Scelte in Condizioni di Incertezza ed Utilità attesa

1. *La teoria dell'utilità di von Neumann e Morgenstern*

Lo strumento introdotto da von Neumann e Morgenstem per analizzare le scelte in condizioni di incertezza è la funzione di utilità attesa, il cui fondamento è già presente nel contributo di D. Bemoulli del 1738.

L'idea di base è che, se c'è incertezza sul futuro, il benessere del consumatore dipende, oltre che dall'alternativa a disposizione, anche da quale stato di natura si realizza. Ad esempio, se un consumatore può scegliere tra acquistare un gelato o un ombrello, e il tempo può essere piovoso o soleggiato, il benessere del consumatore dipenderà dal fatto che abbia acquistato il gelato o l'ombrello e dalle condizioni atmosferiche che si sono effettivamente verificate.

Se il consumatore potesse scegliere dopo che l'incertezza è stata risolta (cioè, nel nostro esempio, dopo aver osservato che tempo fa), la sua scelta potrebbe essere analizzata nel modo tradizionale. Ma spesso gli agenti economici devono prendere le loro decisioni prima di aver osservato lo stato del mondo. In questo caso, la scelta (e, conseguentemente, la funzione di utilità) dovrà dipendere, oltre che dai livelli di consumo, dalla probabilità con cui i diversi eventi possono verificarsi.

2. *Funzione di utilità attesa*

Ipotizziamo allora che il consumatore conosca la distribuzione di probabilità dei diversi stati di natura che possono verificarsi. Ovviamente, si tratta di un'ipotesi estremamente severa. In particolare, l'idea di von Neumann e Morgenstem è che il consumatore valuti le alternative attraverso una funzione di utilità e che massimizzi il valore atteso di tale funzione di utilità.

Per illustrare questa impostazione, supponiamo che possano veri- ficarsi soltanto due eventi A e B, tra loro mutuamente esclusivi, e siano q e $(1-q)$, rispettivamente, le probabilità che si verifichi il primo e il secondo stato di natura. Indichiamo poi con c_A, e c_B i livelli di consumo che si realizzano in corrispondenza dei due stati di natura. Sia $u(.)$ la funzione di utilità. Possiamo allora definire il valore atteso di tale funzione di utilità – (chiamata anche funzione di utilità attesa, o funzione di utilità di von Neumann-Morgenstern) – che altro non è che la media aritmetica, ponderata con le probabilità, delle utilità che si ottengono nei due stati di natura:

$$Eu = qu(c_A) + (1-q)u(c_B) \tag{1}$$

Si tratta di una media ponderata dei valori che la funzione u assume nei due stati di natura possibili, dove i pesi sono rappresentati dalle rispettive probabilità. Chiaramente, la funzione $u(.)$ deve essere crescente, perché in ogni caso il consumatore preferisce avere il consumo più alto possibile.

In generale, il consumatore può, con le sue scelte, influenzare i valori dei consumi nei due stati di natura. Immaginate per esempio di disporre di una somma pari a 100. Potete consumare direttamente questa somma, oppure, poniamo, giocarla alla *roulette*, puntandola sul nero.

Se trascuriamo per semplicità la possibilità che esca lo 0, in questo caso i due stati di natura sono «nero» (A) o «rosso» (B) alla *roulette*. Le probabilità sono 1/2 e 1/2. Se sceglieste di non giocare, i vostri consumi saranno indipendenti dal fatto che esca un numero rosso o nero. Avremo quindi:

$$c_A = 100$$

$$c_B = 100$$

Se invece sceglieste di giocare, i vostri consumi dipenderanno dallo stato di natura. In particolare, avremo

$$c_A = 200$$

perché se esce nero avete vinto e la vostra puntata viene raddoppiata, e

$$c_B = 0$$

perché se esce rosso perdete la posta.

In questo modo, la vostra scelta di giocare o non giocare influenza i livelli di consumo di cui potete disporre nei vari stati del mondo. Per stabilire se è meglio giocare alla roulette o non giocare, un consumatore che si comporti nel modo ipotizzato da von Neumann e Morgenstern dovrebbe confrontare i livelli dell'utilità attesa nei due casi.

Se non giocate, la vostra utilità attesa è:

$$\frac{1}{2}u(100) + \frac{1}{2}u(100) = 100$$

mentre se giocate avrete una utilità attesa pari a:

$$\frac{1}{2}u(200) + \frac{1}{2}u(0)$$

Dunque è meglio giocare se

$$\frac{1}{2}u(200) + \frac{1}{2}u(0) > 100$$

mentre è meglio non giocare nel caso contrario.

E facile verificare che se la funzione $u(.)$ è lineare, il consumatore è indifferente tra giocare e non giocare; in questo caso, si dice che il consumatore è neutrale rispetto al rischio. Questo caso corrisponde al caso di un investitore che considera, come unico criterio di scelta, il rendimento medio di un investimento.

Se invece la funzione $u(.)$ è concava (cioè se la derivata seconda $u" < 0$), il consumatore preferisce non giocare. In questo caso, si dice che il consumatore è avverso al rischio.

Infine, se la funzione $u(.)$ è convessa (cioè se la derivata seconda $u > 0$), il consumatore preferisce giocare. In questo caso, si dice che il consumatore è amante del rischio.

Possiamo generalizzare questa classificazione come segue. Supponiamo che il nostro soggetto fronteggi una lotteria che prevede n premi $x_i (i = 1, 2, n)$, ciascuno dei quali si verifica con probabilità p_i. Egli misura ancora l'utilità dei premi x_i (espressi in moneta) attraverso la funzione di utilità $u(.)$. Definiamo poi il *valore atteso della lotteria*, x_m, come:

$$x_M = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i. \tag{2}$$

Nell'equazione (2), x_M è semplicemente la media ponderata dei premi, dove i pesi sono dati dalle probabilità che si verifichino gli stati di natura a cui sono associati i corrispondenti premi. Definiamo poi *l'utilità attesa della lotteria*, $Eu(x)$, come:

$$Eu(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i u x_i \tag{3}$$

A questo punto, confrontiamo $u(x_M)$, l'utilità del valore atteso della lotteria, con $Eu(x)$, l'utilità attesa della lotteria.

Se $u(x_M) = Eu(x)$ si dice che il soggetto è neutrale rispetto al rischio. Ciò significa che egli è indifferente tra un reddito certo e un reddito incerto con lo stesso valore atteso. La figura 1 illustra questa eventualità, mostrando che la funzione di utilità di un agente neutrale verso il rischio è lineare.

Se $u(x_M)$ ¿ $Eu(x)$ si dice che il soggetto è avverso al rischio. Ciò significa che egli preferisce ottenere con certezza il valore atteso della lotteria piuttosto che correre il rischio di giocare alla lotteria medesima. Questa circostanza è illustrata in figura 8.2, dalla quale si evince che in questo caso la funzione di utilità è concava.

Se $u(x_M)$ ¡ $Eu(x)$ si dice infine che il soggetto è amante del (o incline al) rischio. In questo caso egli preferisce partecipare alla lotteria piuttosto che ricevere con certezza un ammontare pari al valore atteso della lotteria. La funzione di utilità che rappresenta queste preferenze è convessa (vedi figura 8.3).

Vediamo i tre casi con un esempio. Consideriamo un soggetto che può lavorare in cambio di un reddito certo pari a 20, oppure può intraprendere un'attività (ovvero partecipare a una lotteria) che con uguale probabilità, pari a 1/2, gli procura un reddito di 30 o un reddito di 10 (il reddito atteso di quest'attività è quindi pari a 20).

Distinguiamo allora i 3 casi.

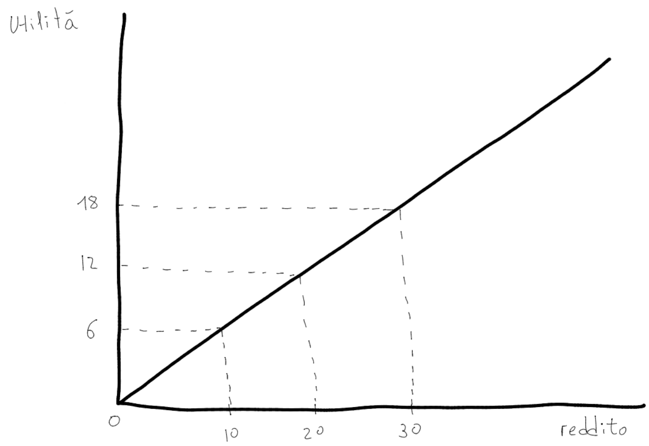

Figura 1: Neutralità rispetto al rischio. Funzione di utilità lineare.

Neutralità rispetto al rischio: se guardiamo la Figura 1, vediamo che allora il nostro soggetto trae utilità pari a 12 in entrambi i casi; ovvero, l'utilità di un reddito certo pari a 20 è uguale all'utilità attesa di un reddito pari a 30 o a 10. Qui la funzione di utilità è $u(x) = 3x/5$.

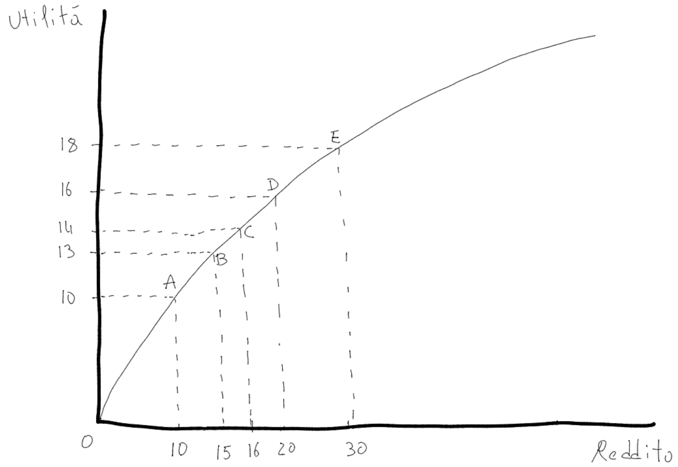

Figura 2: Avversione al rischio. Funzione di utilità concava.

Avversione al rischio: in questo caso (vedi la Figura 2), l'utilità attesa dal red- dito incerto è pari a 14 (che è l'ordinata del punto C), ottenuto come media ponderata dei livelli di utilità associati al punto A (10) e al punto E (18). Si vede che l'utilità del reddito certo (pari a 20) è questa volta pari a 16, e dunque superiore all'utilità attesa dal reddito proveniente dall'attività incerta.

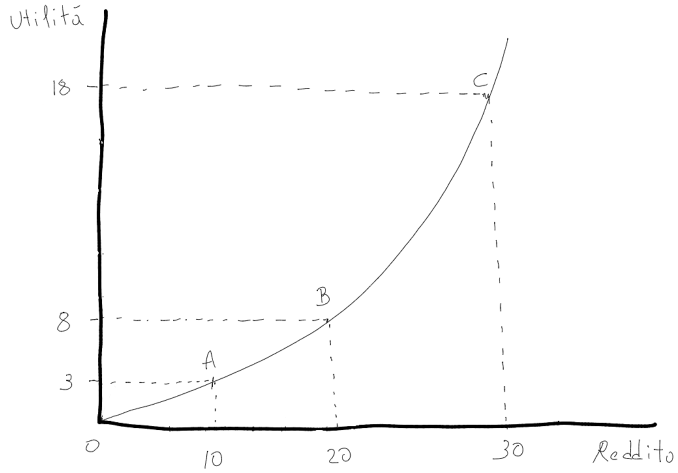

Figura 3: Inclinazione rispetto al rischio. Funzione di utilità convessa.

Inclinazione verso il rischio. Questa volta, come si vede nella Figura 3, l'utilità del reddito incerto è pari a $\frac{1}{2}u(10) + \frac{1}{2}u(30) = 10,5$ come si vede dalla figura 8.3. Questo va- lore è superiore all'utilità di un reddito certo pari a 20, che è 8.

3. *Premio per il rischio e indici di avversione al rischio*

Guardiamo ora la Figura 4 che riproduce i dati del nostro esempio; possiamo così introdurre un altro importante concetto.

Definiamo premio per il rischio l'ammontare che un soggetto avverso al rischio è disposto a pagare per evitare il rischio stesso. Nella Figura 4 il premio per il rischio è misurato dal segmento CF e corrisponde a un ammontare pari a 4. Questo perché uno stesso livello di utilità può essere ottenuto da un reddito certo pari a 16 oppure da un reddito atteso pari a 20. Dunque (20 - 16) misura proprio l'ammontare a cui l'individuo

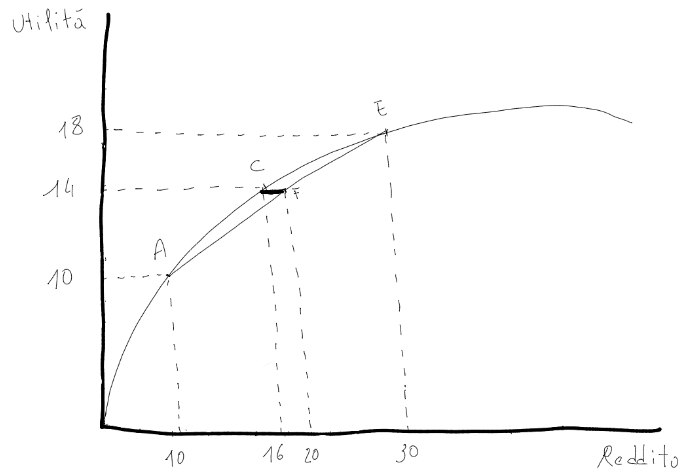

Figura 4: Inclinazione rispetto al rischio. Funzione di utilità convessa.

è disposto a rinunciare, a parità di utilità, per non correre alcun rischio. In altre parole, un reddito certo pari a 16 attribuisce la stessa utilità attesa (pari a 14) di un reddito incerto ma caratterizzato da un valore atteso pari a 20. Si noti che 20 è ottenuto dalla media aritmetica ponderata (con pesi pari a 1/2) dei redditi pari a 10 e 30; quindi, il punto F giace sulla corda che congiunge i punti A ed E.

Sempre con riferimento all'esempio 1 e alla Figura 4, si noti che il reddito pari a 16 è interpretabile come l'equivalente certo della lotteria che procura redditi pari a 10 o 30. Infatti, un reddito certo pari a 16 ge- nera lo stesso livello di utilità del reddito atteso (pari a 20) della lotteria. Chiaramente, mentre l'equivalente certo di una lotteria è sempre minore del valore medio (o atteso) della lotteria per soggetti avversi al rischio, per soggetti inclini al rischio tale diseguaglianza risulta rovesciata.

Il premio per il rischio è una misura locale di avversione al rischio, ovvero varia a seconda dell'intervallo in cui la misuriamo, e dipende da quanto la curva è concava (ovvero dalla curvatura), dal livello di ricchezza iniziale, da quanto rischiosa è la lotteria.