



L'evento sportivo

Dall'analisi di «contorno» al «core»

Unità Didattica 2 - SET I

L'evento sportivo come «contest»

- Qualità dell'evento
- Incertezza del risultato



CONTEST THEORY o TOURNAMENT THEORY

- ▶ Almeno due competitors;
- ▶ Competizione singola o in forma di torneo;
- ▶ Chi vince prende tutto;
- ▶ Conta la performance relativa e non quella assoluta;

Immaginiamo il «contest» come un'asta in cui chi fa l'offerta più alta «vince» e l'offerta è l'«*effort*», ma ...

... a differenza dell'asta, l'*effort* più «alto» non garantisce la vittoria.

EFFORT come ...

Il modello matematico

La CONTEST SUCCESS FUNCTION

$$p_i = \frac{x_i^\gamma}{\sum_{j=1}^n x_j^\gamma}, \quad (1)$$

Esprime la probabilità di successo di un i-esimo competitor

i = i-esimo competitor;

n = numero dei competitors; $n \geq 2$

x_i = effort dell'i-esimo competitor;

x_j = effort del j-esimo competitor;

γ = potere discriminante della competizione; $0 < \gamma < 1$

La funzione obiettivo

$$\pi_i = p_i(x_i; x_{j \neq i}) \cdot Z - c_i(x_i) \cdot x_i, \quad (2)$$

Esprime la funzione di profitto di un i-esimo competitor

Z = premio per la vittoria;

$c_i(x_i)$ = costo medio e marginale di una unità di *effort* dell'i-esimo competitor;

Il problema di ottimo

$$\max_{x_i} \pi_i = p_i(x_i; x_{j \neq i}) \cdot Z - c \cdot x_i, \quad (3)$$

↑
HP: costi medi e marginali costanti

FOC

$$\frac{d\pi_i}{dx_i} = 0 \rightarrow \frac{dp_i(x_i; x_{j \neq i})}{dx_i} \cdot Z - c = 0, \quad (4)$$

↓
Sviluppo su lavagna

Soluzione per contesti «simmetrici» e derivate di statica comparata:

$$x_i^* = \frac{\gamma \cdot (n-1) \cdot Z}{n^2 \cdot c}, \quad \forall i \text{ con } i = 1, 2, \dots, j, \dots, n.$$

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial \gamma} = \frac{(n-1) \cdot Z}{n^2 \cdot c} > 0,$$

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial n} = \frac{\gamma \cdot (2-n) \cdot Z}{n^3 \cdot c} < 0,$$

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial Z} = \frac{\gamma \cdot (n-1)}{n^2 \cdot c} > 0,$$

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial c} = -\frac{\gamma \cdot (n-1) \cdot Z}{n^2 \cdot c^2} < 0.$$

Sviluppo su lavagna

Il caso di due competitors – A e B

$$p_A = \frac{x_A^\gamma}{x_A^\gamma + x_B^\gamma} \longrightarrow \pi_A = p_A(x_A; x_B) \cdot Z - c \cdot x_A$$

$$p_B = \frac{x_B^\gamma}{x_A^\gamma + x_B^\gamma} \longrightarrow \pi_B = p_B(x_A; x_B) \cdot Z - c \cdot x_B$$

$$\frac{d\pi_A}{dx_A} = 0 \rightarrow \frac{dp_A(x_A; x_B)}{dx_A} \cdot Z - c = 0 \rightarrow \frac{\gamma \cdot x_A^{\gamma-1} \cdot (x_A^\gamma + x_B^\gamma) - \gamma \cdot x_A^{\gamma-1} x_A^\gamma}{(x_A^\gamma + x_B^\gamma)^2} \cdot Z = c,$$

$$\frac{d\pi_B}{dx_B} = 0 \rightarrow \frac{dp_B(x_A; x_B)}{dx_B} \cdot Z - c = 0 \rightarrow \frac{\gamma \cdot x_B^{\gamma-1} \cdot (x_A^\gamma + x_B^\gamma) - \gamma \cdot x_B^{\gamma-1} x_B^\gamma}{(x_A^\gamma + x_B^\gamma)^2} \cdot Z = c.$$

La soluzione:

$$\frac{\gamma \cdot x_A^{\gamma-1} \cdot (x_A^\gamma + x_B^\gamma) - \gamma \cdot x_A^{\gamma-1} x_A^\gamma}{(x_A^\gamma + x_B^\gamma)^2} \cdot Z = \frac{\gamma \cdot x_B^{\gamma-1} \cdot (x_A^\gamma + x_B^\gamma) - \gamma \cdot x_B^{\gamma-1} x_B^\gamma}{(x_A^\gamma + x_B^\gamma)^2} \cdot Z,$$

$$x_A^{\gamma-1} \cdot x_B^\gamma = x_B^{\gamma-1} \cdot x_A^\gamma.$$

$$x_A = x_B.$$

$$x_A^* = \frac{\gamma \cdot Z}{4 \cdot c} = x_B^*$$

Derivate di statica comparata:

$$\frac{\partial x_A^*}{\partial \gamma} = \frac{\partial x_B^*}{\partial \gamma} \rightarrow \frac{Z}{4 \cdot c} > 0,$$

$$\frac{\partial x_A^*}{\partial Z} = \frac{\partial x_B^*}{\partial Z} \rightarrow \frac{\gamma}{4 \cdot c} > 0,$$

$$\frac{\partial x_A^*}{\partial c} = \frac{\partial x_B^*}{\partial c} \rightarrow -\frac{\gamma \cdot Z}{4 \cdot c} < 0.$$

Sviluppo su lavagna

$$\text{Equilibrio Competitivo (EC)} = \frac{p_A^*}{p_B^*} \rightarrow EC = \frac{(x_A^*)^\gamma / ((x_A^*)^\gamma + (x_B^*)^\gamma)}{(x_B^*)^\gamma / ((x_A^*)^\gamma + (x_B^*)^\gamma)} \rightarrow EC = \frac{(x_A^*)^\gamma}{(x_B^*)^\gamma} \rightarrow EC = 1$$