## Cinematica II — moti particolari (accelerato, del proiettile, circolare)

- Moto rettilineo uniforme
- Moto rettilineo uniformemente accelerato
- Caduta dei gravi
- Moto del proiettile
- Moto circolare uniforme

# Moti particolari in laboratorio e nel corpo

I moti standard della fisica compaiono in tutta la biotecnologia e la fisiologia.

Moto uniformemente accelerato + attrito viscoso → una particella si stabilizza a una velocità limite (sedimentazione).

Moto del proiettile → goccioline cariche vengono deviate per separare le cellule in un citofluorimetro a flusso.

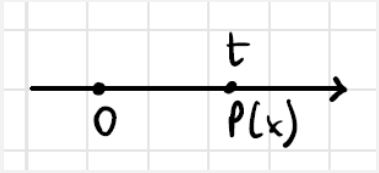
Moto circolare uniforme → il rotore rotante di una centrifuga, e il sangue in un vaso curvo.

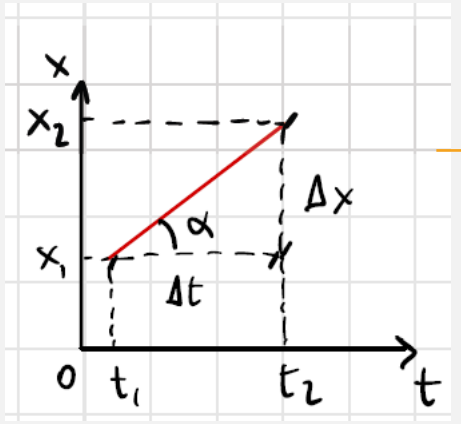
La caduta libera e l'accelerazione costante descrivono anche la fisica della caduta e dell'impatto.

# MOTO RETTILINEO UNIFORME

Moto di una particella con velocità costante: $\vec{v} = cost$

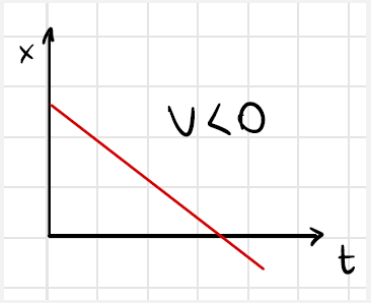
In ogni punto l'accelerazione è nulla: $\vec{a} = 0$




$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \tan\alpha > 0$$

La pendenza della retta rappresenta la velocità della particella




Consideriamo $t_1$ l'istante iniziale ($t_1 = 0$) e $t_2$ un istante generico ($t_2 = t$), $x_0$ l'ascissa della posizione iniziale e $x_2$ una posizione generica ($x_2 = x$)

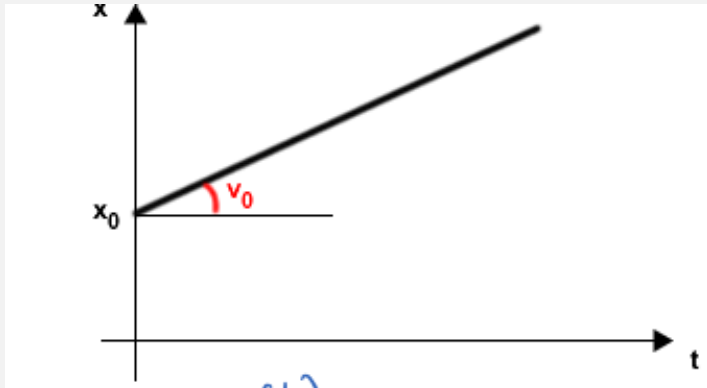
$x - x_0 = vt \rightarrow \Delta x = v\Delta t$

Equazione della posizione nel moto rettilineo uniforme

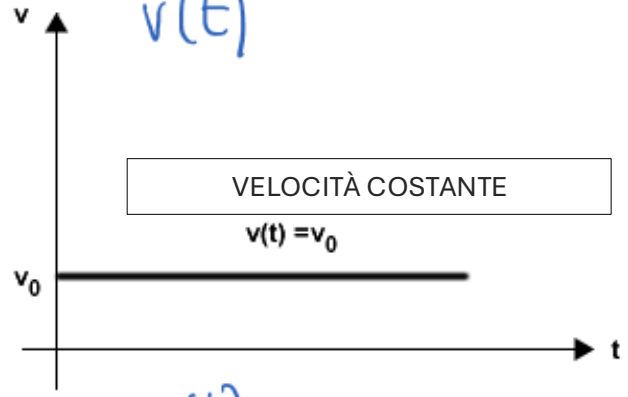
$$x = x_0 + vt$$

$$\Delta x = v\Delta t$$

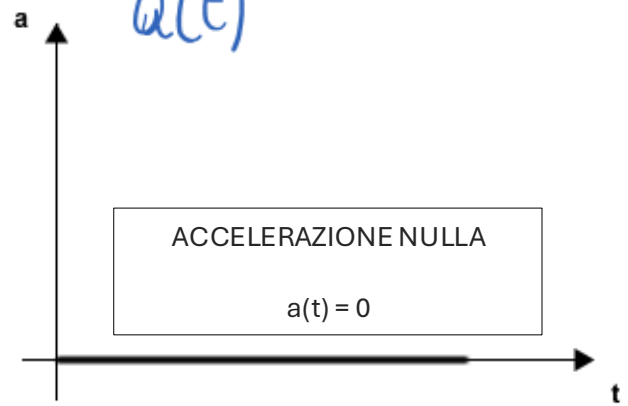
x(t)




v(t)

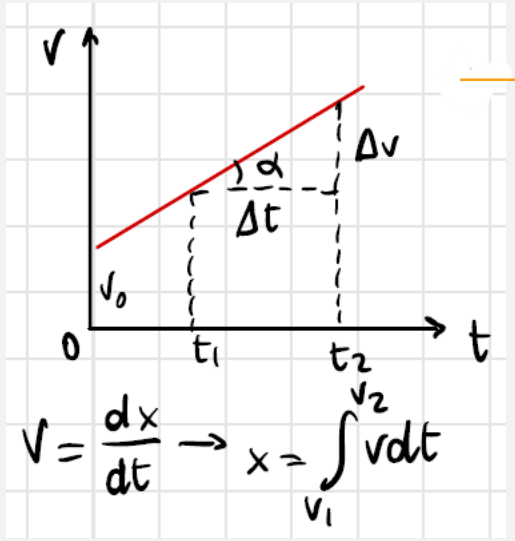



a(t)



# MOTO RETTILINEO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

Moto di una particella con accelerazione costante: $\vec{a} = cost$




$a = \tan\alpha > 0$ ⍰moto accelerato

La pendenza della retta rappresenta la velocità della particella

Prima equazione fondamentale:

$$a_m = a = \frac{v - v_0}{t - 0}$$

$t_0 = 0$

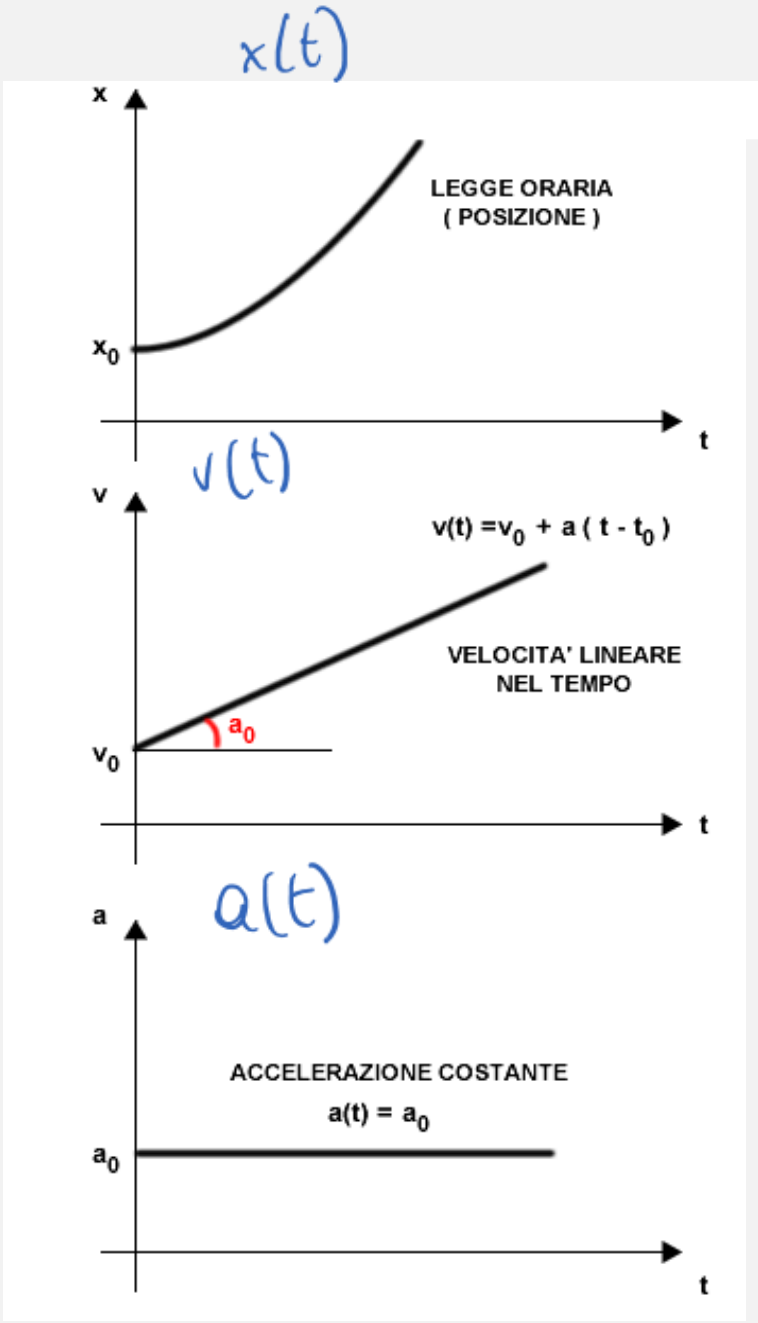
Prima equazione della cinematica

$$v = v_0 + at$$

Seconda equazione fondamentale:

$$v_m = \frac{x - x_0}{t - 0}$$

$$x = x_0 + v_m t$$



# MOTO RETTILINEO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \rightarrow \Delta v = a\Delta t$$

$$\Delta v = v_2 - v_1 \rightarrow v_2 = v_1 + \Delta v = v_1 + a\Delta t$$

$$\Delta v = v - v_0 \rightarrow v = v_0 + \Delta v = v_0 + a\Delta t$$

Un corpo che si muove con velocità $v_1$ all'istante $t_1$ e viene accelerato con $a$ costante raggiungerà la velocità $v_2 = v_1 + a(t_2 - t_1)$ all'istante $t_2$

$$v_m = \frac{v_0 + v}{2}$$

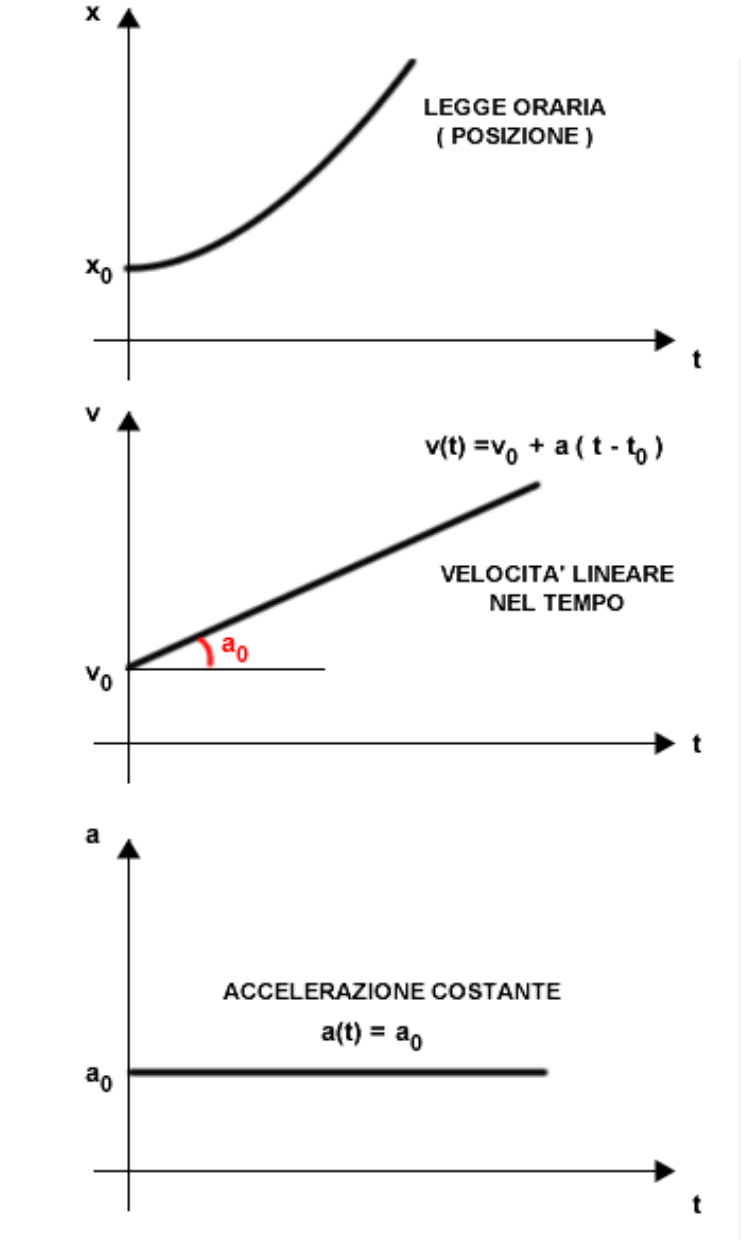
$$\Delta x = v_m \Delta t = \frac{1}{2}(v_0 + v)(t - t_0) = \frac{1}{2}(v_0 + v)\Delta t$$

$$v = v_0 + a\Delta t \rightarrow \Delta x = \frac{1}{2}(v_0 + v_0 + a\Delta t)\Delta t = \frac{1}{2}(2v_0\Delta t) + \frac{1}{2}a\Delta t^2$$

Seconda equazione della cinematica

$$\Delta x = v_0\Delta t + \frac{1}{2}a\Delta t^2$$

$$x = x_0 + v_0\Delta t + \frac{1}{2}a\Delta t^2$$



# MOTO RETTILINEO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

Relazioni matematiche importanti

$$\Delta v = v_f - v_i = a\Delta t$$

Quarta equazione della cinematica

$$\Delta x = \frac{1}{2}(v_f + v_i)\Delta t$$

$$\Delta x = v_i \Delta t + \frac{1}{2} a (\Delta t)^2$$

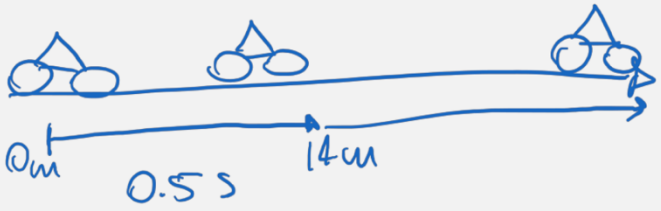
Terza equazione della cinematica

$$v_f^2 - v_i^2 = 2a\Delta x$$

# MOTI PARTICOLARI

## Esempio

Distanza di frenata. Calcola la distanza totale di arresto per una velocità iniziale di 28 m/s, assumendo che l'accelerazione di un'automobile sia a=-6,0 m/s$^2$. Assumi che il tempo di reazione sia 0,50 s.




$v = \text{cost} = 28\ m/s$ $\quad a = \text{cost} = -6\ m/s^2$

$a = 0\ m/s^2$ $\quad v_i = 28\ m/s$

$t = 0.5\ s$ $\quad v_f = 0\ m/s$

① $t = 0.5\ s$

$v_i = 28\ m/s$

$v_f = 28\ m/s$

$a = 0\ m/s^2$

$x_i = 0\ m$

$\rightarrow \Delta x = v\Delta t$

$x_f - x_i = v(t_f - t_i)$

$x_f = v \cdot t_f$

$x_f = 28\ m/s \cdot 0.5\ s = 14\ m$

② $x_f$?

$x_i = 14\ m$

$v_i = 28\ m/s$

$v_f = 0\ m/s$

$a = -6\ m/s^2$

$\rightarrow v_f^2 - v_i^2 = 2a\Delta x$

$v_f^2 - v_i^2 = 2a(x_f - x_i) \rightarrow$

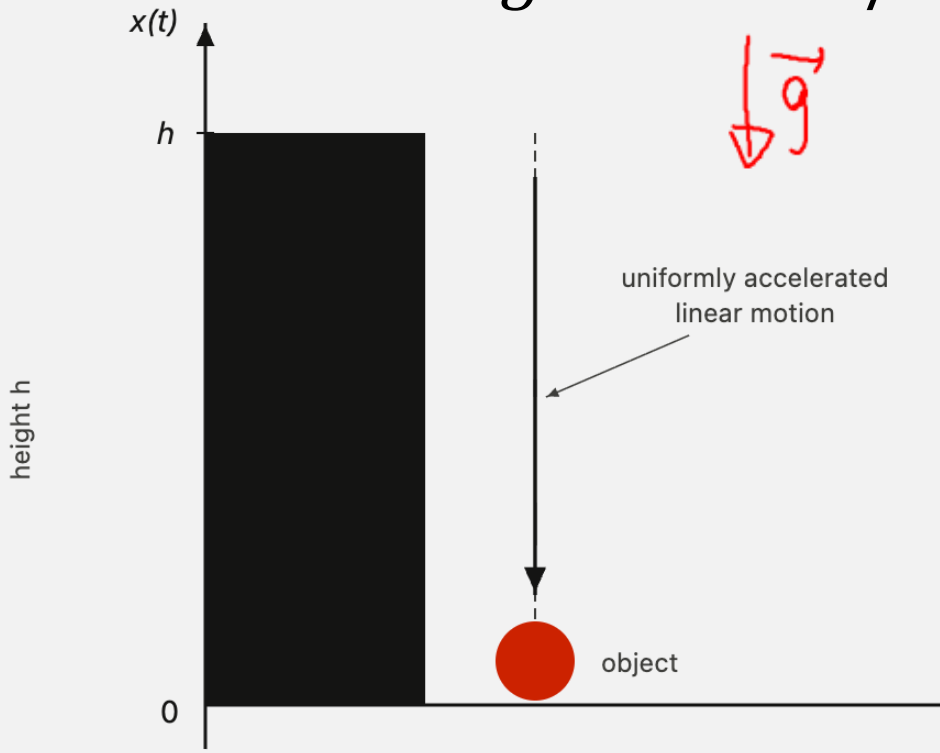
$x_f - x_i = \dfrac{v_f^2 - v_i^2}{2a} \rightarrow x_f = x_i + \dfrac{v_f^2 - v_i^2}{2a}$

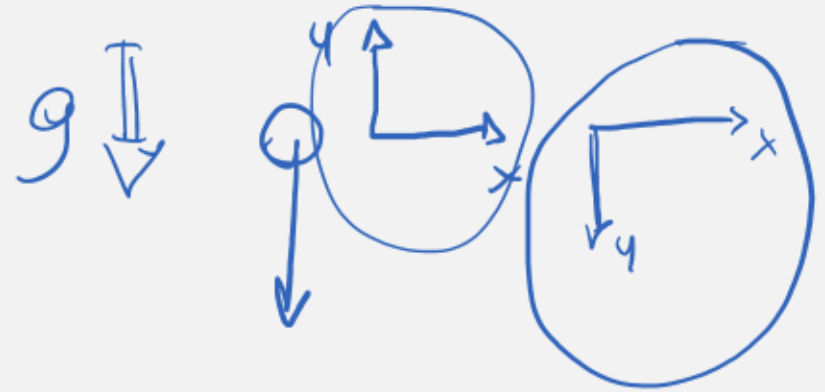
$= 14\ m + \dfrac{0\ m^2/s^2 - (28\ m/s)^2}{2(-6\ m/s^2)}$

$\leftarrow$ 79 m

# CADUTA DEI GRAVI

$$\vec{g} = 9.80\, m/s^2$$



$$\Delta h = h_f - h_i = v_i \Delta t + \frac{1}{2} g \Delta t^2$$

$$h_f - h_i = v_i (t_f - t_i) + \frac{1}{2} g (t_f - t_i)^2$$

1

$$h_f = h_i + v_i t_f + \frac{1}{2} g t_f^2$$

$$v_f^2 - v_i^2 = 2g\Delta h \longrightarrow v_f^2 = v_i^2 + 2g(h_f - h_i) \longrightarrow$$

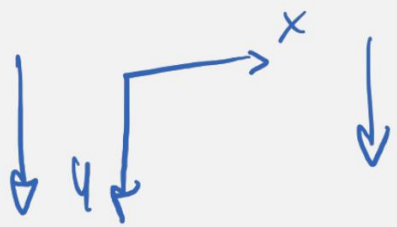
2

$$v_f = \sqrt{v_i^2 + 2g(h_f - h_i)}$$

# CADUTA DEI GRAVI

## Esempio

Supponi che una palla venga lasciata cadere da una torre alta 70 m. Quanto sarà caduta dopo 1 s, 2 s e 3 s? Assumi h positiva verso il basso e trascura la resistenza dell'aria.

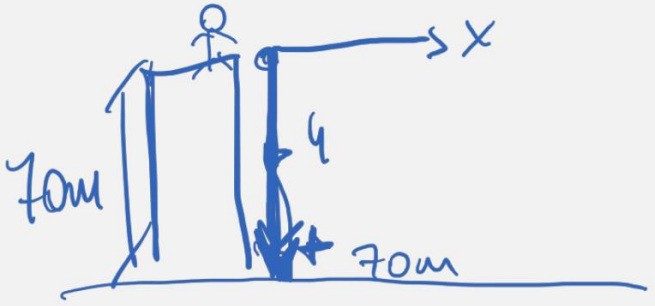



$h_i = 0\,m$

$h_f = 70\,m$

$v_i = 0\,m/s$

$g = 9.8\,m/s^2$




$t_1 = 1\,s$

$t_2 = 2\,s$

$t_3 = 3\,s$

① $h_f = \cancel{h_i} + \cancel{v_i t} + \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} \cdot 9.8\,m/s^2 \cdot 1\,s^2 = 4.9\,m$

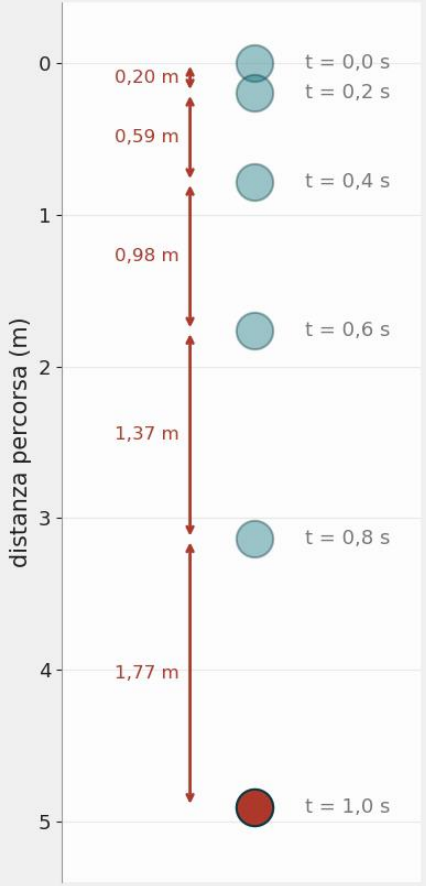
② $h_f = \frac{1}{2} \cdot 9.8\,m/s^2 \cdot (2s)^2 = 19.6\,m$

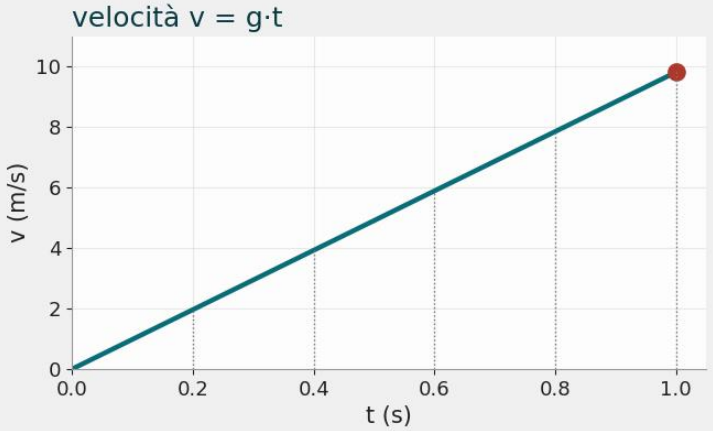
③ $h_f = \frac{1}{2} \cdot 9.8\,m/s^2 \cdot (3s)^2 = 44.1\,m$

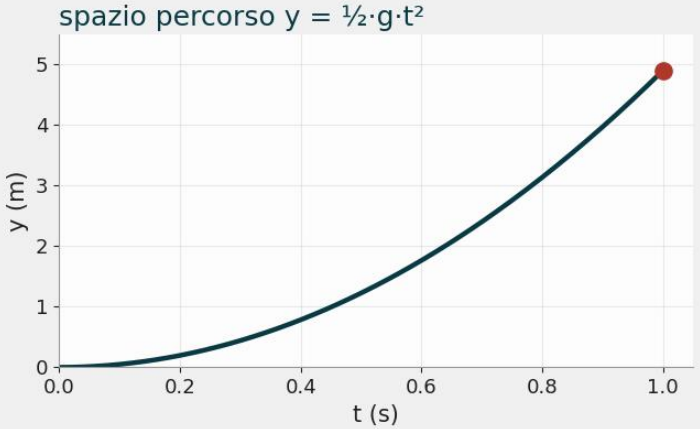
# Animazione — caduta libera e moto accelerato

## Moto uniformemente accelerato: la caduta libera

Una pallina cade da ferma con accelerazione costante  a = g = 9,81 m/s²  (immagini ogni 0,2 s)



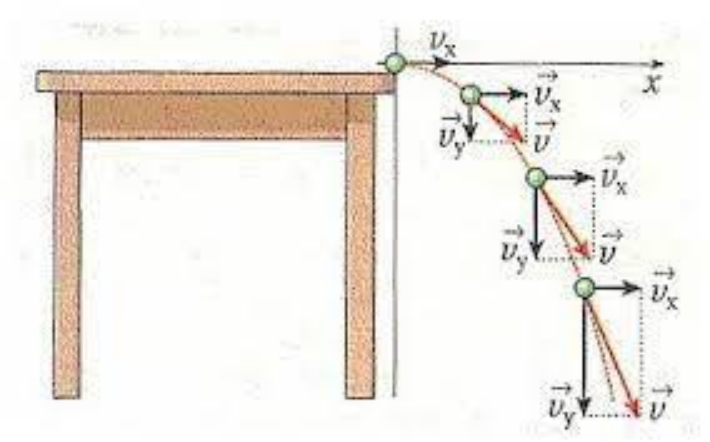

### Quello che osserviamo

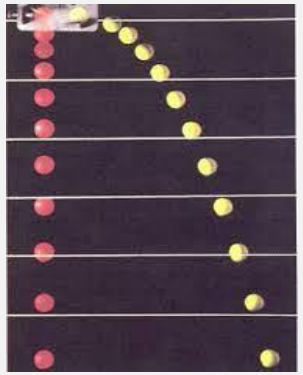
$\Delta v = g \cdot \Delta t = 1{,}96$ m/s
ogni 0,2 s

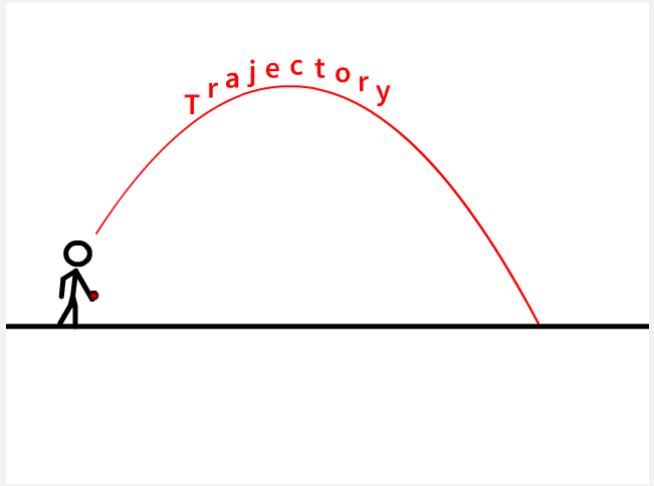
**t = 1,00 s**
**v = 9,81 m/s**
**y = 4,91 m**

Gli spazi percorsi in intervalli uguali stanno come  1 : 3 : 5 : 7 : 9

# MOTO PARABOLICO (O DEL PROIETTILE)






$$\Delta v = v_f - v_i = a\Delta t$$

$$\Delta x = \frac{1}{2}(v_f + v_i)\Delta t$$

$$\Delta x = v_i\Delta t + \frac{1}{2}a(\Delta t)^2$$

$$v_f^2 - v_i^2 = 2a\Delta x$$

ASSE x → $a_x = 0$

$$\Delta v_x = 0 \ (v_x = cost)$$

$$\Delta x = v_x\Delta t$$

ASSE y → $a_y = cost$

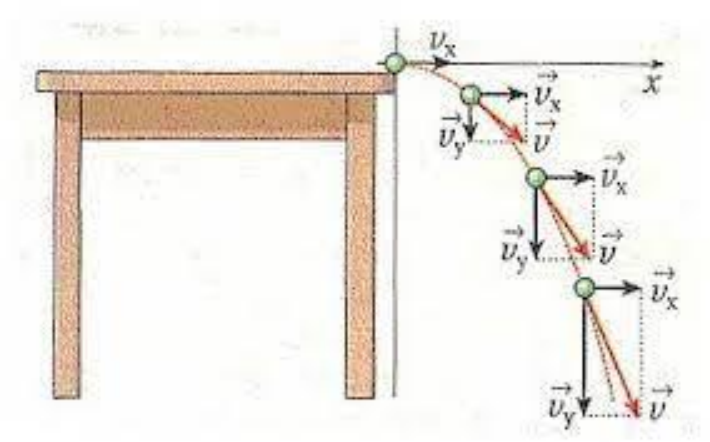
$$\Delta v_y = a_y\Delta t = -g\Delta t$$

$$\Delta y = \frac{1}{2}(v_{fy} + v_{iy})\Delta t$$

$$\Delta y = v_{iy}\Delta t + \frac{1}{2}a_y(\Delta t)^2$$

$$v_{fy}^2 - v_{iy}^2 = 2a_y\Delta y$$

# MOTO PARABOLICO



$\vec{a} = \vec{g}$

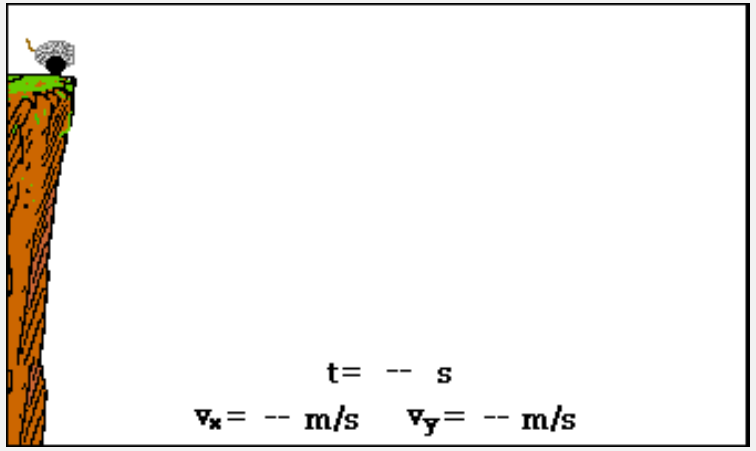
y

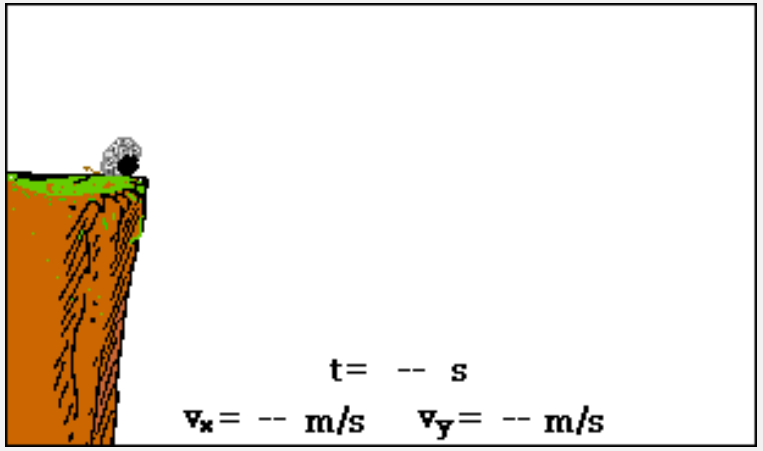
x

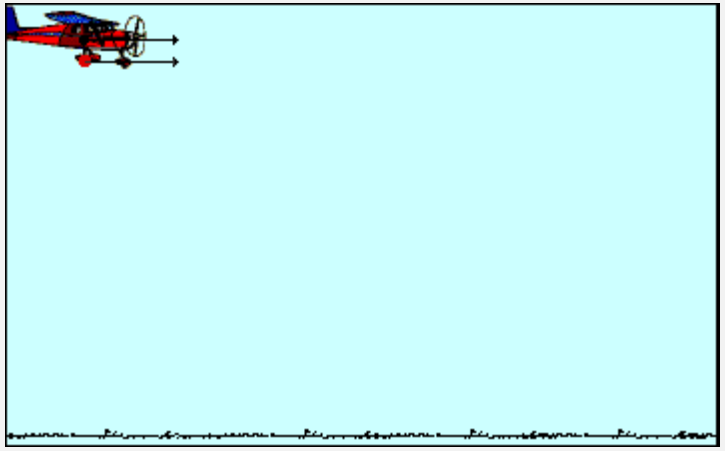
La pallina lascia il tavolo ($t = 0$): la pallina è soggetta all'accelerazione di gravità:
- $v_y$ è inizialmente 0, poi aumenta
- $a_y = g$

$$\Delta v_y = a_y \Delta t \rightarrow v_y = -gt$$

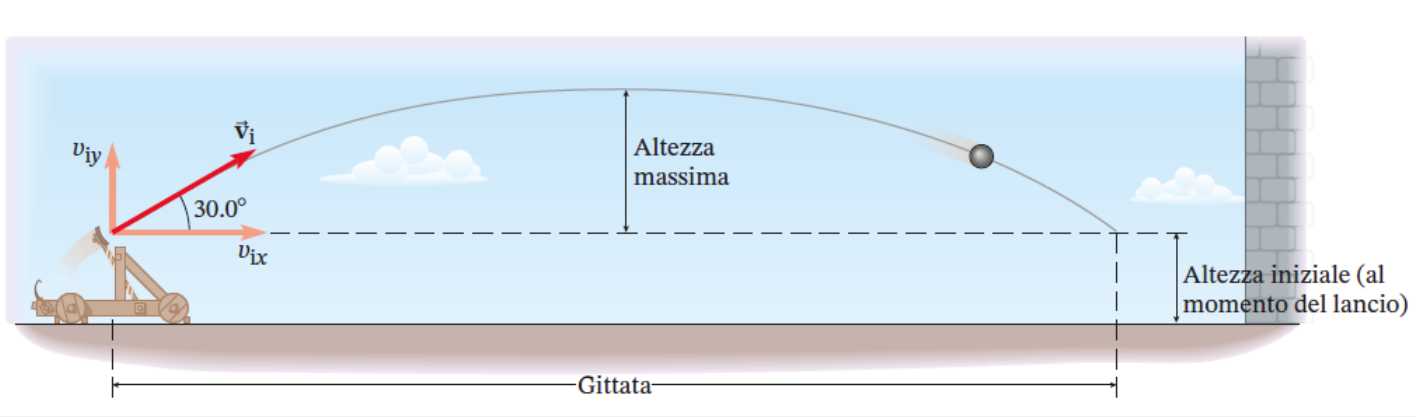
Spostamento verticale (y) → $\Delta y = v_{iy}\Delta t + \frac{1}{2}a_y(\Delta t)^2 \rightarrow \Delta y = -\frac{1}{2}g(\Delta t)^2$ (ponendo yi=0)

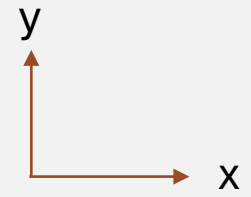


# MOTO PARABOLICO

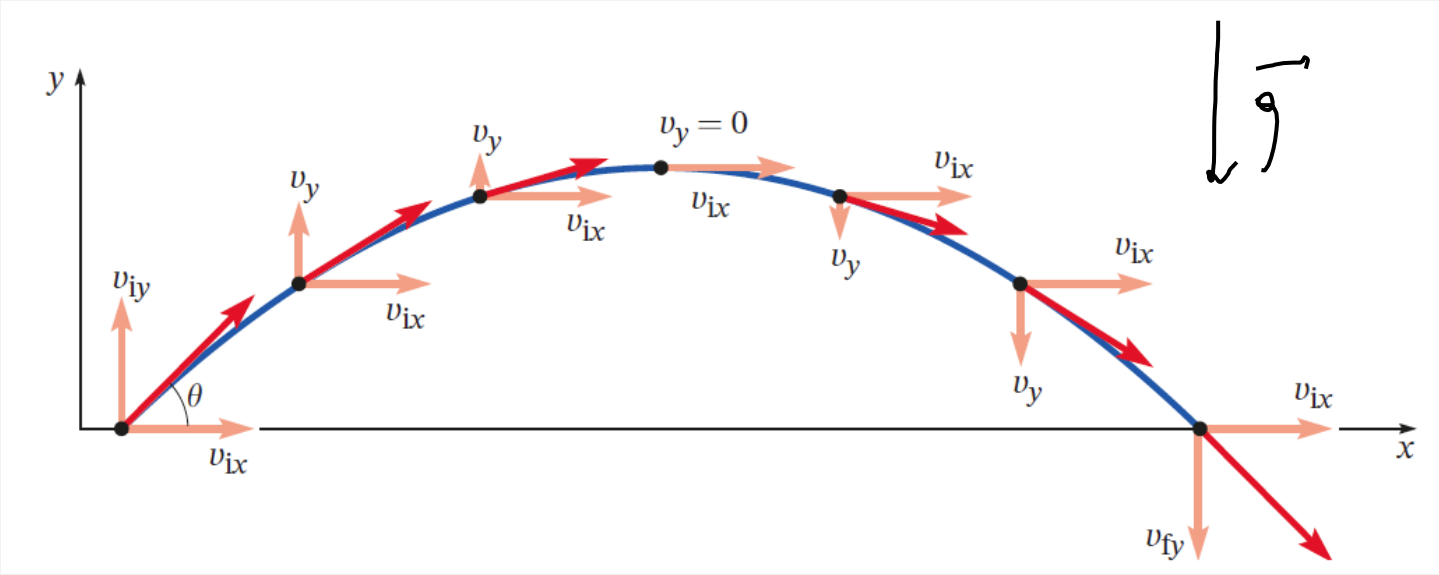



Qui la velocità ha una componente verticale viy

Il corpo è lanciato con una velocità iniziale $\vec{v_i}$ → *che forma un angolo $\theta$ con l'asse orizzontale:*

$$v_{ix} = v_i cos\theta \text{ e } v_{iy} = v_i sin\theta$$

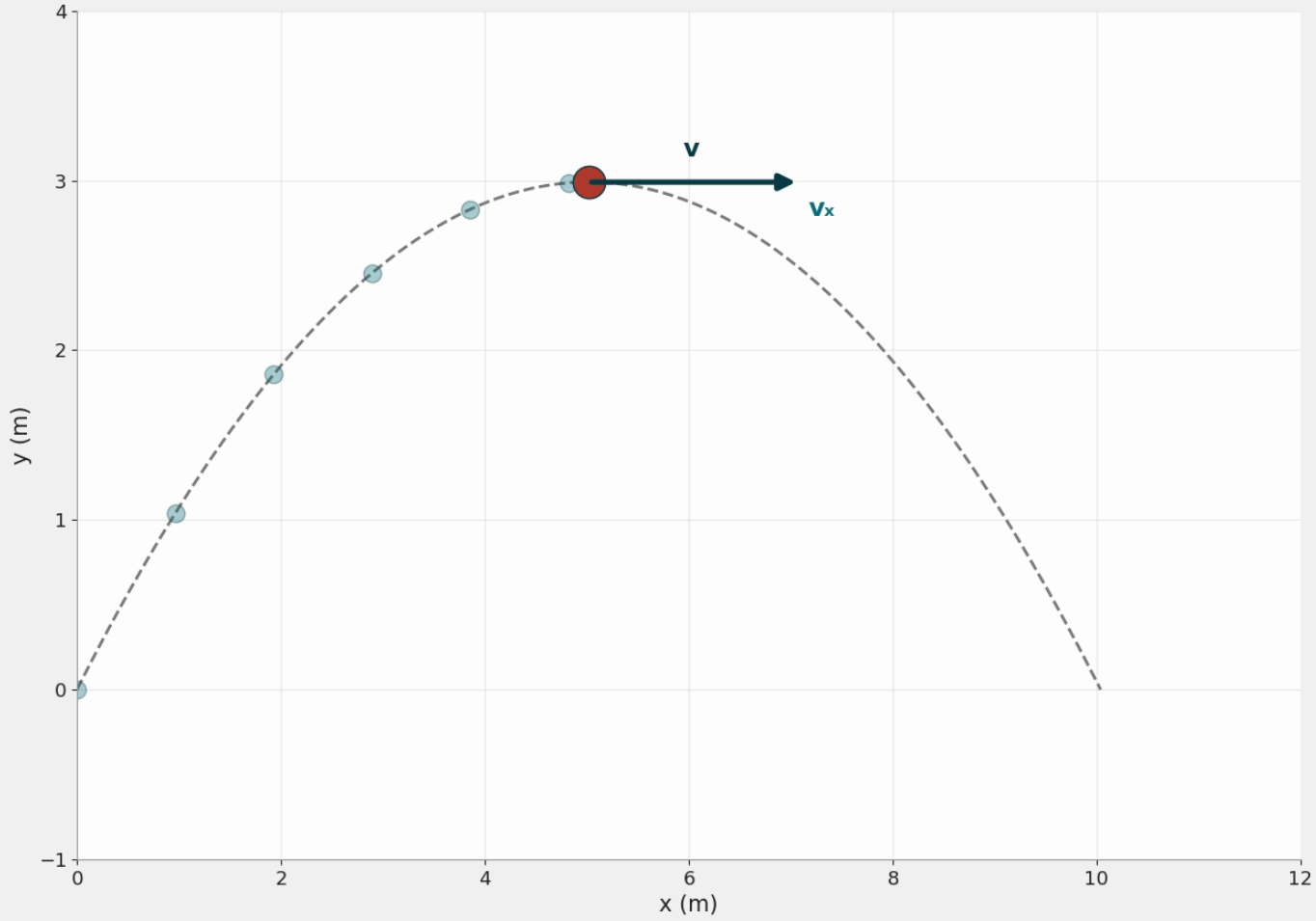



L'angolo $\theta$ è detto angolo di elevazione.
Durante il volo, l'unica forza agente è la forza peso: ax=0 e vx=cost
Vy è inizialmente positiva, diminuisce durante la salita, si annulla all'altezza massima, e infine aumenta in modulo durante la discesa, ma con direzione negativa.

# Animazione — il moto del proiettile

## Moto del proiettile: due moti indipendenti

Orizzontale: moto rettilineo uniforme.  Verticale: moto uniformemente accelerato con a = −g




### Lancio obliquo

$v_0$ = 10 m/s,  θ = 50°

$v_x = v_0 \cos\theta$ = 6,43 m/s (costante)

$v_{y0} = v_0 \sin\theta$ = 7,66 m/s

**t = 0,78 s**

**$v_y = v_{y0} - gt$ = 0,00 m/s**

Al vertice $v_y = 0$:

$y_{max} = v_{y0}^2/2g$ = 3,0 m

# Esempio — il moto del proiettile separa le cellule (citofluorimetria a flusso)

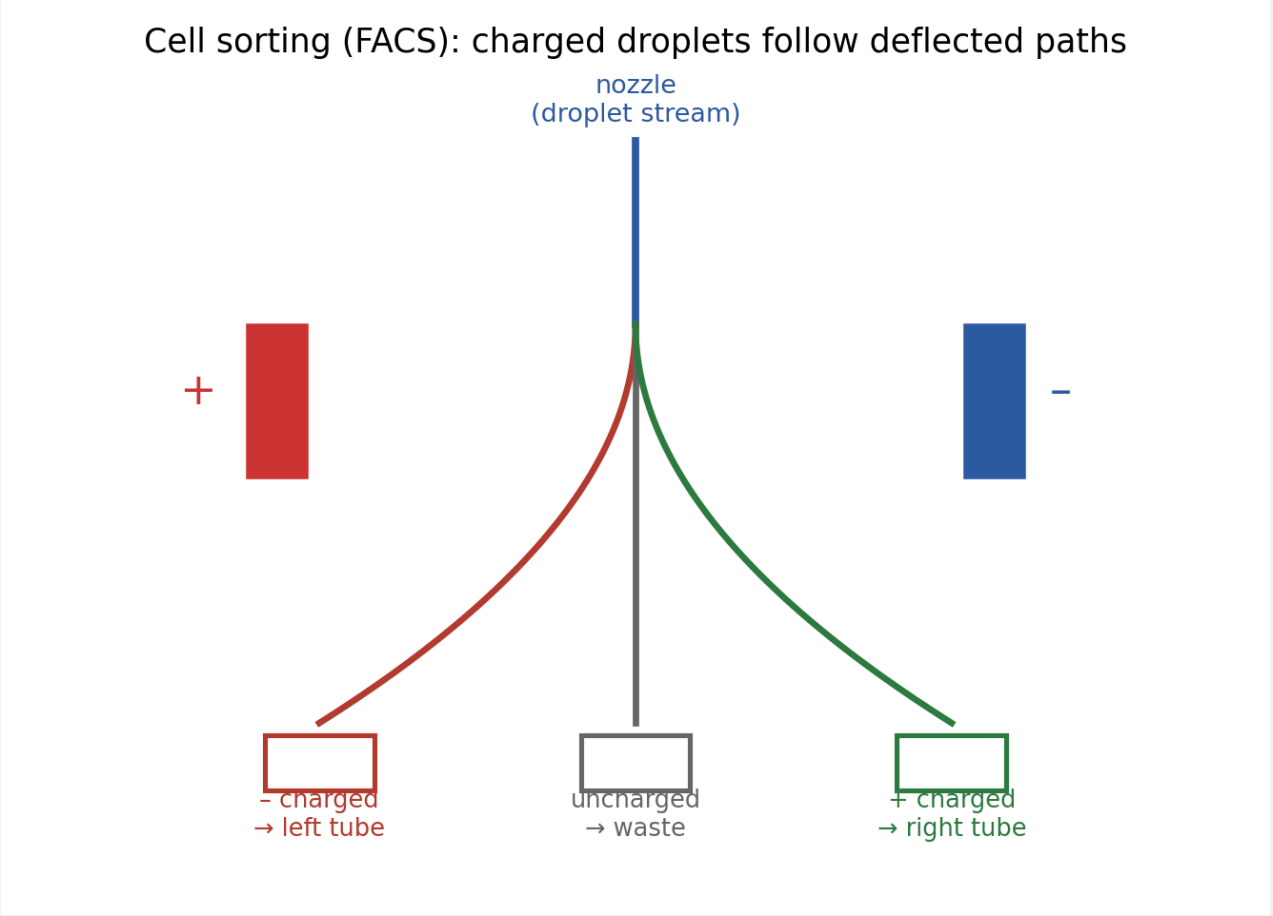
In un separatore cellulare (FACS, Fluorescence-Activated Cell Sorter) il campione si frammenta in minuscole goccioline cariche, ciascuna contenente una cellula.

Tra le piastre cariche ogni gocciolina segue una traiettoria da proiettile — deviazione laterale più caduta verticale:

la forza elettrica genera un'accelerazione laterale; l'inerzia la trascina verso il basso

Le goccioline finiscono in provette diverse a seconda della loro carica — separando le cellule una per una.

Le stesse equazioni del proiettile descrivono la bioprinting a getto d'inchiostro e l'erogazione di goccioline.



# In pratica — un vero separatore cellulare (FACS, Fluorescence-Activated Cell Sorting)

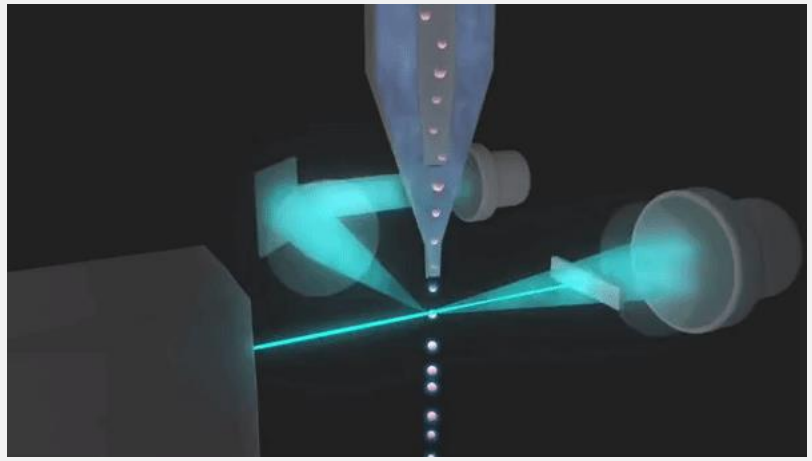
Il flusso si frammenta in decine di migliaia di goccioline al secondo, ciascuna con al massimo una cellula.

Un laser legge ogni cellula; le goccioline selezionate vengono caricate appena prima delle piastre.

**deviazione laterale ∝ (carica × campo) × tempo trascorso tra le piastre**

I separatori moderni purificano milioni di cellule per tipo — per la ricerca e la terapia cellulare.

La stessa fisica delle goccioline è alla base della bioprinting a getto d'inchiostro e 3D.





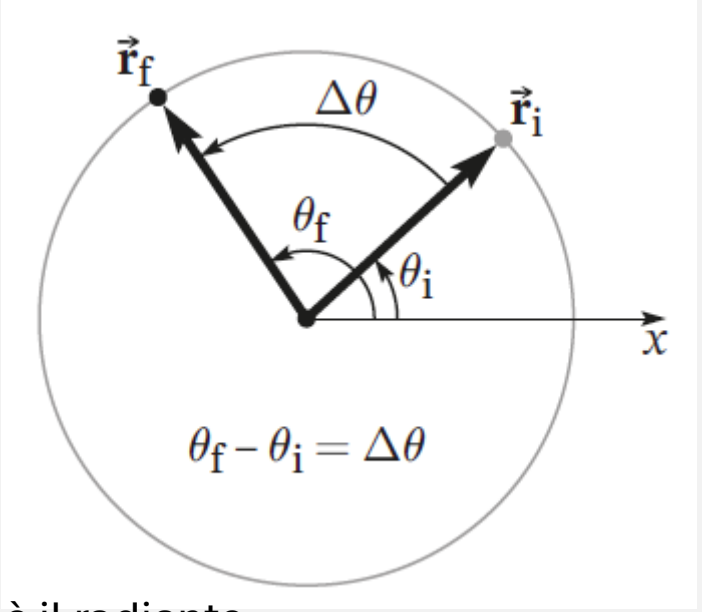
*Separatore cellulare (MoFlo) — CC BY-SA 3.0*

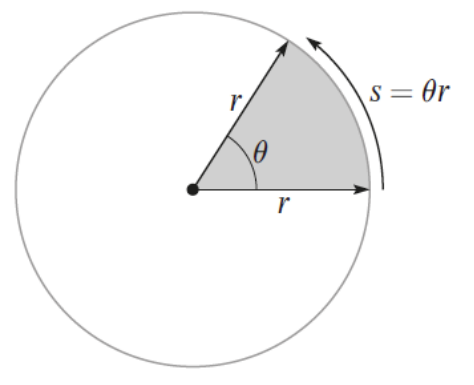
# MOTO CIRCOLARE UNIFORME

Definizione di spostamento angolare: $\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$

Definizione di velocità angolare media: $\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$

Definizione di velocità angolare istantanea: $\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$



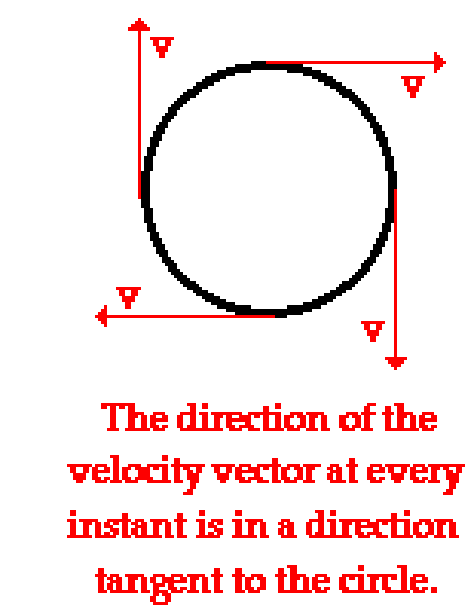

In molte situazioni la misura più conveniente dell'angolo è il radiante.

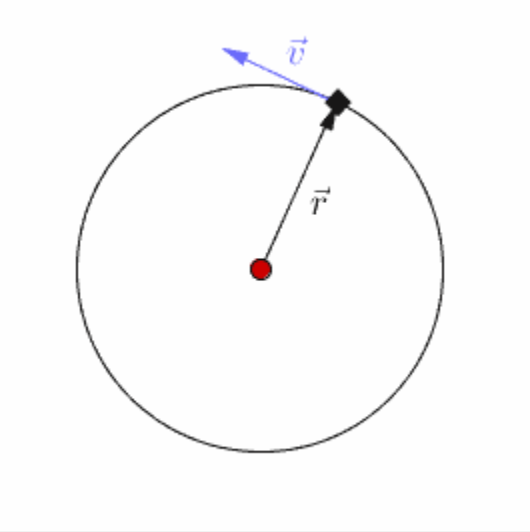
$\theta(in\ radianti) = \frac{s}{r}\theta = \frac{s}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi\ rad$ $\qquad$ $360° = 2\pi\ rad$

Una particella in moto circolare uniforme ha una velocità di modulo costante, mentre la sua direzione varia nel tempo: in ogni istante, la direzione della velocità istantanea è infatti tangente alla traiettoria circolare

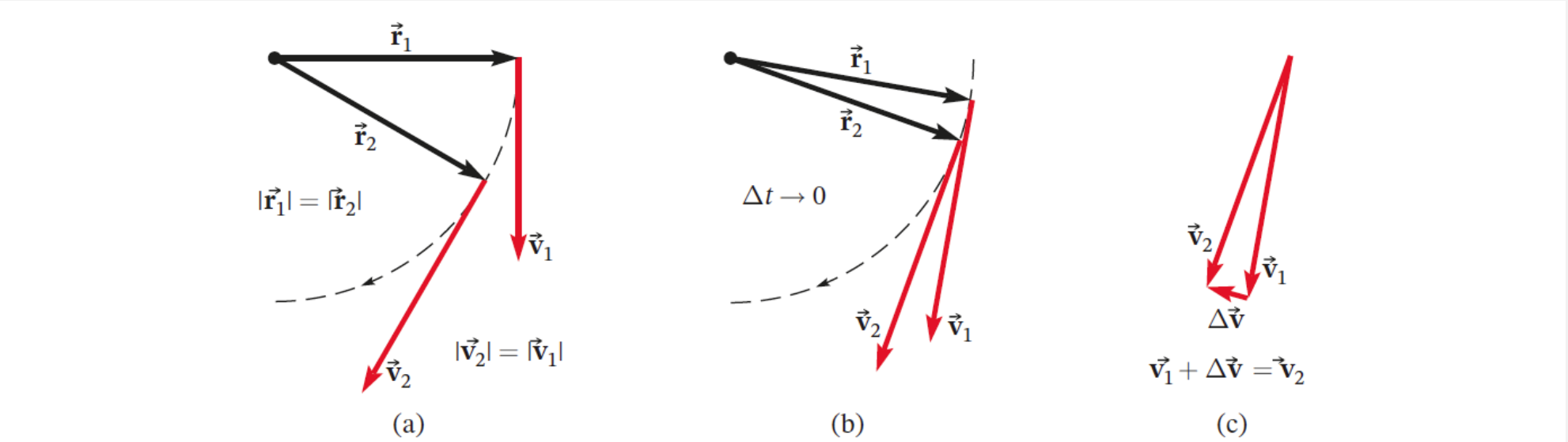
↓

Poiché la direzione della velocità della particella cambia continuamente,
la particella deve possedere un'accelerazione non nulla



# MOTO CIRCOLARE UNIFORME




Porzione di traiettoria circolare di raggio $r$, lungo la quale un corpo puntiforme si muove di moto circolare uniforme. Nei punti considerati i due vettori velocità sono tangenti alla traiettoria e hanno lo stesso modulo

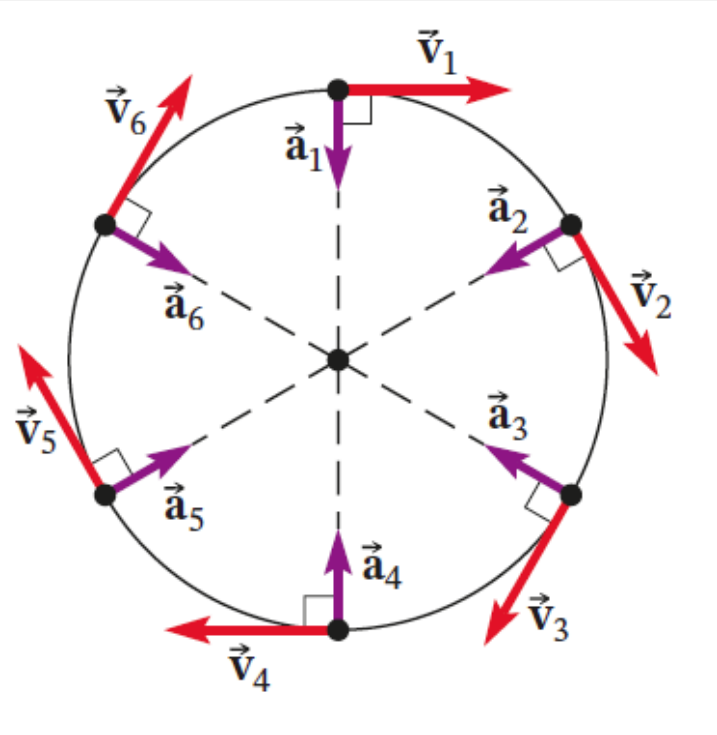
Al diminuire dell'intervallo di tempo tra le due posizioni considerate, i due vettori posizione diventano sempre più vicini

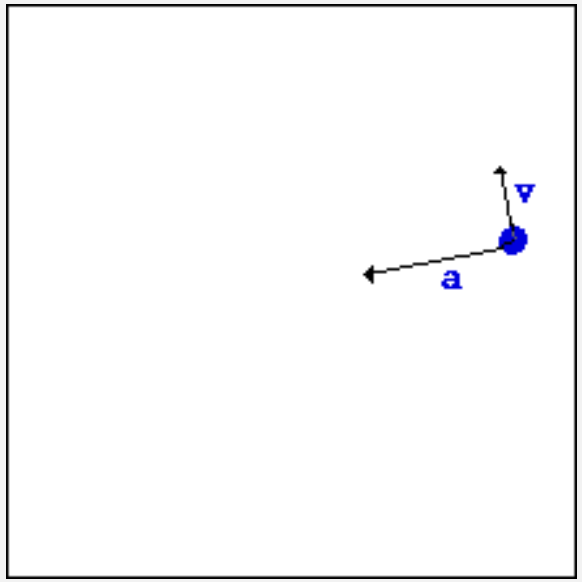
$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Determiniamo la variazione di velocità $\Delta v$ in un piccolo intervallo di tempo. Quando $\Delta t \to 0$, l'angolo tra i due vettori tende a 0 e $\Delta v$ diventa perpendicolare alla velocità stessa.
$\Delta v$ è diretto lungo il raggio della circonferenza e orientato verso il centro

# MOTO CIRCOLARE UNIFORME

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$



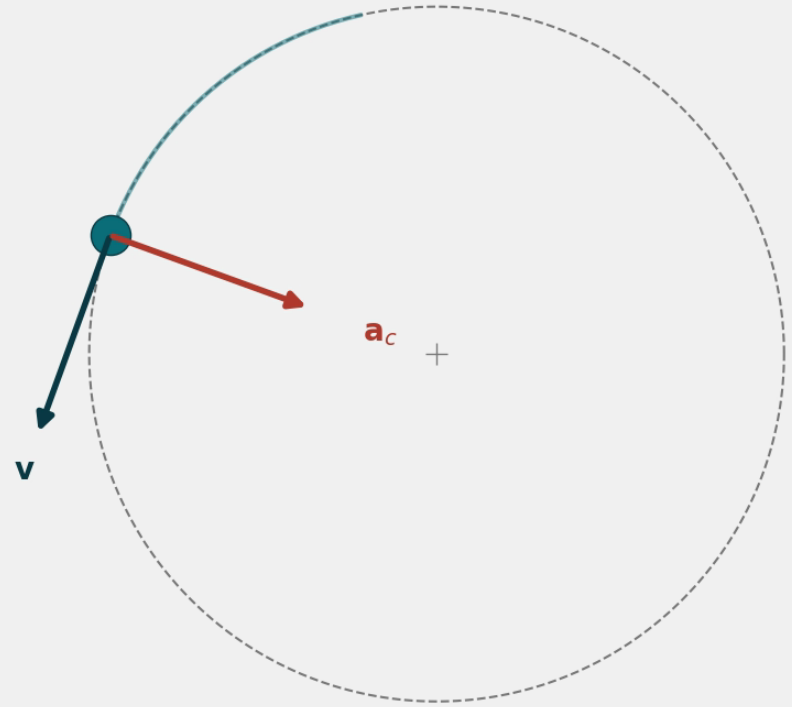



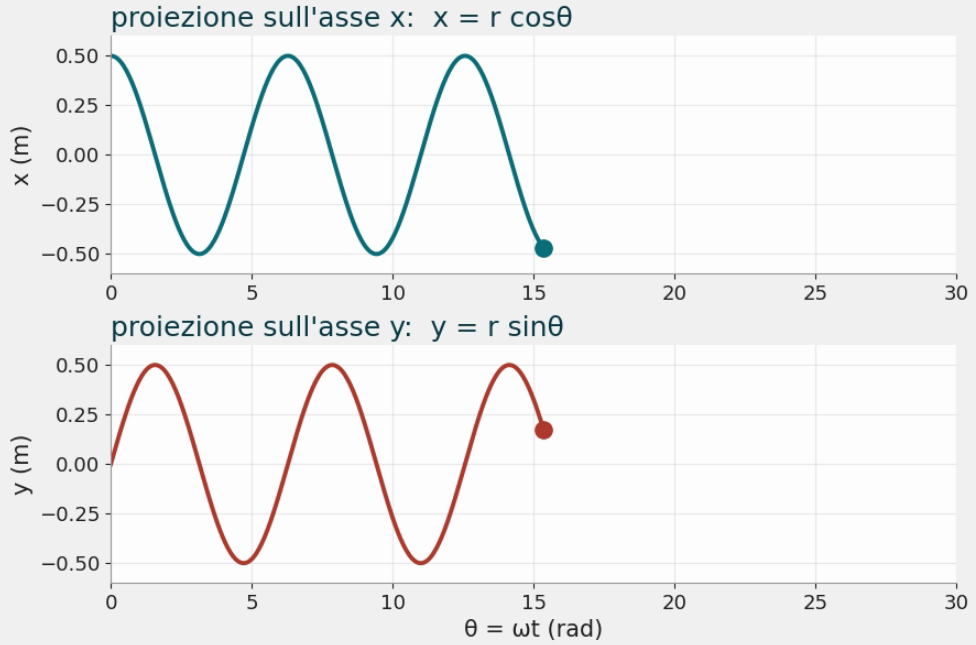

$a$ ha la stessa direzione e lo stesso verso di $\Delta v$ → quindi anche l'accelerazione sarà diretta radialmente verso il centro della circonferenza:
L'accelerazione di un corpo in moto circolare uniforme si chiama accelerazione radiale $\overrightarrow{a_r}$ o accelerazione centripeta

# Animazione — il moto circolare uniforme

## Moto circolare uniforme

Una particella percorre una circonferenza di raggio r = 0,50 m con ω = 2,0 rad/s




**v cambia direzione:**
**c'è un'accelerazione verso il centro**

$a_c = v^2/r = \omega^2 r$ **= 2,0 m/s²**

v e a_c sono sempre perpendicolari:
a_c non cambia il modulo di v

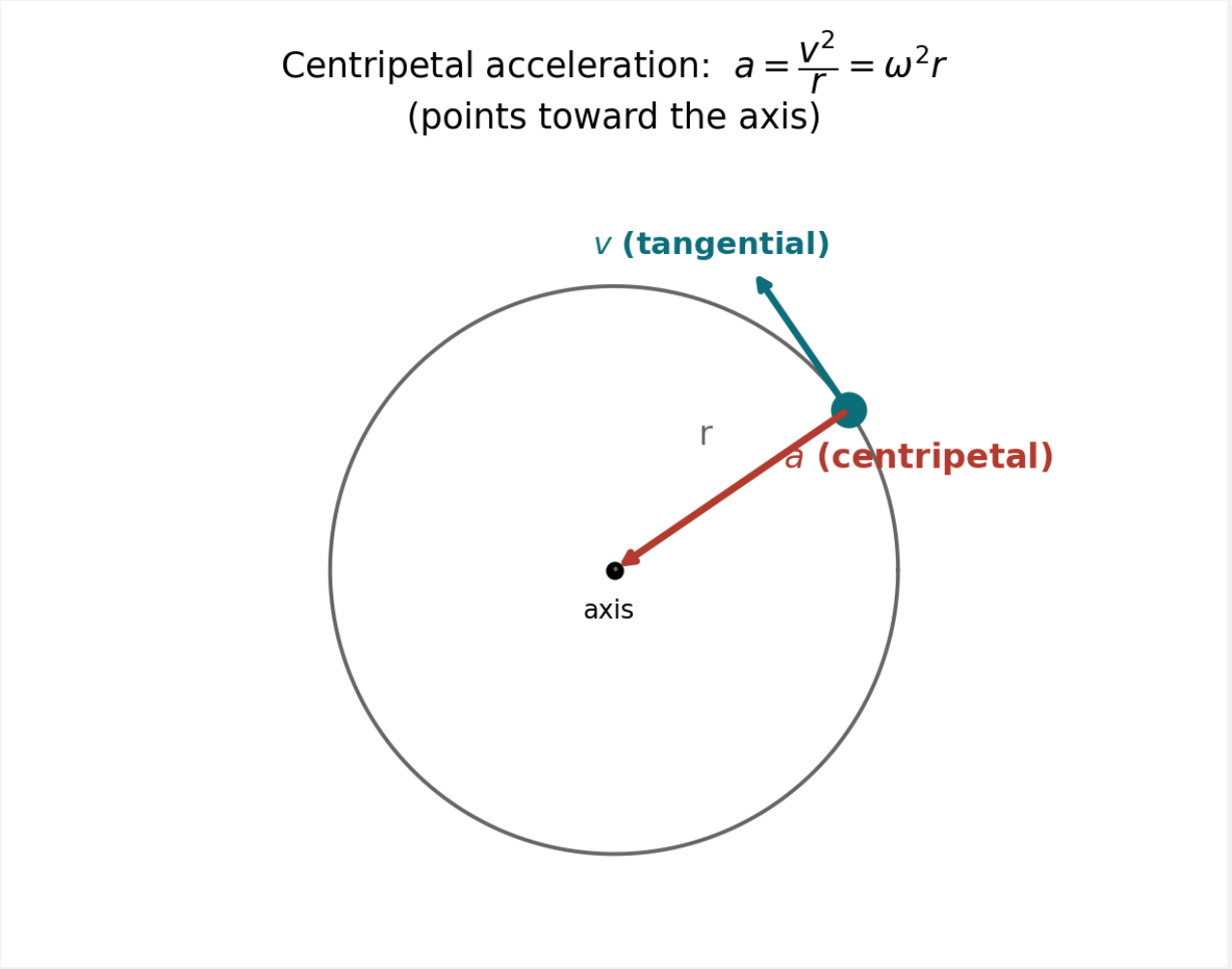
# Esempio — l'accelerazione centripeta in una centrifuga

Un campione fatto ruotare in una centrifuga si muove in cerchio a velocità costante — eppure sta accelerando.

La sua velocità cambia continuamente direzione, dando un'accelerazione verso l'asse:

$$a = v^2/r = \omega^2 r$$

Questa grande accelerazione (migliaia di × g) fa sedimentare le particelle in base alla densità.



# In pratica — la forza g in una centrifuga

Una microcentrifuga a 13 000 rpm con raggio del rotore r = 9 cm:

$$\omega = 2\pi \cdot 13000/60 \approx 1361 rad/s; a = \omega^2 r \approx 1,7 \times 10^5 m/s^2$$

cioè

$$a/g \approx 1,7 \times 10^5 / 9,81 \approx 17000 \times g$$

Un'accelerazione di questo tipo sedimenta cellule e organelli in pochi minuti.

Le ultracentrifughe superano i 100 000 rpm per separare proteine e ribosomi.




*Centrifuga da laboratorio — CC0*

# Esempio — il moto circolare nel rotore di una centrifuga

Le provette in un rotore percorrono cerchi a velocità angolare ω costante.

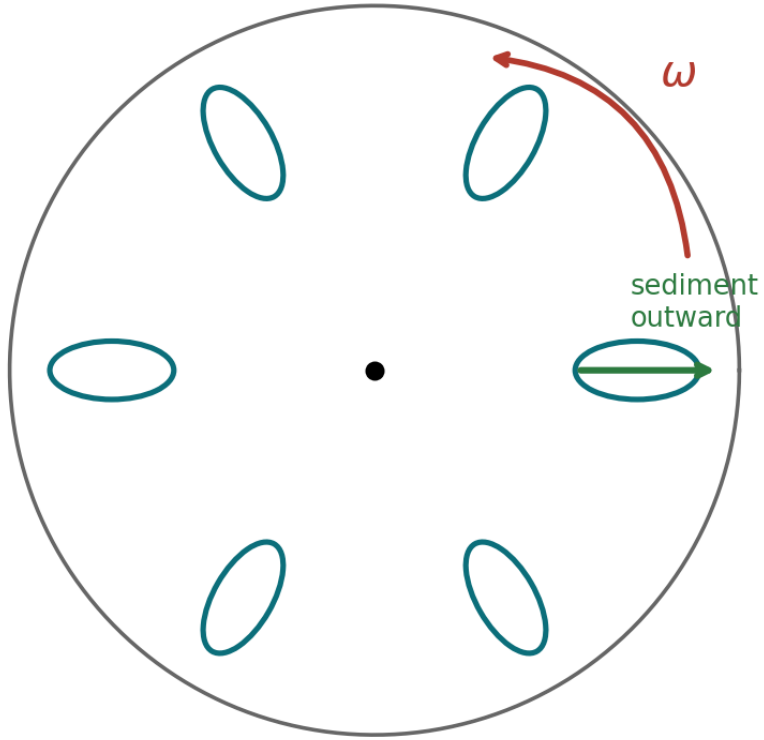
Ogni campione cambia continuamente direzione, quindi accelera verso l'asse (centripeta):

$\omega = 2\pi N / 60$ (dagli rpm), $a = \omega^2 r$

L'effetto centrifugo risultante spinge le particelle verso l'esterno, facendole sedimentare in base alla densità.

Una ω maggiore o un raggio r più grande significano una forza separante più intensa.

Centrifuge rotor (top view): tubes spin at angular velocity ω



# In pratica — scegliere una centrifugazione

I protocolli specificano la forza in × g, non in rpm, così da poter essere trasferiti tra rotori diversi.

**converti con: $RCF = 1{,}118\times10^{-5} \cdot r(cm) \cdot N(rpm)^2$**

Agli stessi rpm, un raggio r maggiore dà una forza maggiore sul fondo della provetta.

La centrifugazione differenziale procede a tappe: prima i nuclei, poi i mitocondri, poi i microsomi.

I rotori a bracci oscillanti rispetto a quelli ad angolo fisso cambiano la lunghezza del percorso di sedimentazione.



*Rotore di ultracentrifuga — Cygaretka, CC BY-SA 3.0*

# Moto circolare non uniforme

Se la velocità angolare cambia nel tempo si introduce l'accelerazione angolare: **$\alpha = d\omega/dt$** (rad/s$^2$).

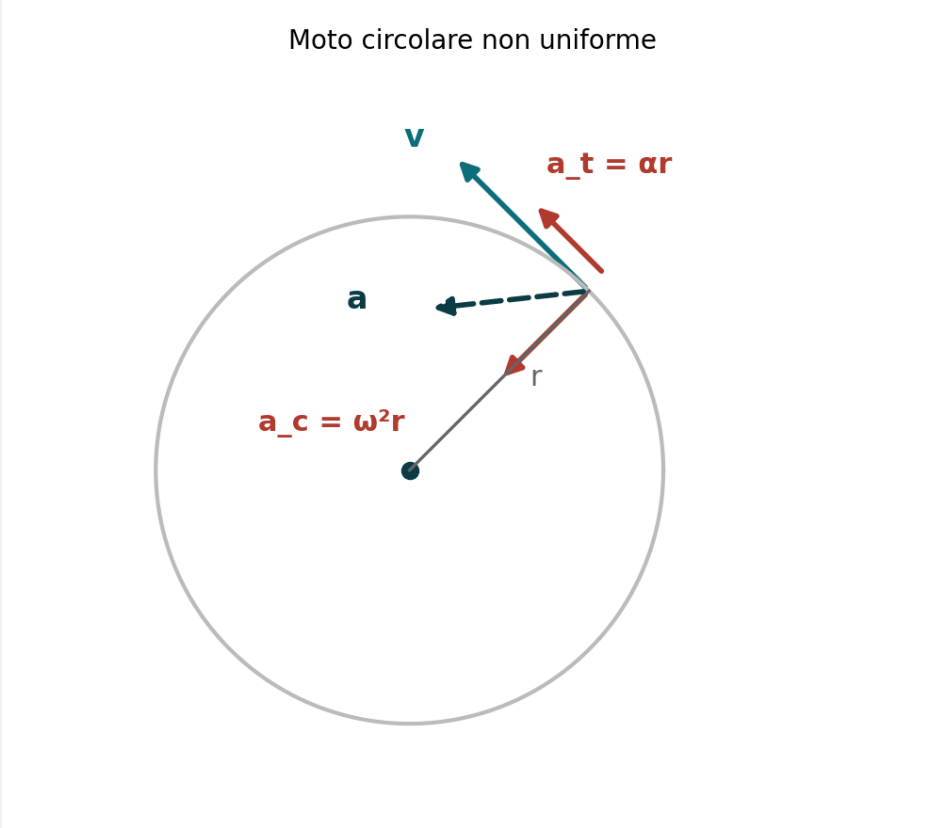
Con α costante valgono le analoghe angolari del MRUA:

**$\omega = \omega_0 + \alpha t$** **$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$** **$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$**

n. di giri = θ / 2π; ω = 2πN/60 (N in rpm).

L'accelerazione ha due componenti: **tangenziale** $a_t = \alpha r$ (cambia il modulo di v) e **centripeta** $a_c = \omega^2 r$ (cambia la direzione):

**$a = \sqrt{(a_t^2 + a_c^2)}$**



# Ultracentrifugazione e coefficiente di Svedberg

In un rotore l'accelerazione è $\omega^2 r$: cresce con la distanza dall'asse. In regime di Stokes la velocità di sedimentazione è proporzionale a essa:

$$\mathbf{v = s\,\omega^2\,r}$$

**s** è il coefficiente di sedimentazione (unità: secondi; 1 svedberg = 1 S = $10^{-13}$ s). Dipende dalla particella (massa, forma, densità), non dalla macchina.

Poiché $v = dr/dt = s\omega^2 r$, la posizione cresce in modo esponenziale:

$$\mathbf{r(t) = r_0\,e^{s\omega^2 t}} \qquad \mathbf{t = \ln(r/r_0) \,/\, (s\omega^2)}$$

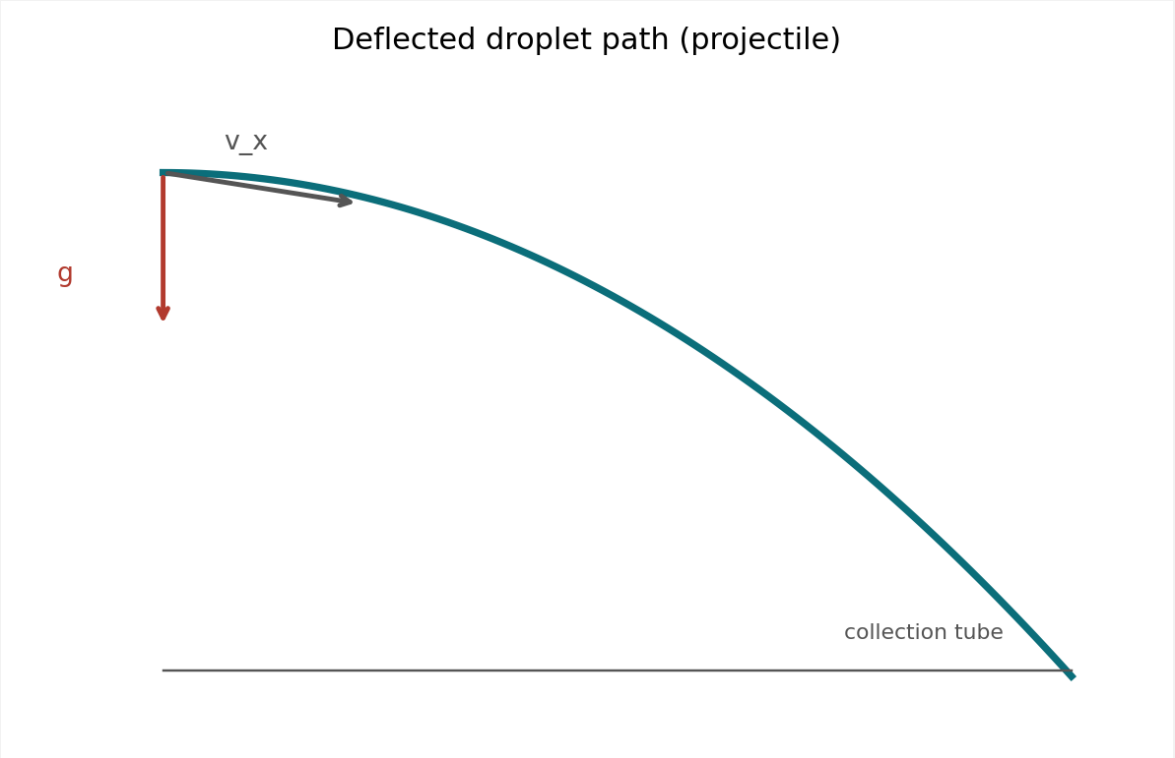
I ribosomi prendono il nome da s: 80S negli eucarioti (subunità 60S + 40S), 70S nei batteri (50S + 30S). I valori di S non si sommano (60 + 40 ≠ 80): dipendono anche dalla forma.

# Esercizio 2 — separare le goccioline (moto del proiettile)

Le goccioline cadono a $v_y = 12$ m/s e, oltre le piastre, portano una componente laterale $v_x = 0{,}40$ m/s.

Le provette di raccolta si trovano 6 cm sotto le piastre. Trova (a) il tempo di caduta;

(b) la distanza laterale di atterraggio; (c) la distanza tra le provette con carica + e −.



# Esercizio 2 — soluzione

**Passo 1 — idea.** Nel moto del proiettile i moti lungo x e lungo y sono indipendenti e durano lo stesso tempo t: lungo x la componente è costante ($v_x$ = 0,40 m/s); lungo y la goccia parte con $v_y$ = 12 m/s verso il basso e accelera con g.

**Passo 2 — tempo di caduta (a).** Lungo y, con d = 6 cm = 0,06 m verso il basso:

$$d = v_y t + \tfrac{1}{2} g t^2 \quad \rightarrow \quad 4{,}905\, t^2 + 12\, t - 0{,}06 = 0$$

$$t = [-12 + \sqrt{(12^2 + 4 \cdot 4{,}905 \cdot 0{,}06)}] / (2 \cdot 4{,}905) = \mathbf{4{,}99\times10^{-3}\ s \approx 5{,}0\ ms}$$

Controllo: $\tfrac{1}{2} g t^2 = 4{,}905 \cdot (5{,}0\times10^{-3})^2 = 1{,}2\times10^{-4}$ m = 0,12 mm, solo lo 0,2 % di 60 mm. La gravità è trascurabile e basta $t \approx d / v_y = 0{,}06 / 12 = 5{,}0$ ms.

**Passo 3 — spostamento laterale (b).** Nello stesso tempo t la componente orizzontale è un moto uniforme:

$$x = v_x \cdot t = 0{,}40 \cdot 5{,}0\times10^{-3} = 2{,}0\times10^{-3}\ \text{m} = \mathbf{2{,}0\ mm}$$

**Passo 4 — distanza tra le provette (c).** Le gocce con carica opposta sono deviate in versi opposti: atterrano a +2,0 mm e a −2,0 mm rispetto alla verticale. La distanza tra le provette è la somma:

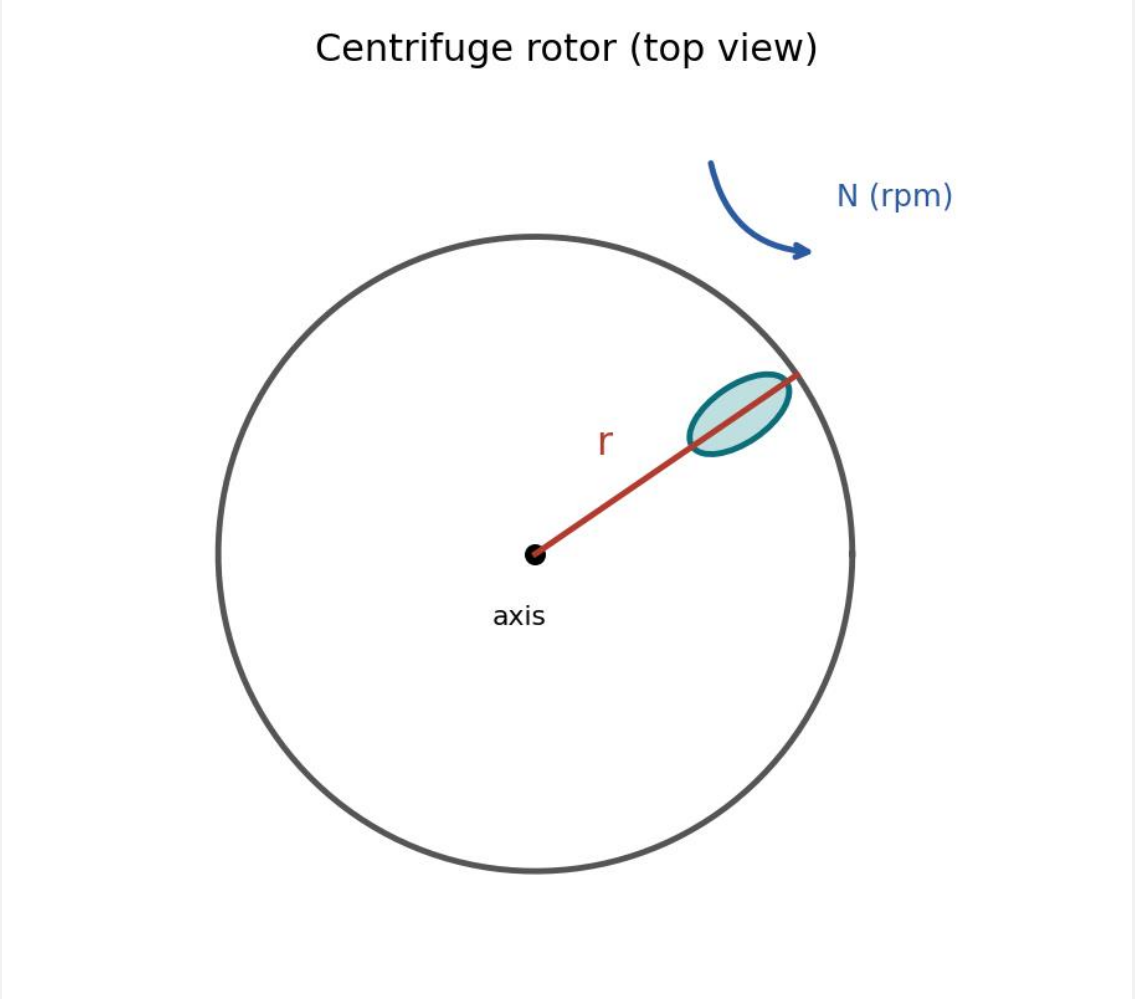
$$2 \cdot 2{,}0\ \text{mm} = \mathbf{4{,}0\ mm}$$

# Esercizio 3 — una centrifugazione (moto circolare)

Un rotore di raggio r = 10 cm gira a N = 5 000 rpm.

Trova (a) la velocità angolare; (b) il periodo; (c) l'accelerazione centripeta e il suo valore in ×g;

(d) il numero di giri in una centrifugazione di 5 minuti.



# Esercizio 3 — soluzione

**Passo 1 — velocità angolare (a).** Si converte da giri/min a rad/s: 1 giro = 2π rad e 1 min = 60 s.

$\omega = 2\pi N / 60 = 2\pi \cdot 5000 / 60 =$ **524 rad/s**

**Passo 2 — periodo (b).** È il tempo di un giro: con 5000 giri al minuto,

$T = 60 / N = 60 / 5000 =$ **0,012 s** (equivalente a $2\pi/\omega = 0{,}0120$ s)

**Passo 3 — accelerazione centripeta (c).** Con r = 10 cm = 0,10 m:

$a = \omega^2 r = 524^2 \cdot 0{,}10 = 2{,}74\times10^4$ m/s² → $2{,}74\times10^4 / 9{,}81 \approx$ **2800 × g**

Controllo: $v = \omega r = 52{,}4$ m/s e $a = v^2/r = 52{,}4^2 / 0{,}10 = 2{,}75\times10^4$ m/s²: lo stesso valore.

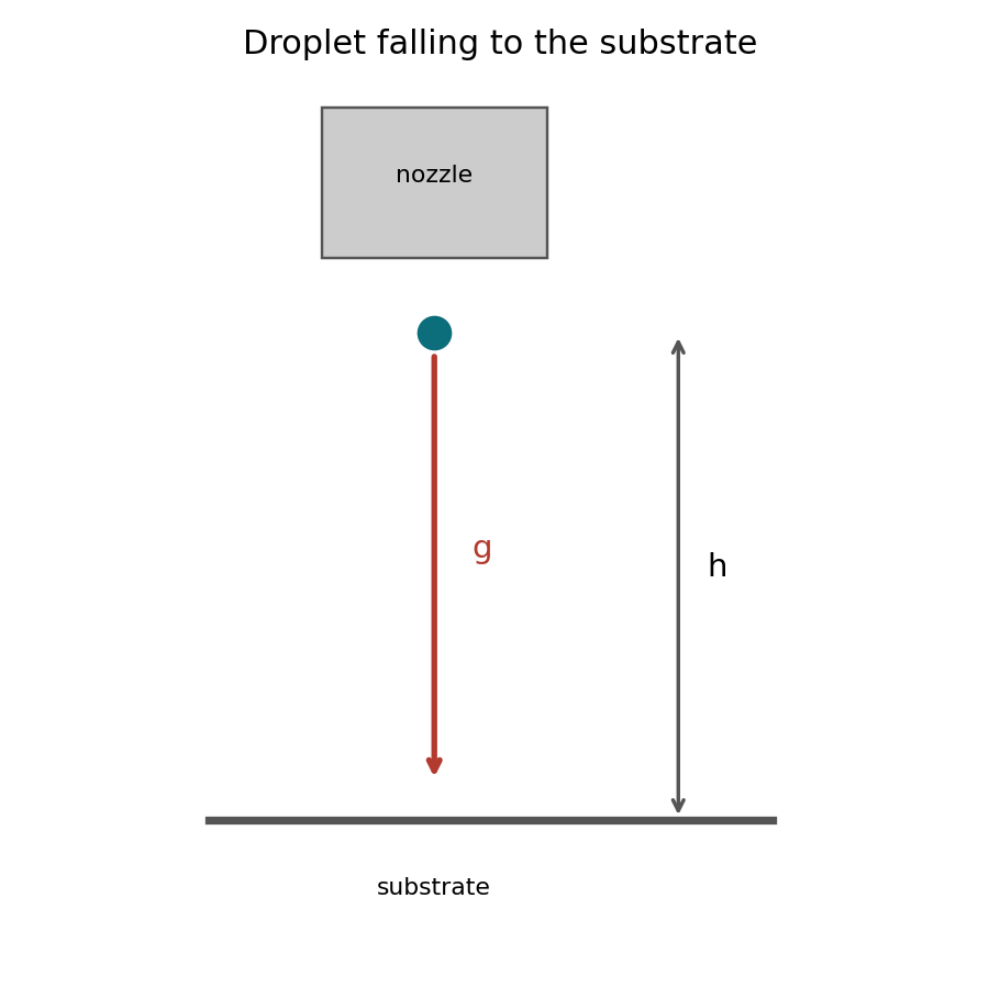
**Passo 4 — numero di giri (d).** In 5 min il rotore compie $N \cdot t = 5000$ giri/min · 5 min = **25 000 giri**.

# Esercizio 4 — una goccia di bioprinting (caduta libera)

Una goccia viene rilasciata da ferma e cade h = 3,0 mm sul substrato (g = 9,81 m/s$^2$, trascura l'aria).

Trova (a) il tempo di caduta; (b) la velocità d'impatto;

(c) la velocità d'impatto se invece viene espulsa verso il basso a 2,0 m/s.



# Esercizio 4 — soluzione

**Passo 1 — idea.** Caduta libera da fermo: $v_0 = 0$ e accelerazione costante $a = g$ (aria trascurata). L'altezza è $h = 3{,}0$ mm $= 3{,}0\times10^{-3}$ m.

**Passo 2 — tempo di caduta (a).** Da $h = \tfrac{1}{2} g t^2$:

$$t = \sqrt{(2h/g)} = \sqrt{(2 \cdot 0{,}0030 / 9{,}81)} = \sqrt{(6{,}12\times10^{-4})} = \mathbf{0{,}0247\ s \approx 25\ ms}$$

**Passo 3 — velocità d'impatto (b).** $v = g t = 9{,}81 \cdot 0{,}0247 =$ **0,243 m/s**.

Senza passare dal tempo: $v^2 = 2gh \rightarrow v = \sqrt{(2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}0030)} = 0{,}243$ m/s.

**Passo 4 — espulsione verso il basso (c).** Con $v_0 = 2{,}0$ m/s la relazione $v^2 = v_0^2 + 2gh$ dà:

$$v = \sqrt{(4{,}00 + 0{,}0589)} = \sqrt{4{,}059} = \mathbf{2{,}01\ m/s}$$

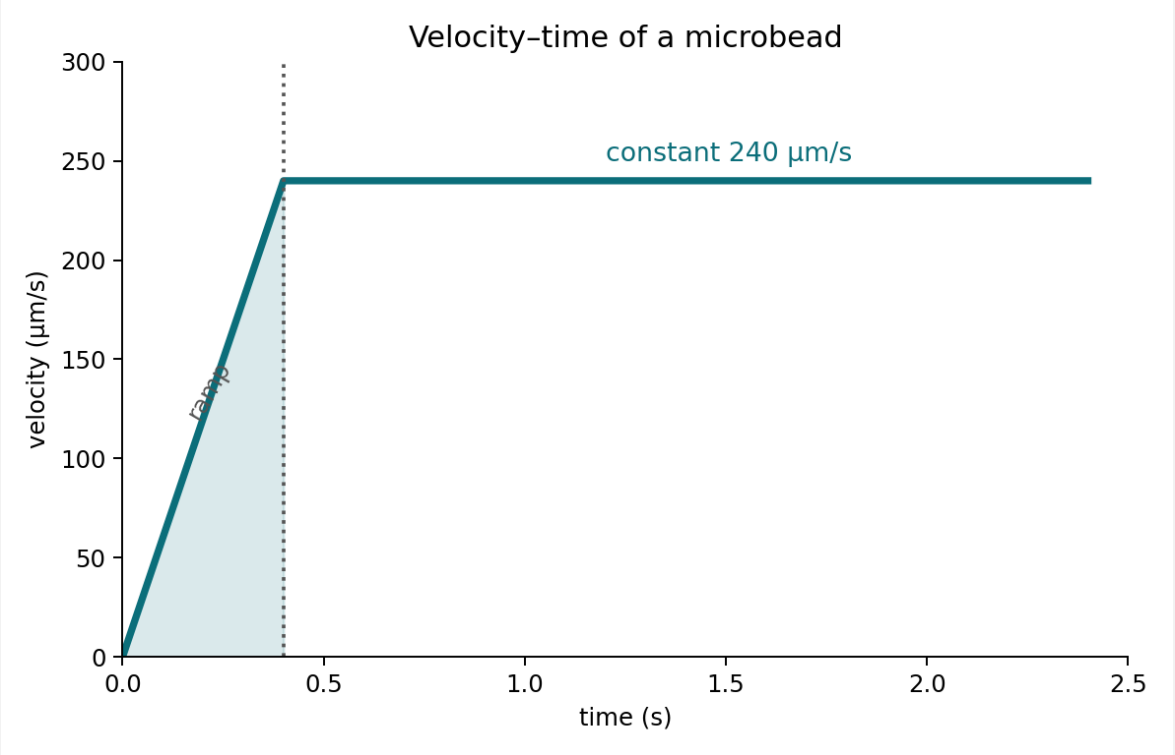
Significato: la caduta di 3 mm aggiunge solo ≈ 0,01 m/s; la velocità d'impatto è dominata dall'espulsione.

# Esercizio 5 — una microsfera che accelera e poi procede a velocità costante

Una microsfera accelera uniformemente da ferma fino a 240 µm/s in 0,40 s, poi si muove a 240 µm/s.

Trova (a) l'accelerazione; (b) la distanza durante l'accelerazione;

(c) la distanza aggiuntiva nei successivi 2,0 s a velocità costante.



# Esercizio 5 — soluzione

**Passo 1 — unità di misura.** Conviene lavorare in µm e s: v = 240 µm/s (= $2{,}4\times10^{-4}$ m/s). Il moto ha due fasi: accelerato (0,40 s) e uniforme (2,0 s).

**Passo 2 — accelerazione (a).** Il moto è uniformemente accelerato partendo da fermo, quindi a è costante:

$a = \Delta v / \Delta t = (240 - 0) / 0{,}40 =$ **600 µm/s²** $= 6{,}0\times10^{-4}$ m/s²

**Passo 3 — distanza durante l'accelerazione (b).** Dalla legge oraria con $v_0 = 0$:

$d = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 600 \cdot 0{,}40^2 = \frac{1}{2} \cdot 600 \cdot 0{,}16 =$ **48 µm**

Controllo: la velocità media nella rampa è (0 + 240)/2 = 120 µm/s, quindi d = 120 · 0,40 = 48 µm (è l'area del triangolo sotto la curva v(t)).

**Passo 4 — fase a velocità costante (c).** Con v costante la distanza è velocità per tempo:

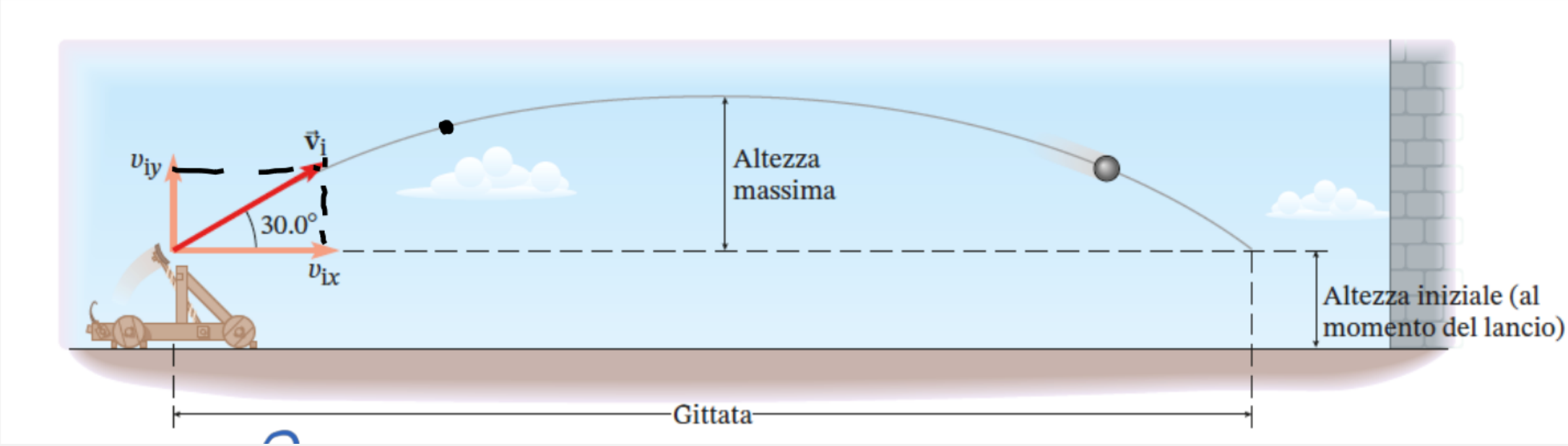
$d = v \cdot t = 240 \cdot 2{,}0 =$ **480 µm** (l'area del rettangolo sotto v(t))

**Passo 5 — verifica finale.** Distanza totale = 48 + 480 = 528 µm in 2,4 s, cioè 220 µm/s in media: un valore compreso tra 0 e 240 µm/s, come atteso.

# MOTO PARABOLICO

## Esercizio

Una catapulta lancia una pietra di 32 kg con una velocità di 50,0 m/s a un angolo di elevazione di 30,0°. A) Qual è l'altezza massima raggiunta dalla pietra? B) Qual è il tempo di volo (l'intervallo di tempo durante il quale il proiettile rimane in aria prima di ricadere al suolo)? C) Qual è la sua gittata (la distanza orizzontale percorsa dal proiettile prima di ricadere al suolo)?



# Esercizio — soluzione (a)

**Passo 1 — idea.** Nel moto del proiettile ($g = 9{,}8$ m/s², aria trascurata) i moti lungo x e lungo y sono indipendenti: lungo x la velocità è costante ($a_x = 0$), lungo y l'accelerazione è costante $a_y = -g$. La massa (32 kg) non serve.

**Passo 2 — componenti iniziali.** Con $v_i = 50{,}0$ m/s e $\theta = 30{,}0°$:

$v_{ix} = v_i \cos\theta = 50{,}0 \cdot 0{,}866 = 43{,}3$ m/s  $v_{iy} = v_i \sin\theta = 50{,}0 \cdot 0{,}500 = 25{,}0$ m/s

**Passo 3 — altezza massima (A).** Al vertice la componente verticale si annulla, $v_y = 0$. Tempo di salita:

$v_y = v_{iy} - g\,t_s = 0 \quad \rightarrow \quad t_s = v_{iy} / g = 25{,}0 / 9{,}8 = 2{,}55$ s

$h = v_{iy}\,t_s - \tfrac{1}{2}\,g\,t_s^2 = v_{iy}^2 / (2g) = 25{,}0^2 / (2 \cdot 9{,}8) =$ **31,9 m**

Equivalente con la velocità media verticale $(0 + v_{iy})/2$: $h = \tfrac{1}{2} \cdot 25{,}0 \cdot 2{,}55 = 31{,}9$ m.

# Esercizio — soluzione (b–c)

Dai passi precedenti: $v_{ix} = 43{,}3$ m/s, $v_{iy} = 25{,}0$ m/s, $t_s = 2{,}55$ s.

**Passo 4 — tempo di volo (B).** La pietra ricade alla quota di lancio ($\Delta y = 0$): salita e discesa durano uguale, quindi

$t = 2\,t_s = 2 \cdot 2{,}55 =$ **5,10 s** (oppure da $0 = v_{iy}\,t - \tfrac{1}{2}\,g\,t^2 \rightarrow t = 2\,v_{iy} / g$)

**Passo 5 — gittata (C).** Lungo x il moto è uniforme per tutto il tempo di volo:

$R = v_{ix} \cdot t = 43{,}3 \cdot 5{,}10 =$ **221 m**

**Passo 6 — controllo.** Con la formula diretta: $R = v_i^2 \sin 2\theta / g = 50{,}0^2 \cdot \sin 60° / 9{,}8 = 2500 \cdot 0{,}866 / 9{,}8 = 221$ m. Stesso valore.

Significato: la pietra tocca il suolo con la stessa velocità di lancio (50,0 m/s), inclinata di 30° verso il basso; la massa non compare in nessun passaggio.