Posizione, Spostamento, Velocità e Accelerazione

Vettore Posizione – Vettore Spostamento





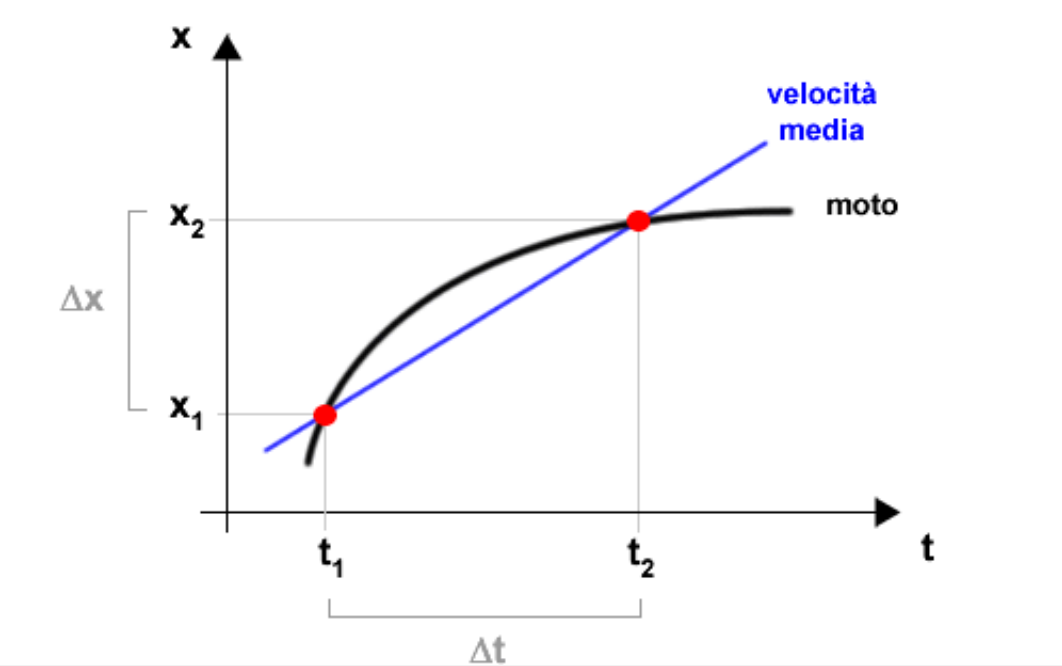
$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$$ Vettore Posizione

$$\Delta\vec{r} = (x_f - x_i)\cdot\hat{\imath} + (y_f - y_i)\cdot\hat{\jmath} = \Delta x\cdot\hat{\imath} + \Delta y\cdot\hat{\jmath}$$

Vettore Spostamento

Vettori Posizione, Spostamento, Velocità e Accelerazione

Vettore Velocità media



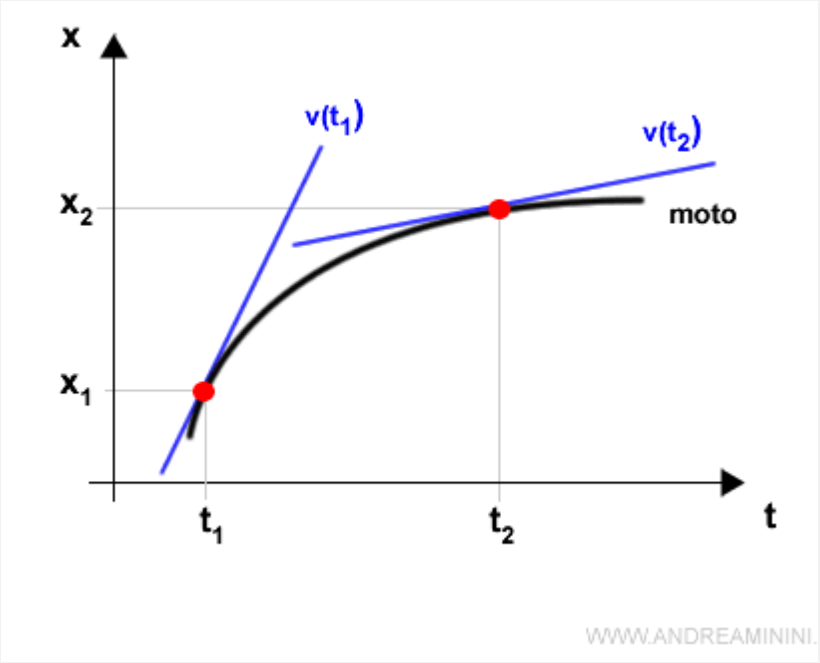
$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta \mathrm{t}} = \frac{\vec{r}_f - \vec{r}_i}{t_f - t_i} \qquad [L]/[t] = [Lt^{-1}]$$

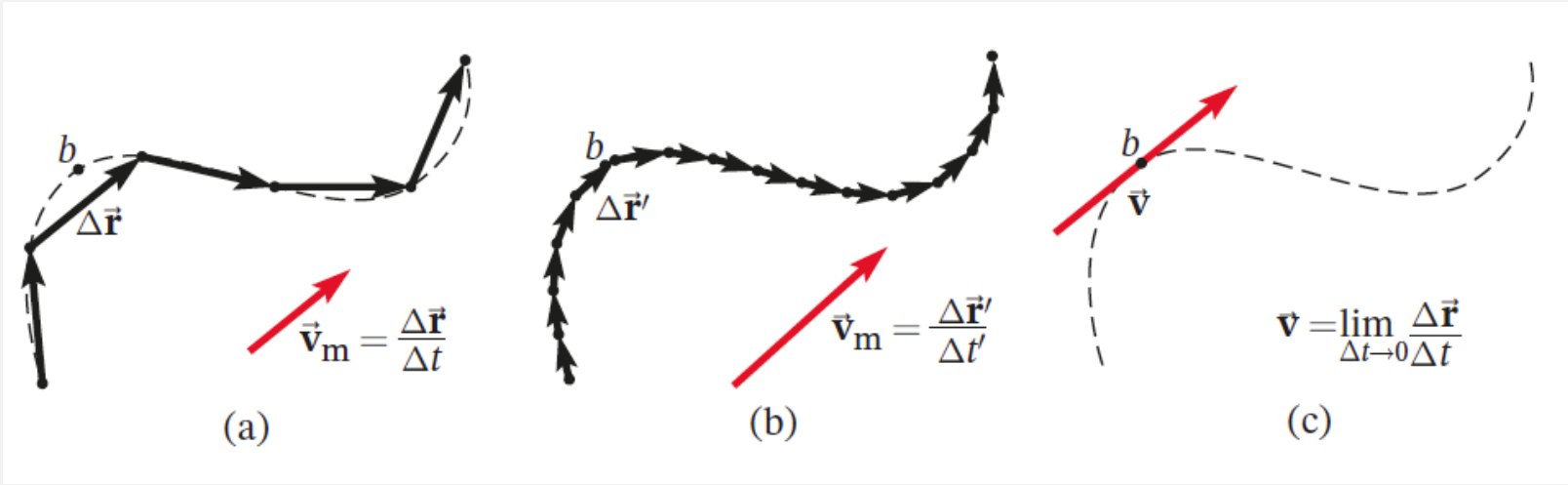
$$\vec{v}_m = \frac{\Delta x\boldsymbol{i} + \Delta y\boldsymbol{j} + \Delta z\boldsymbol{k}}{\Delta \mathrm{t}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\boldsymbol{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\boldsymbol{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\boldsymbol{k}$$

$$v_{m,x} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \ , \qquad v_{m,y} = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

Vettori Posizione, Spostamento, Velocità e Accelerazione

Vettore Velocità Istantanea





In forma scalare:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

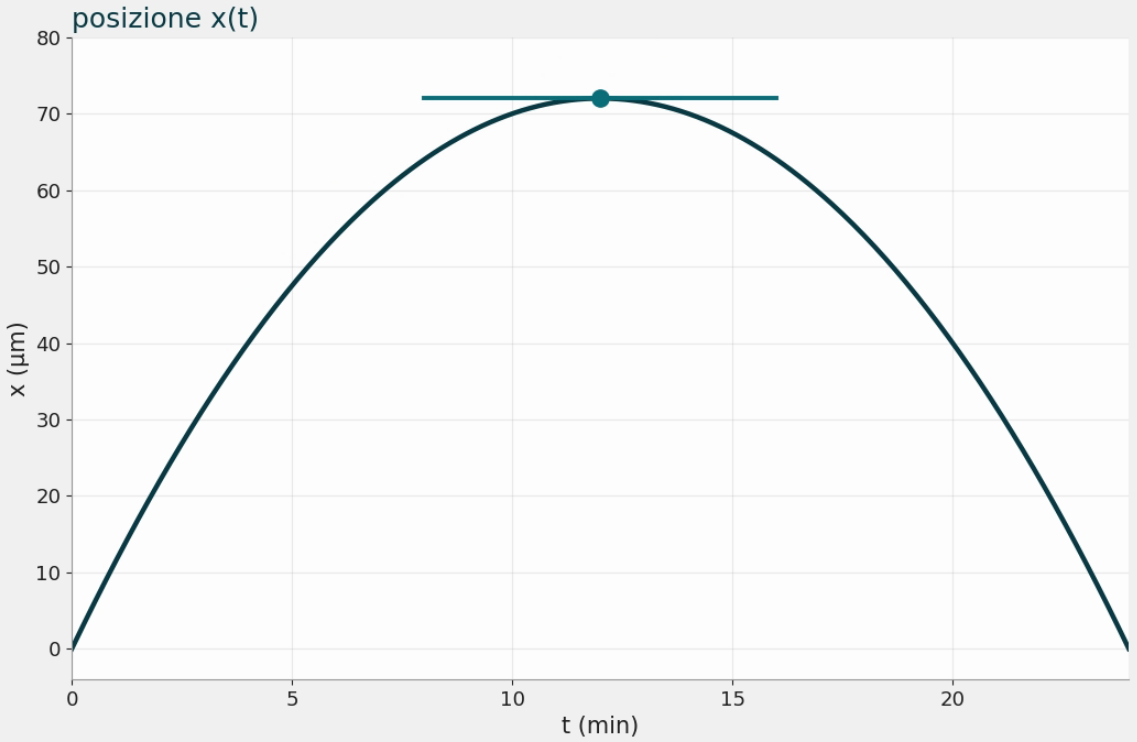
$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad , \qquad v_y = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

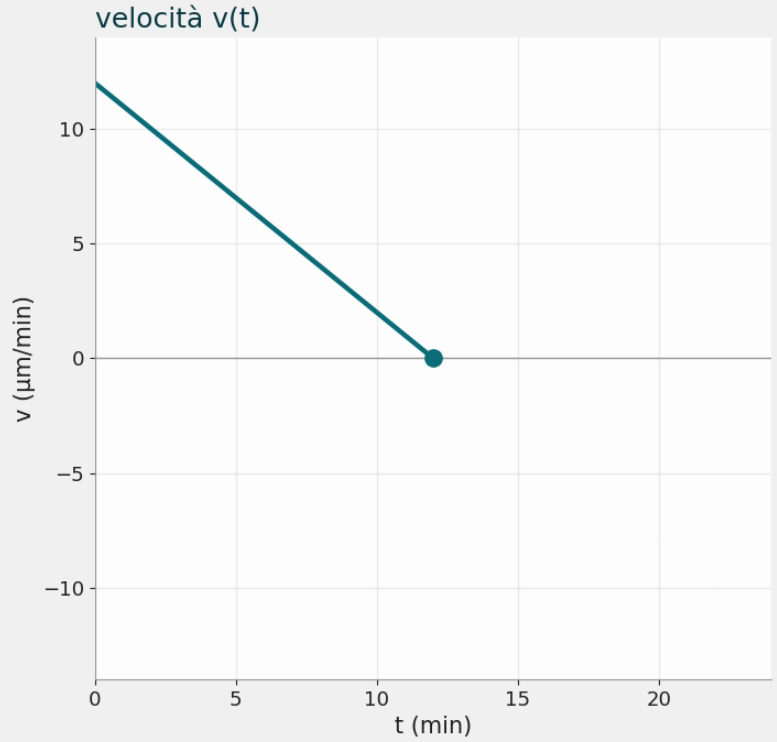
Stessa direzione e stesso verso dello spostamento in quell'istante

Animazione — velocità media e istantanea

Velocità media e velocità istantanea

Una cellula si muove lungo una retta: $x(t) = 12t - 0{,}5t^2$ (x in µm, t in min)





t = 12,0 min x = 72,0 µm

v = dx/dt = 12 − t = 0,0 µm/min

x è massimo → la tangente è orizzontale → v = 0: la cellula inverte il moto

Vettori Posizione, Spostamento, Velocità e Accelerazione

Esempio — migrazione cellulare: spostamento vs percorso

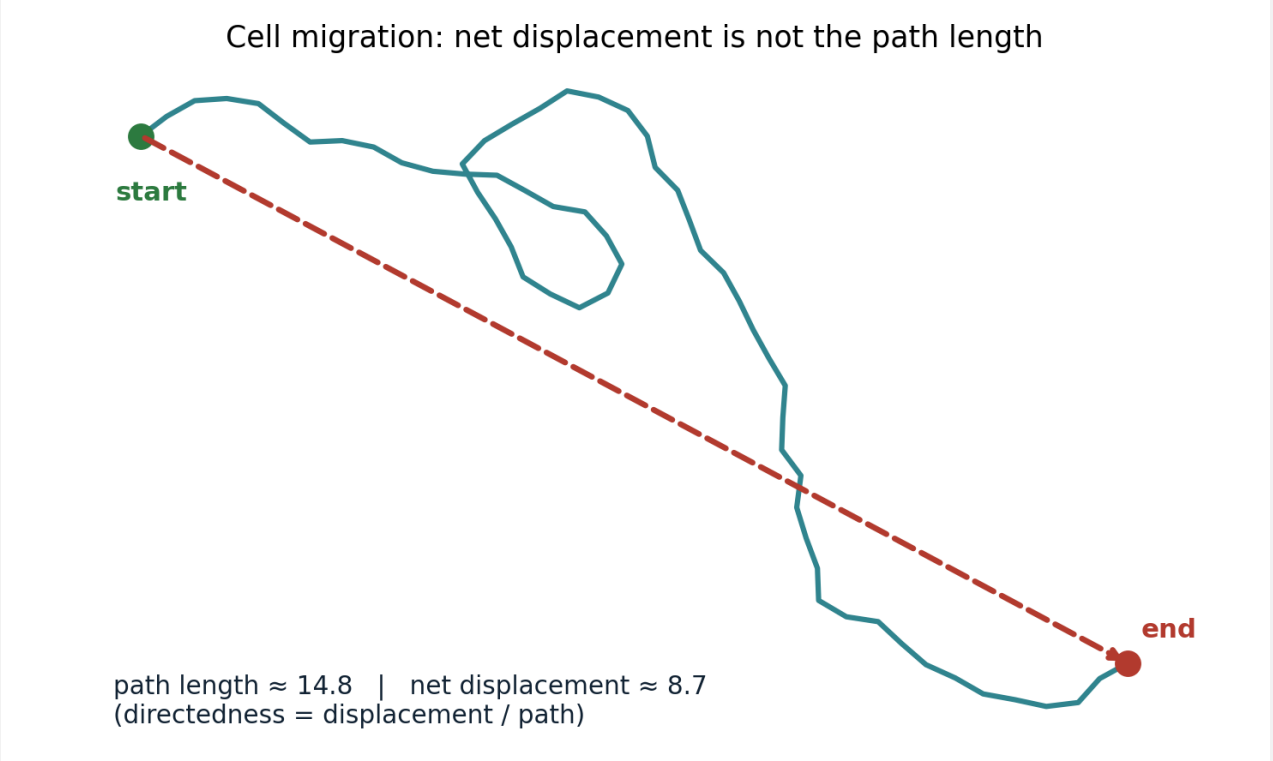
In un saggio di chemiotassi o di guarigione di una ferita, le cellule vagano ma tendono a derivare in una direzione.

Lo spostamento netto (inizio → fine) è molto più breve della lunghezza totale del percorso.

Velocità media = spostamento netto / tempo — un vettore, non lunghezza del percorso / tempo.

Il loro rapporto, la 'direzionalità', misura quanto la migrazione sia mirata.

I software di tracciamento cellulare calcolano esattamente questi vettori dalla microscopia time-lapse.



In pratica — quantificare la migrazione cellulare

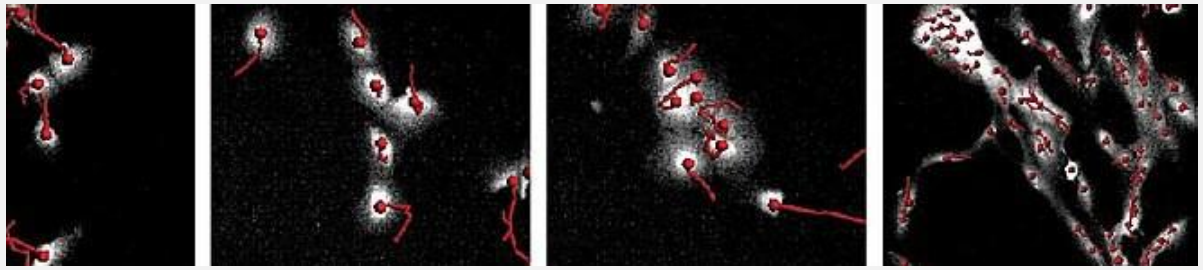
La microscopia time-lapse registra la posizione di ogni cellula fotogramma per fotogramma.

Se il percorso di una cellula totalizza 150 µm ma inizio e fine distano 60 µm:

direzionalità = spostamento / percorso = 60 / 150 = 0,40

La velocità media utilizza lo spostamento (un vettore); la rapidità media utilizza la lunghezza del percorso.

Queste metriche quantificano la chemiotassi, la guarigione delle ferite e l'invasione delle cellule tumorali.



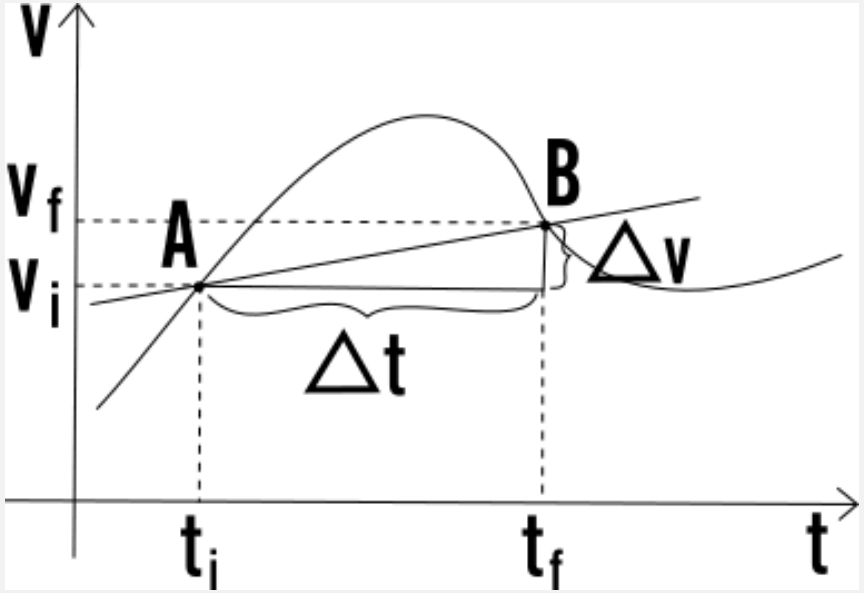
Tracciati di migrazione cellulare — Leggett et al., CC BY 4.0

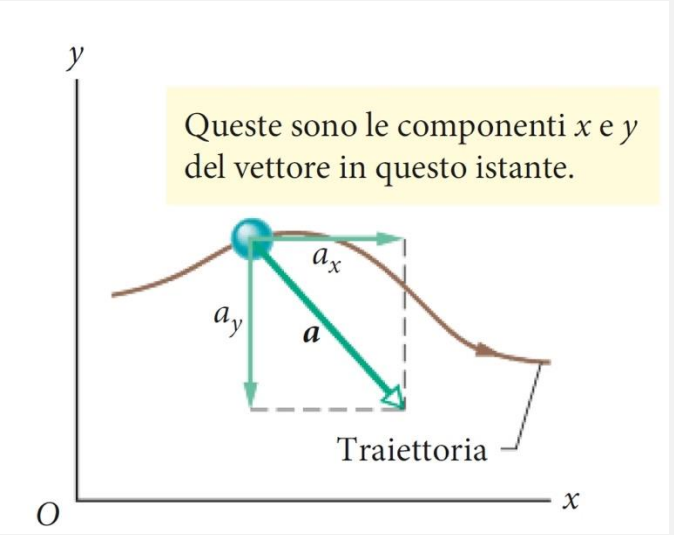
Vettori Posizione, Spostamento, Velocità e Accelerazione

Vettore Accelerazione Media

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \qquad a_{m,x} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\ , a_{m,y} = \frac{\Delta v_y}{\Delta t}$$

Stessa direzione e stesso verso di $\Delta\vec{v}$ $[Lt^{-1}]/[t] = [Lt^{-2}]$



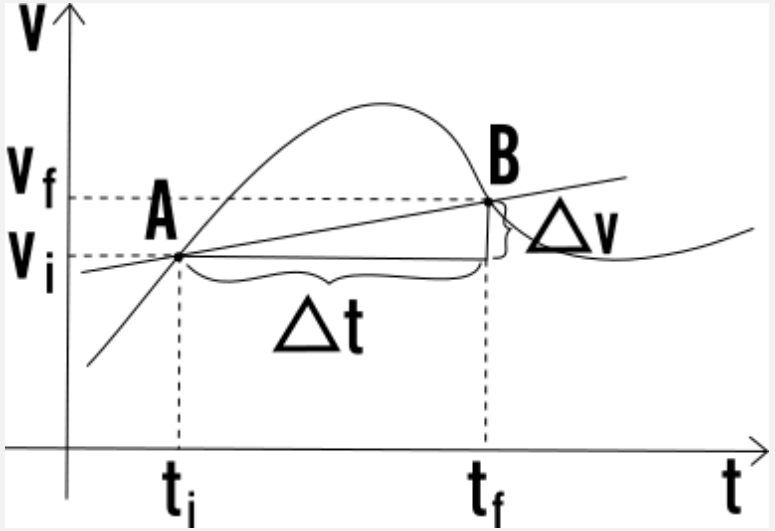


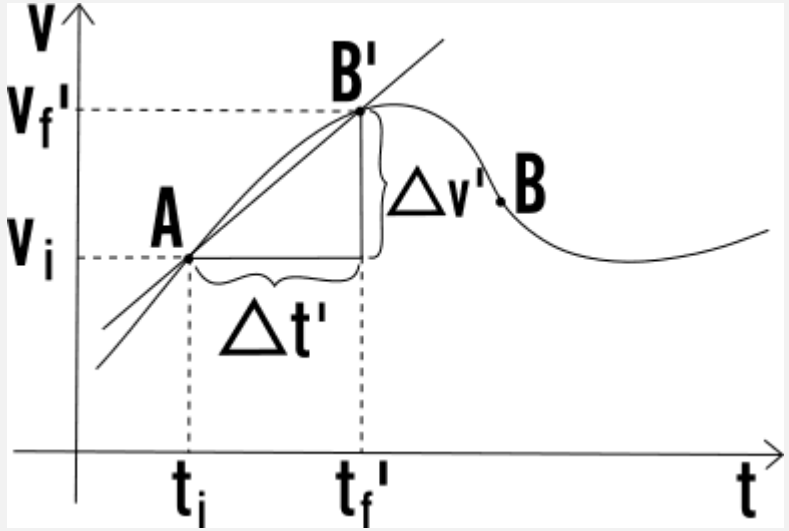
Vettori Posizione, Spostamento, Velocità e Accelerazione

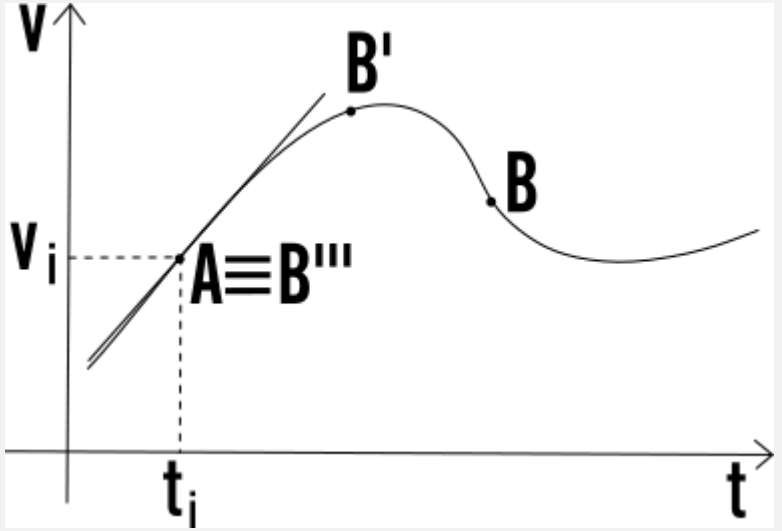
Vettore Accelerazione Istantanea

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \quad , \qquad a_y = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta t}$$







Velocità e accelerazione come derivate

Se la posizione è nota come funzione del tempo, velocità e accelerazione sono le sue derivate (modulo M5):

$v(t) = dx/dt$ — pendenza della tangente a x(t)

$a(t) = dv/dt = d^2x/dt^2$ — pendenza della tangente a v(t)

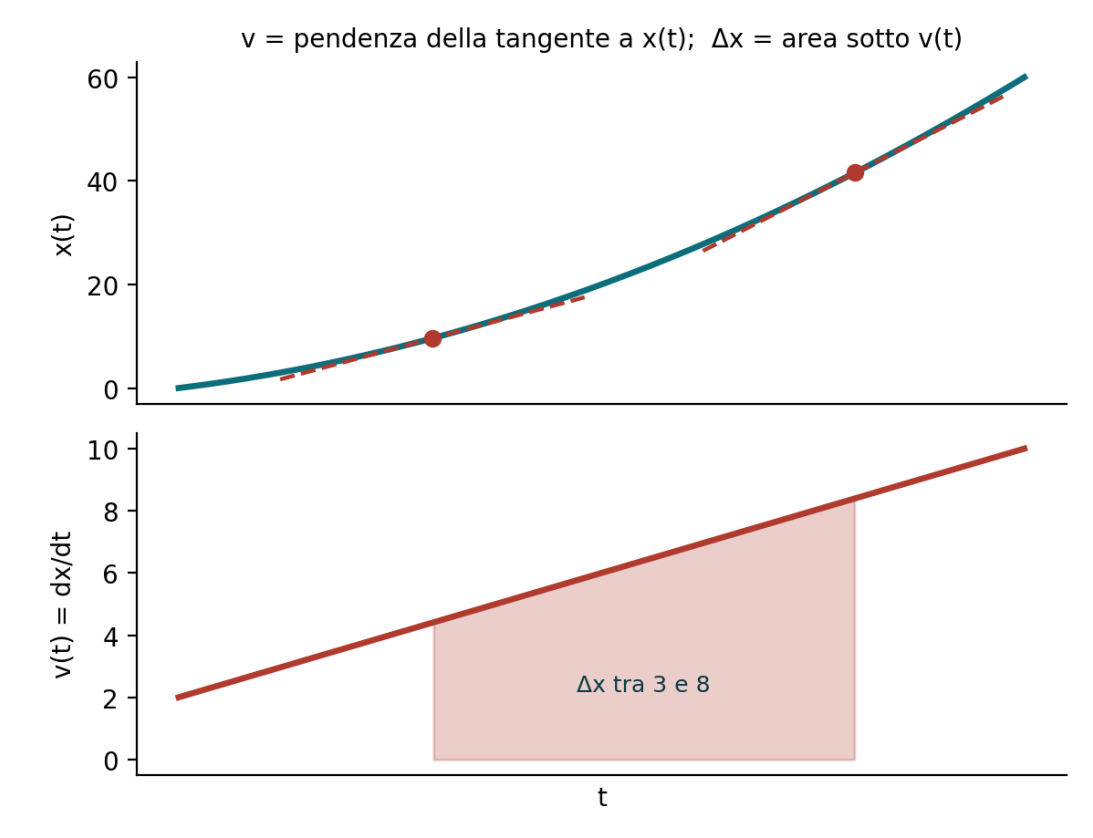
Il percorso inverso è l'integrale (modulo M6):

$\Delta x = \int v\,dt$ — area (con segno) sotto v(t)

$\Delta v = \int a\,dt$ — area (con segno) sotto a(t)

In 2D si deriva componente per componente: $v_x = dx/dt$, $v_y = dy/dt$.

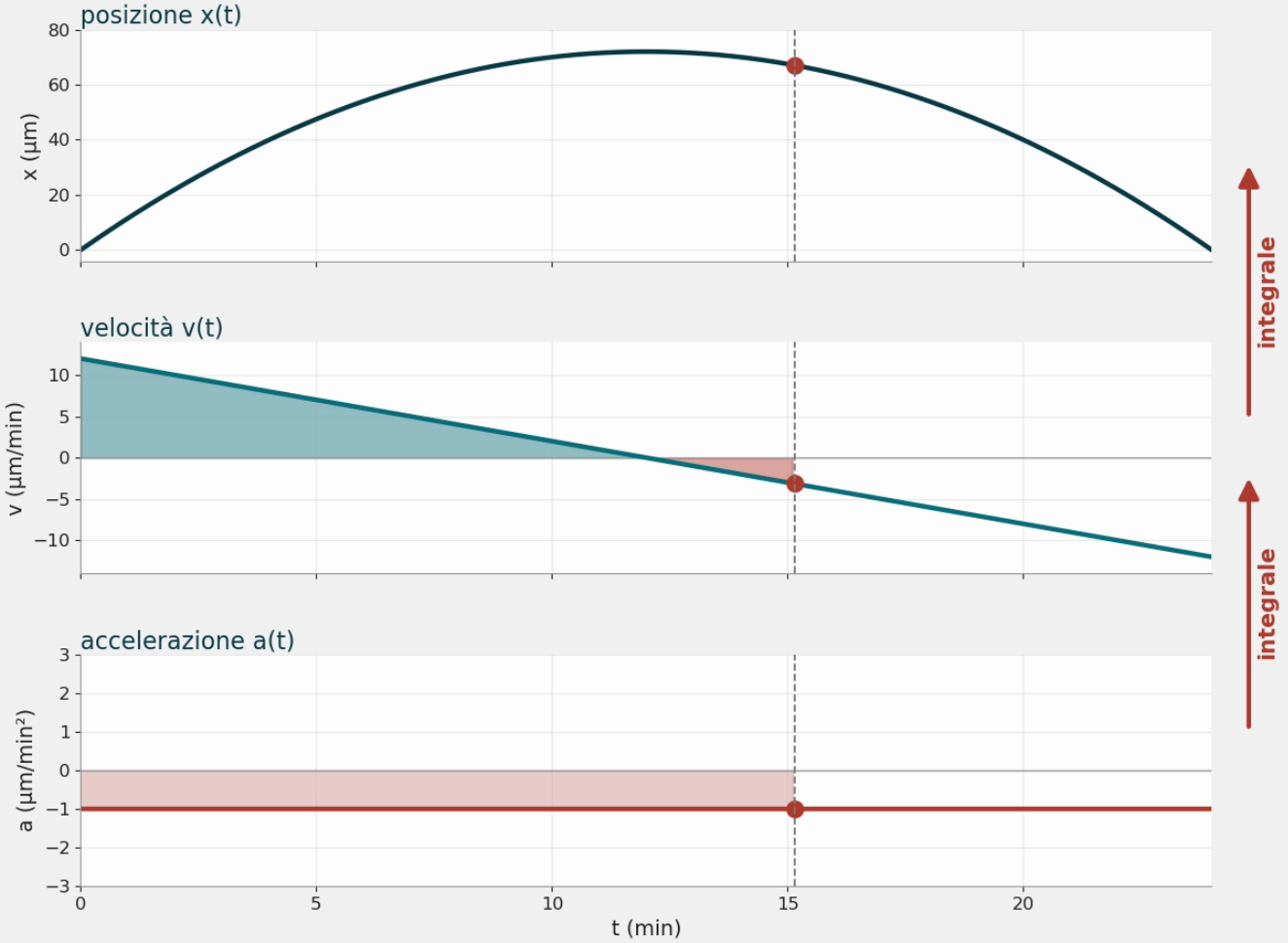
Con a costante si ottiene $v = v_0 + at$ e $x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$: le equazioni di FIS3 si ricavano così, per integrazione.



Animazione — derivata e integrale

Posizione, velocità, accelerazione: derivata e integrale

Una cellula lungo una retta: $x(t) = 12t - 0{,}5t^2$, $v(t) = 12 - t$, $a(t) = -1$ µm/min²



Integrale: l'area

area sotto a(t) → Δv
Δv = −15,1 µm/min

area con segno sotto v(t) → Δx

$\int_0^t v\,dt = 67{,}1$ µm = x(t) − x(0)

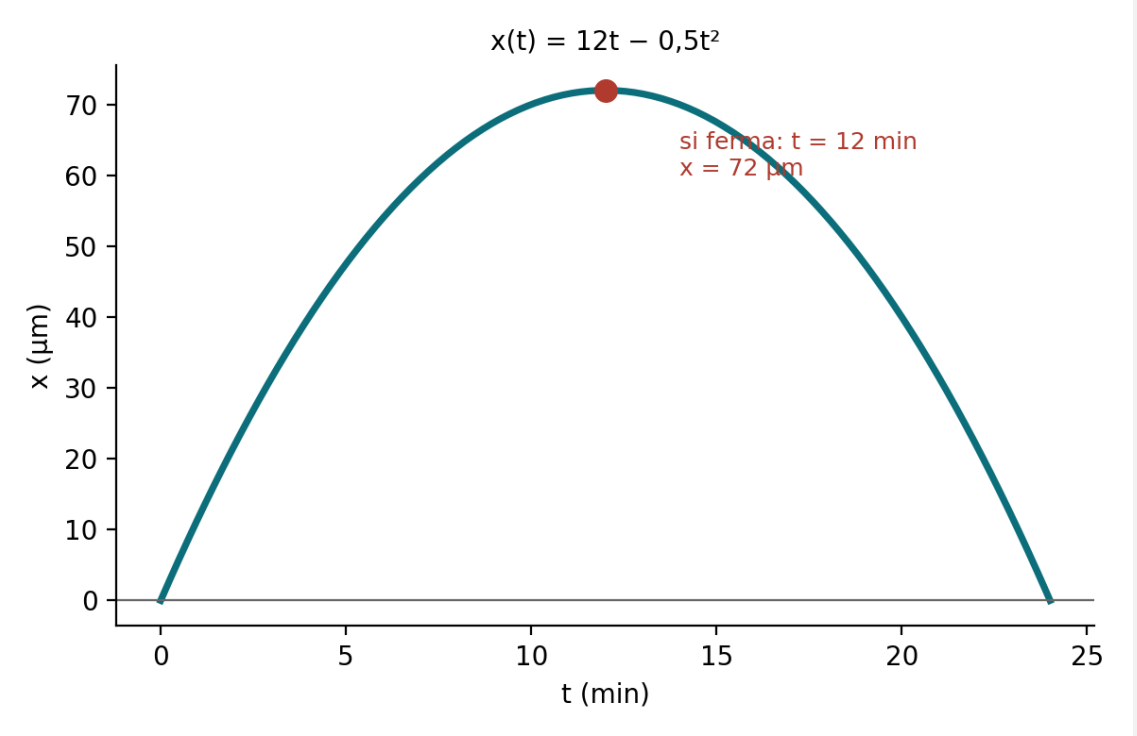
percorso $\int |v|\,dt$ = 76,9 µm

Area rossa: moto all'indietro,
negativa in ∫v dt,
positiva in ∫|v| dt

Esercizio avanzato — derivata e integrale

Una cellula si muove lungo l’asse x con $x(t) = 12t - 0{,}5t^2$ (x in μm, t in min), per $0 \le t \le 24$ min.

Trova: (a) v(t) e a(t); (b) v a t = 4 min; (c) l’istante in cui la cellula si ferma e la sua posizione; (d) lo spostamento tra 0 e 24 min con $\Delta x = \int v\,dt$ e la lunghezza totale del percorso; (e) cosa significa il risultato di (d)?



Esercizio avanzato — soluzione (a–c)

Passo 1 — velocità come derivata (a). $v = dx/dt$. Si deriva termine per termine: $d(12t)/dt = 12$ e $d(0{,}5t^2)/dt = 0{,}5 \cdot 2t = t$. Quindi

$$x(t) = 12t - 0{,}5t^2 \quad \rightarrow \quad \mathbf{v(t) = 12 - t} \quad (\mu m/min)$$

Passo 2 — accelerazione (a). $a = dv/dt$: $d(12)/dt = 0$ e $d(-t)/dt = -1$, quindi **$a = -1\ \mu m/min^2$**. È costante e negativa: la velocità diminuisce di 1 µm/min ogni minuto.

Passo 3 — velocità a t = 4 min (b). Si sostituisce $t = 4$ in $v(t)$: $v(4) = 12 - 4 =$ **8 µm/min** (positiva: la cellula sta avanzando).

Passo 4 — quando si ferma (c). Si pone $v = 0$: $12 - t = 0 \rightarrow t =$ **12 min**. Si calcola la posizione in quell'istante:

$$x(12) = 12 \cdot 12 - 0{,}5 \cdot 12^2 = 144 - 72 = \mathbf{72\ \mu m}$$

Prima di 12 min $v > 0$ (la cellula avanza), dopo $v < 0$ (torna indietro): a t = 12 min inverte il moto.

Esercizio avanzato — soluzione (d–e)

Passo 5 — spostamento netto (d). $\Delta x = \int_0^{24} v\,dt$. Una primitiva di $12 - t$ è $F(t) = 12t - t^2/2$ (si verifica derivando: $F' = 12 - t$). Si calcola $F(24) - F(0)$:

$F(24) = 12 \cdot 24 - 24^2/2 = 288 - 288 = 0$; $F(0) = 0$ → **$\Delta x = 0$ µm**

Controllo: $\Delta x = x(24) - x(0) = (12 \cdot 24 - 0{,}5 \cdot 24^2) - 0 = 0$.

Passo 6 — lunghezza del percorso (d). Poiché v cambia segno a 12 min, si separano i due tratti (altrimenti le aree si compensano):

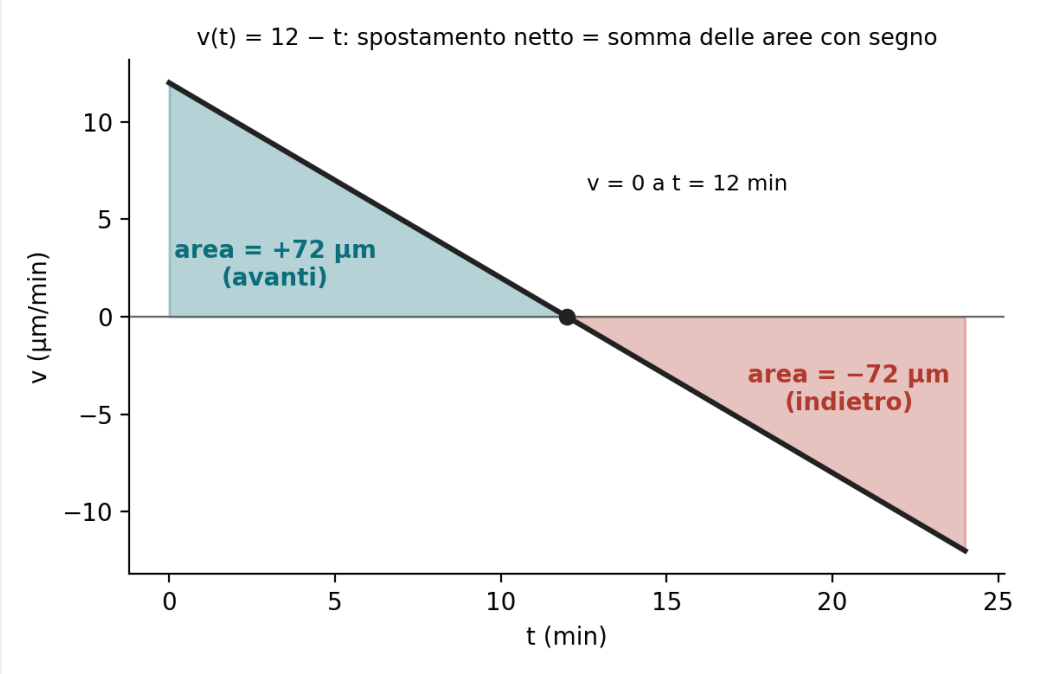
0–12 min: $x(12) - x(0) = +72$ µm (avanti)

12–24 min: $x(24) - x(12) = 0 - 72 = -72$ µm (indietro)

percorso = $|72| + |-72|$ = **144 µm**

(equivale all'area dei due triangoli di v(t): ½ · 12 min · 12 µm/min = 72 µm ciascuno).

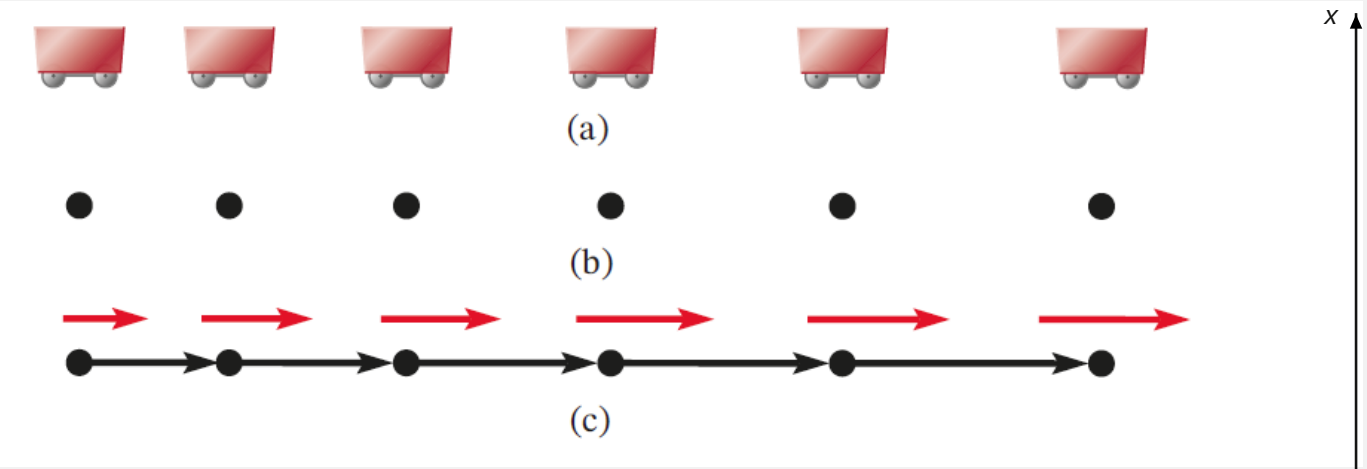
Passo 7 — significato (e). La cellula torna al punto di partenza: spostamento netto nullo e velocità media vettoriale $\Delta x/\Delta t = 0$. La rapidità media è invece percorso/tempo = 144/24 = **6 µm/min**.

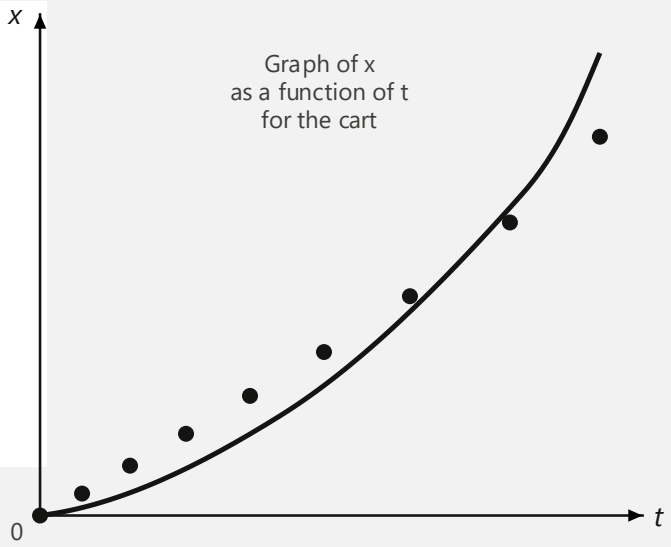


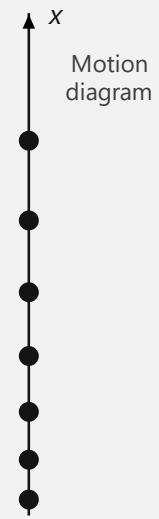
Vettori Posizione, Spostamento, Velocità e Accelerazione

Diagramma di Moto

Un diagramma di moto mostra la posizione di un oggetto in funzione del tempo

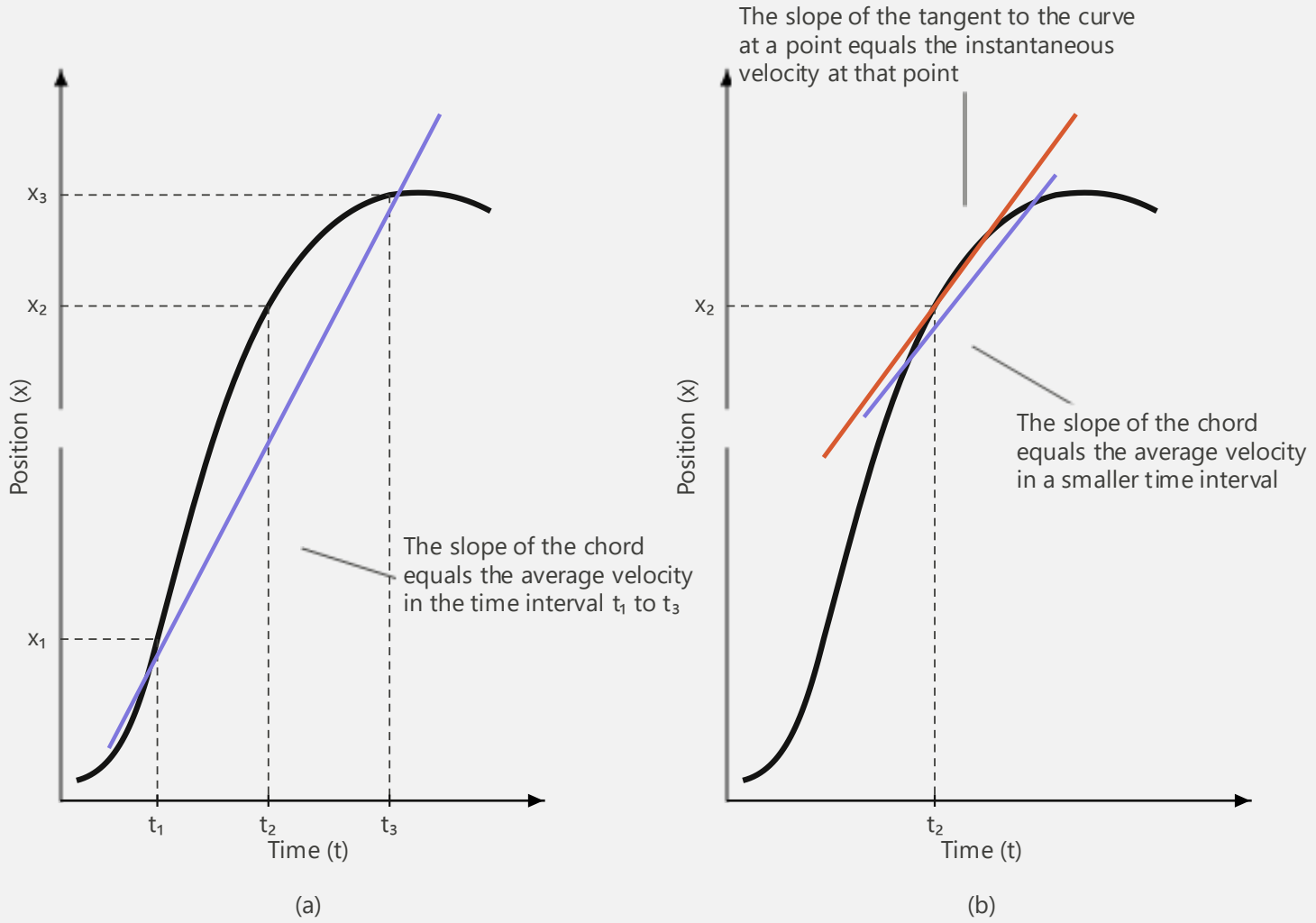






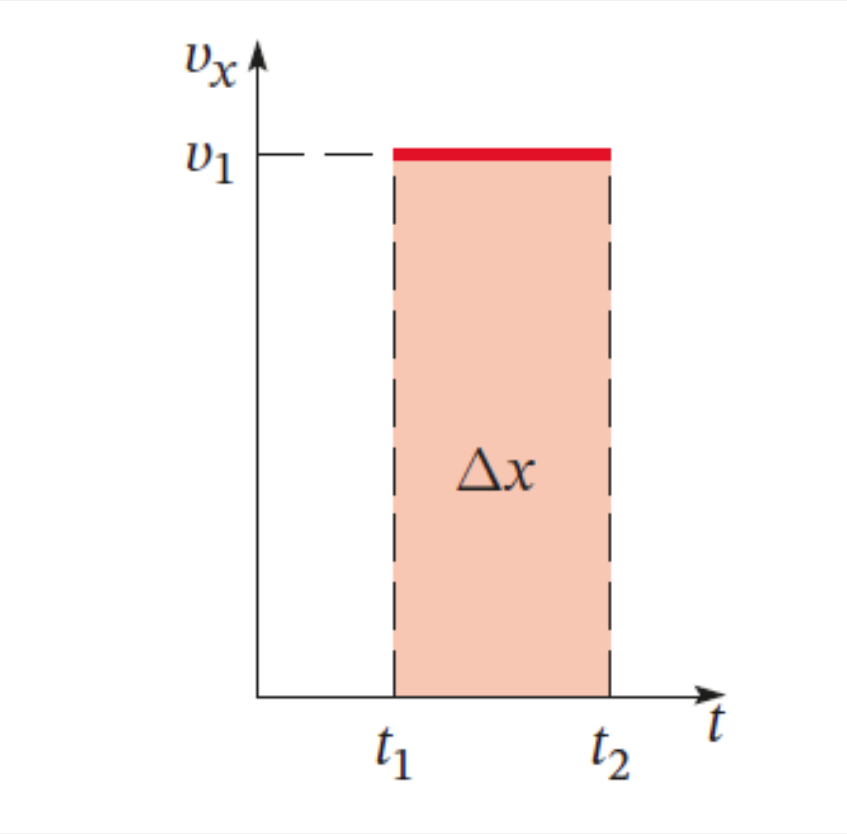
Vettori Posizione, Spostamento, Velocità e Accelerazione

relazione grafica tra posizione e velocità



Vettori Posizione, Spostamento, Velocità e Accelerazione

Relazione Grafica tra Posizione, Tempo e Velocità

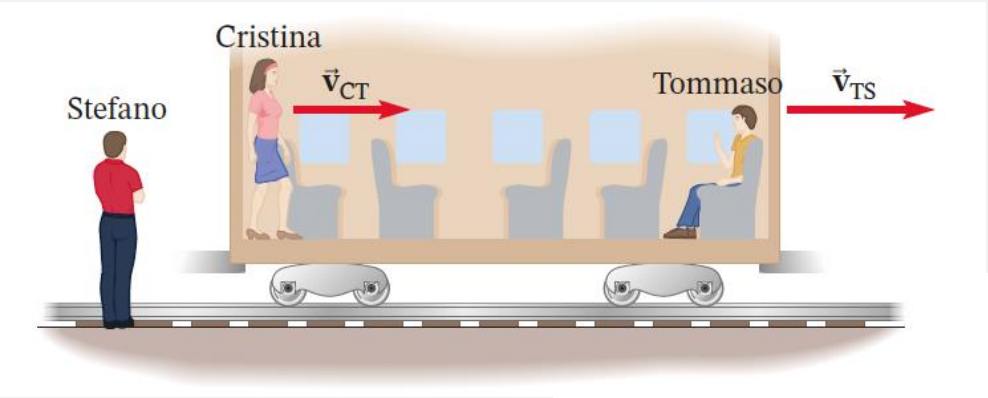


$$v_x = v_{m,x} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$\Delta x = v_x \Delta t \ (\text{per } v_x \ costante)$$

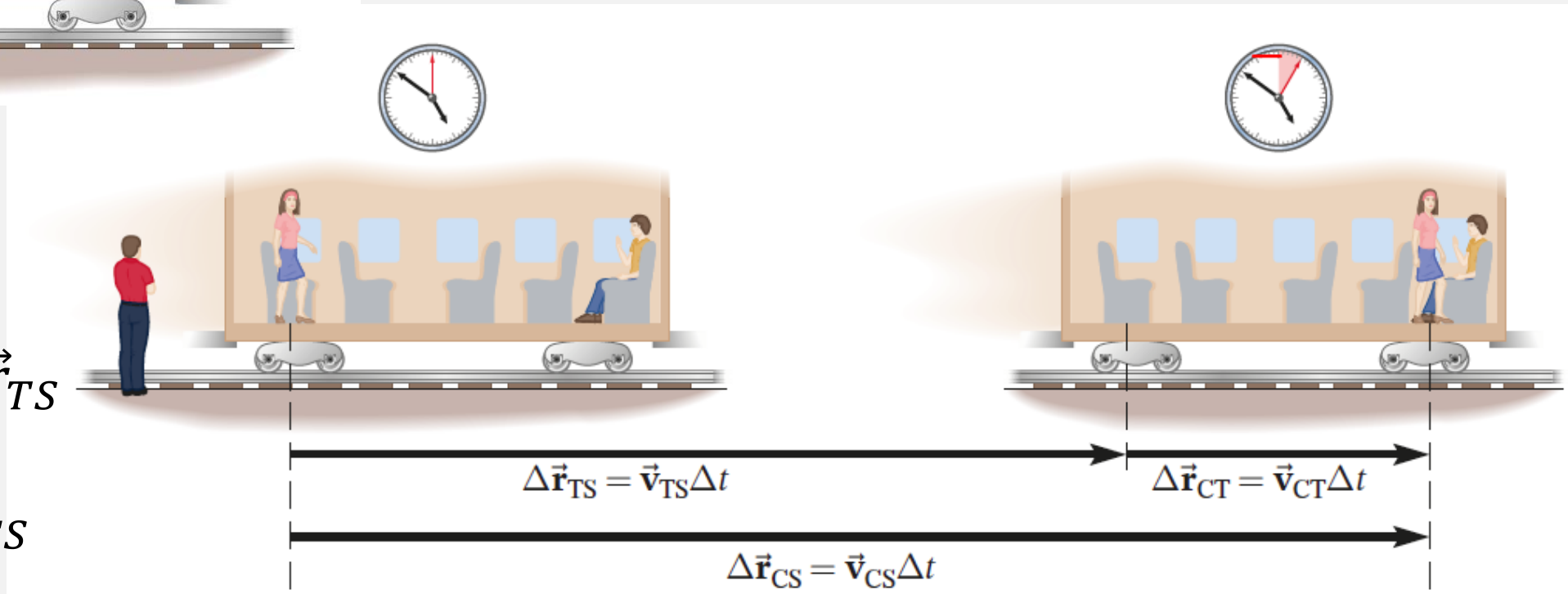
Vettori Posizione, Spostamento, Velocità e Accelerazione

Velocità Relativa e Sistemi di Riferimento



$$\Delta\vec{r}_{CS} = \Delta\vec{r}_{CT} + \Delta\vec{r}_{TS}$$

$$\vec{v}_{CS} = \vec{v}_{CT} + \vec{v}_{TS}$$

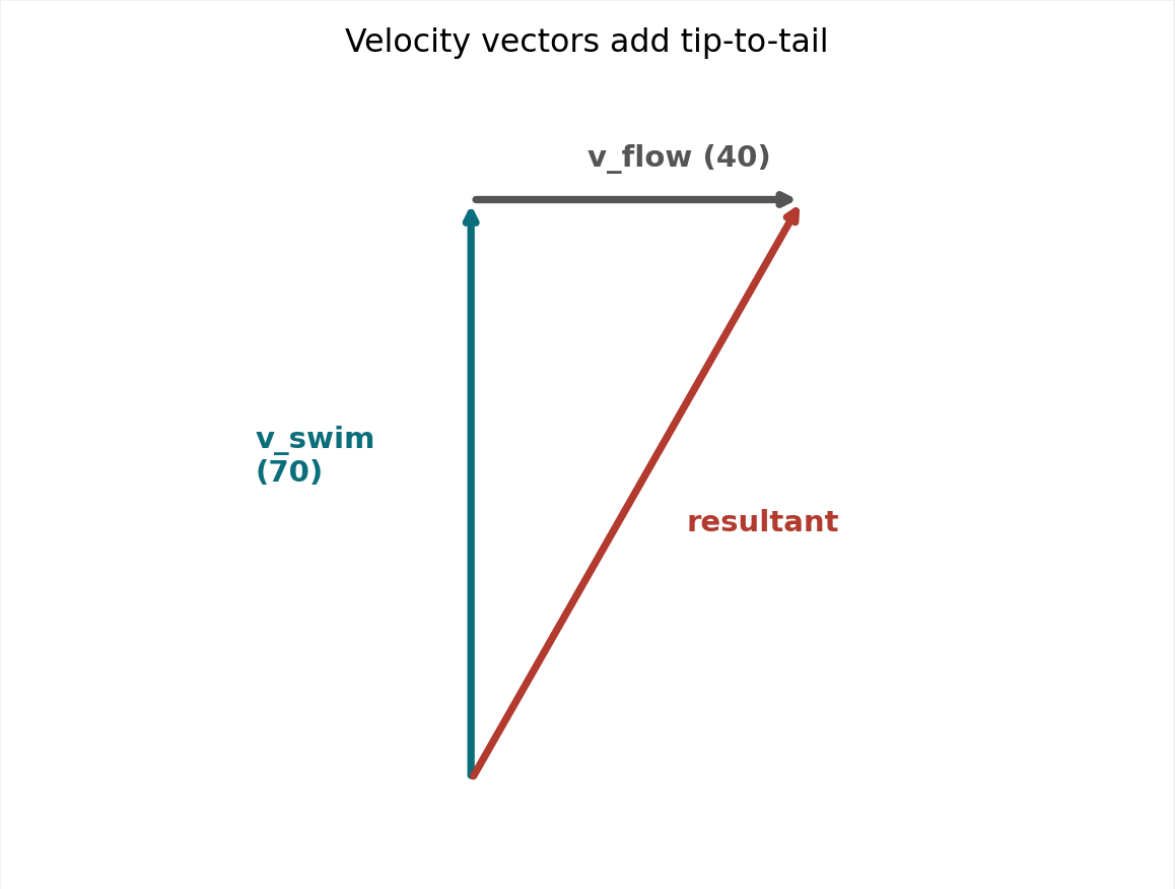


Esercizio 1 — nuotare attraverso una corrente (velocità relativa)

Una cellula nuota a 70 µm/s; il mezzo scorre attraverso il suo percorso a 40 µm/s.

Trova (a) la velocità risultante e l'angolo se punta dritto attraverso;

(b) l'angolo verso monte necessario per muoversi in linea retta; (c) la sua velocità netta di attraversamento in quel caso.



Esercizio 1 — soluzione (a)

Passo 1 — impostare il problema. La velocità della cellula rispetto al laboratorio è la somma vettoriale della velocità con cui nuota e di quella della corrente (velocità relativa): $v_{ris} = v_{nuoto} + v_{corrente}$. Si scelgono due assi: x lungo la corrente, y nella direzione dell'attraversamento. Nel caso (a) la cellula punta dritto attraverso, quindi i due vettori sono perpendicolari:

$v_{nuoto} = 70$ µm/s (lungo y) $\qquad v_{corrente} = 40$ µm/s (lungo x)

Passo 2 — modulo della velocità risultante. Due vettori perpendicolari si sommano con il teorema di Pitagora:

$$v_{ris} = \sqrt{(70^2 + 40^2)} = \sqrt{(4900 + 1600)} = \sqrt{6500} = \mathbf{80{,}6\ \mu m/s}$$

Passo 3 — direzione. L'angolo α rispetto alla direzione di attraversamento si ricava dal rapporto tra le componenti:

$$\tan \alpha = 40 / 70 = 0{,}571 \quad \rightarrow \quad \alpha = \arctan(0{,}571) = \mathbf{29{,}7°}$$ (verso valle)

Significato: la cellula arriva sull'altra sponda spostata verso valle; la corrente la trascina mentre attraversa.

Esercizio 1 — soluzione (b–c)

Passo 4 — condizione per muoversi in linea retta (b). Per attraversare senza deriva la componente della velocità lungo x deve essere nulla: la cellula deve puntare un po' verso monte, di un angolo φ rispetto alla direzione di attraversamento, in modo che la sua componente verso monte annulli la corrente:

$$v_{nuoto} \cdot \sin \varphi = v_{corrente} \quad \rightarrow \quad 70 \cdot \sin \varphi = 40$$

Passo 5 — risolvere per φ. $\sin \varphi = 40 / 70 = 0{,}571 \quad \rightarrow \quad \varphi = \arcsin(0{,}571) =$ **34,8°** verso monte.

Passo 6 — velocità netta di attraversamento (c). Resta solo la componente lungo y, cioè la parte di v_{nuoto} diretta attraverso:

$$v_y = v_{nuoto} \cdot \cos \varphi = 70 \cdot \cos 34{,}8° = 70 \cdot 0{,}821 =$$ **57,4 µm/s**

Controllo. Per Pitagora $v_y = \sqrt{(70^2 - 40^2)} = \sqrt{3300} = 57{,}4$ µm/s: lo stesso valore.

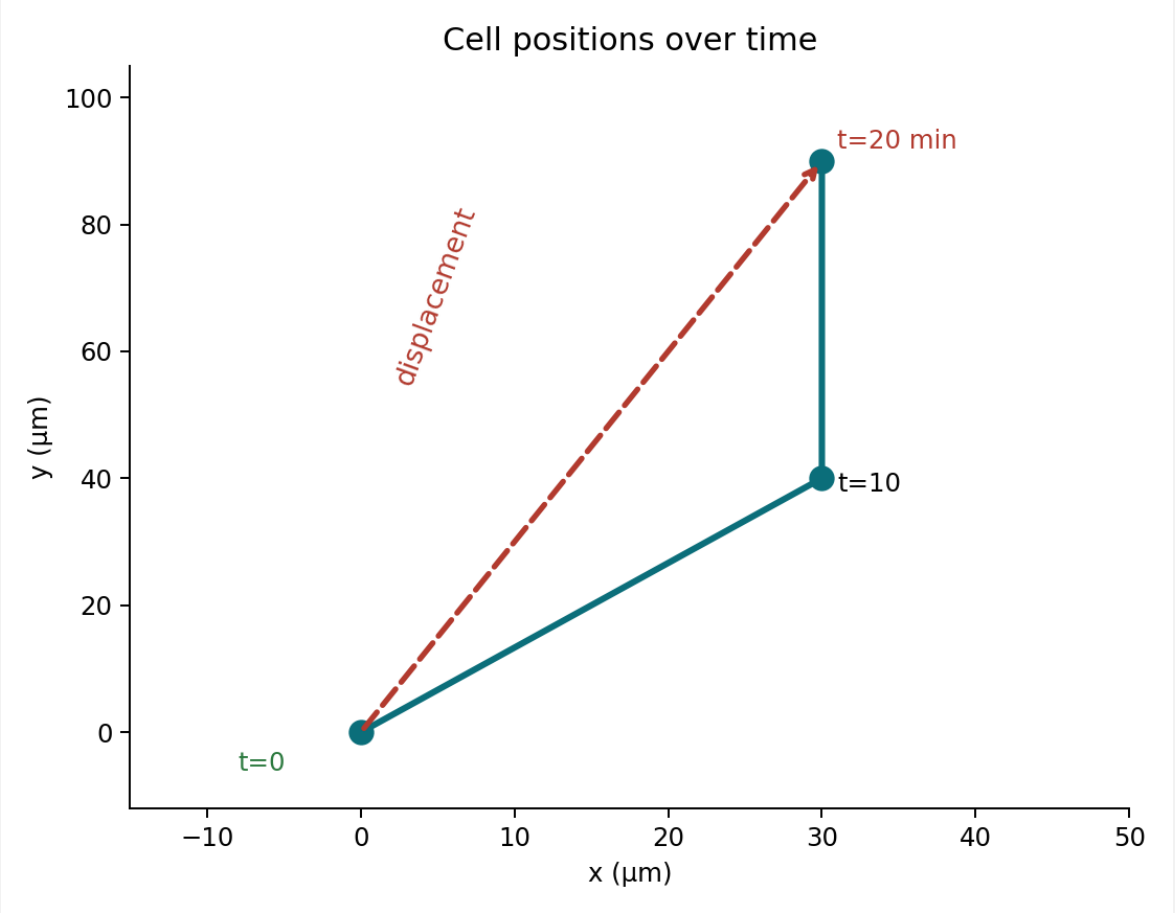
Significato: 57,4 < 70 µm/s. Per compensare la corrente la cellula usa parte della propria velocità, quindi attraversa più lentamente (ma in linea retta).

Esercizio 2 — un tracciato di migrazione cellulare

Una cellula si trova in (0,0) µm, poi in (30,40) a t=10 min, poi in (30,90) a t=20 min.

Trova (a) la lunghezza totale del percorso; (b) lo spostamento netto;

(c) rapidità media e velocità media; (d) la direzionalità.



Esercizio 2 — soluzione (a–b)

Passo 1 — spostamenti dei due tratti. Si calcolano i vettori spostamento $\Delta r = r_{finale} - r_{iniziale}$:

tratto 1: $\Delta r_1 = (30 - 0, 40 - 0) = (30, 40)$ µm tratto 2: $\Delta r_2 = (30 - 30, 90 - 40) = (0, 50)$ µm

Passo 2 — lunghezza di ogni tratto (a). Il modulo di un vettore con componenti (x, y) è $\sqrt{(x^2 + y^2)}$:

$|\Delta r_1| = \sqrt{(30^2 + 40^2)} = \sqrt{(900 + 1600)} = 50$ µm $|\Delta r_2| = \sqrt{(0^2 + 50^2)} = 50$ µm

Passo 3 — percorso totale (a). Il percorso è la somma delle lunghezze dei tratti (è una grandezza scalare, sempre positiva):

percorso = 50 + 50 = **100 µm**

Passo 4 — spostamento netto (b). Conta solo il punto di partenza e quello di arrivo, non la strada fatta: $\Delta r = (30, 90) - (0, 0) = (30, 90)$ µm. Il suo modulo:

$|\Delta r| = \sqrt{(30^2 + 90^2)} = \sqrt{(900 + 8100)} = \sqrt{9000} =$ **94,9 µm**

Osserva: $|\Delta r| = 94{,}9$ µm è minore del percorso (100 µm), perché la traiettoria ha una svolta.

Esercizio 2 — soluzione (c–d)

Passo 5 — rapidità media (c). La rapidità media usa il percorso (scalare); l'intervallo di tempo è Δt = 20 min:

rapidità media = percorso / Δt = 100 / 20 = **5,0 µm/min**

Passo 6 — velocità media (c). La velocità media è un vettore: spostamento netto diviso il tempo. Il suo modulo:

$|v_{media}| = |\Delta r| / \Delta t = 94{,}9 / 20 =$ **4,7 µm/min**

Direzione: tan θ = 90 / 30 = 3 → θ = 71,6° rispetto all'asse x.

Passo 7 — direzionalità (d). È il rapporto tra spostamento netto e percorso: D = |Δr| / percorso.

D = 94,9 / 100 = **0,95**

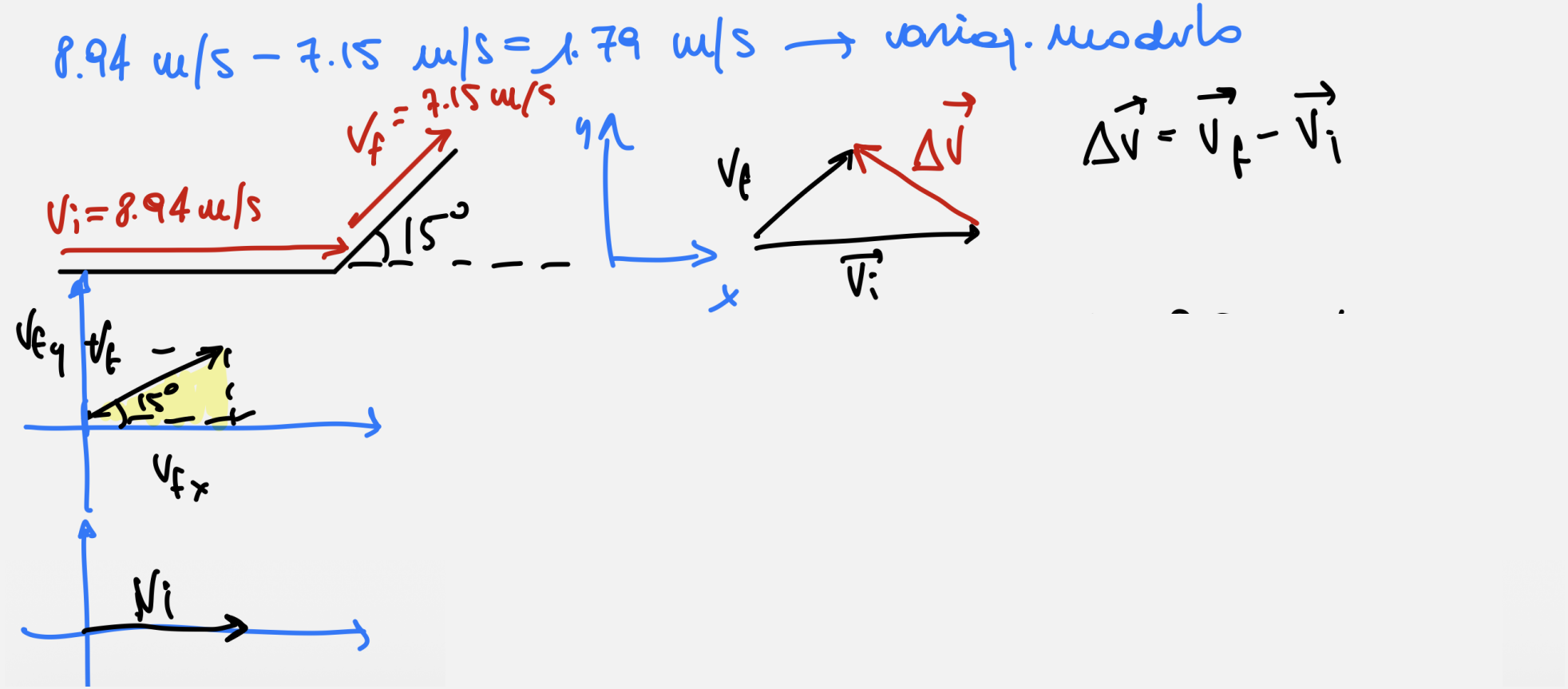
Significato: D è compreso tra 0 e 1. D = 1 indica un moto perfettamente rettilineo; D vicino a 0 un moto casuale che ritorna su se stesso. Qui D = 0,95: la cellula si muove in modo quasi diretto.

Esercizio 5

Un pattinatore si muove lungo una strada pianeggiante con una velocità di 8,94 m/s; dopo 120,0 s la strada comincia a essere in salita (con un'inclinazione di 15°) e il pattinatore mantiene una velocità di 7,15 m/s.

(a) Qual è la variazione della velocità del pattinatore?

(b) Qual è l'accelerazione media del pattinatore nell'intervallo di tempo di 120 s?



Esercizio 5 — soluzione (a)

Passo 1 — impostare il problema. La velocità è un vettore: la sua variazione è la differenza fra vettori $\Delta v = v_f - v_i$, non la differenza fra i moduli. Si prende x lungo la strada pianeggiante e y verso l'alto. Dati: $v_i = 8{,}94$ m/s (orizzontale); $v_f = 7{,}15$ m/s a 15° sopra l'orizzontale; $\Delta t = 120$ s.

Passo 2 — componenti iniziali. La velocità iniziale è tutta lungo x:

$v_{ix} = 8{,}94$ m/s $\qquad v_{iy} = 0$

Passo 3 — componenti finali. Si proietta v_f sugli assi con $\theta = 15°$:

$v_{fx} = v_f \cos\theta = 7{,}15 \cdot 0{,}966 = 6{,}91$ m/s $\qquad v_{fy} = v_f \sin\theta = 7{,}15 \cdot 0{,}259 = 1{,}85$ m/s

Passo 4 — variazione di velocità (a). Si sottraggono le componenti:

$\Delta v_x = 6{,}91 - 8{,}94 = -2{,}03$ m/s $\qquad \Delta v_y = 1{,}85 - 0 = +1{,}85$ m/s

$|\Delta v| = \sqrt{(2{,}03^2 + 1{,}85^2)} =$ **2,75 m/s** $\qquad \theta = \arctan(1{,}85 / 2{,}03) = 42°$ sopra l'asse −x (cioè 138° rispetto a +x)

Esercizio 5 — soluzione (b)

Dal punto (a): $\Delta v = (-2{,}03\ ;\ +1{,}85)$ m/s, $|\Delta v| = 2{,}75$ m/s, $\Delta t = 120$ s.

Passo 5 — accelerazione media (b). $a_m = \Delta v / \Delta t$, componente per componente:

$a_x = -2{,}03 / 120 = -0{,}0169$ m/s² $a_y = 1{,}85 / 120 = +0{,}0154$ m/s² $|a| = 2{,}75 / 120 =$ **0,023 m/s²**

Passo 6 — controllo. La differenza dei moduli è 8,94 − 7,15 = 1,79 m/s (variazione del modulo): non coincide con $|\Delta v| = 2{,}75$ m/s, perché cambia anche la direzione. L'accelerazione media ha la stessa direzione di Δv (indietro e verso l'alto).

Significato: l'accelerazione è piccola (≈ 0,002 g) perché la variazione avviene in 120 s; ma la velocità cambia sia in modulo sia in direzione, e va trattata come vettore.