# Il teorema di Chebyshev

Il teorema di Chebyshev viene utilizzato per misurare la dispersione dei dati per ogni distribuzione.

Descrive qual è la percentuale dei dati che sarà entro un determinato numero di deviazioni standard della media, e questo funziona per qualsiasi curva di distribuzione di qualsiasi forma.
Ci consente di stimare la probabilità che la variabile aleatoria X ha di differire dalla media per più di k volte σ(X).

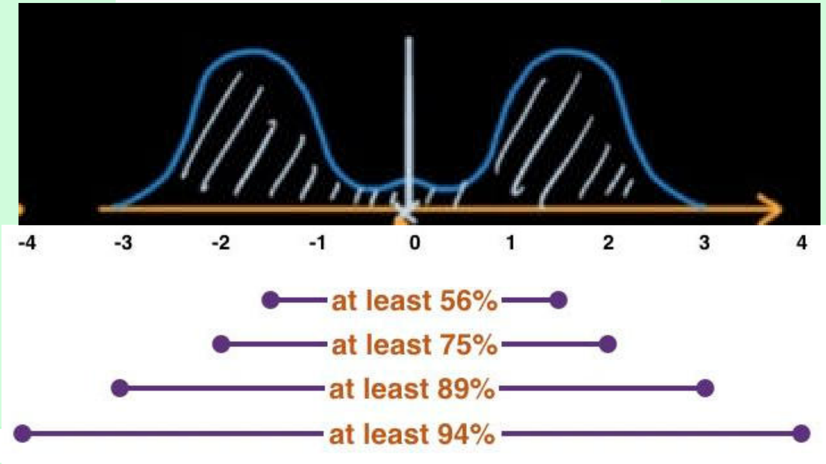
Si può usare quando non si conosce la forma della distribuzione, ma si conoscono la media e la deviazione standard.

# Il teorema di Chebyshev

Per ogni $k > 1$, almeno $1-1/k^2$ dei dati è entro k deviazioni standard della media.

| Numero di σ | $1-\frac{1}{k^2}$ |
|---|---|
| 1,5 | 0,56 |
| 2 | 0,75 |
| 3 | 0,89 |
| 4 | 0,94 |

k rappresenta il numero di σ dalla media



# Il teorema di Chebyshev

Usando questa formula e inserendo il valore 2, otteniamo un valore risultante di 1 1/2 $^{2}$, che è uguale al 75%.
Ciò significa che almeno il 75% dei dati in un insieme di numeri si trova entro 2 deviazioni standard dalla media.

Se inseriamo 3 per k, il valore risultante è 88,89%.
Ciò significa che almeno l'88,89% di un set di dati si trova entro 3 deviazioni standard dalla media.

Se inseriamo 4 per k, il valore risultante è 93,75%. Ciò significa che almeno il 93,75% di un set di dati è entro 3 deviazioni standard della media.

# Esempio

I voti ottenuti da 80 studenti hanno
M = 72
σ = 5
Quanti studenti hanno preso un voto compreso tra 62 e 82?
Quanti studenti hanno preso un voto compreso tra 60 e 84?

Calcolare il numero di dev std dalla media:

- nel primo caso (62-72)/5 oppure (82-72)/5 = $\pm$ 2
- nel secondo caso (60-72)/5 oppure (84-72)/5 = $\pm$ 2,4

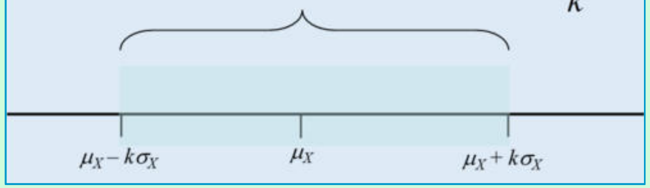
Nel primo caso **almeno** il 75% degli studenti deve aver ottenuto un voto compreso tra 62 e 82.

Nel secondo caso 1-1/2,4^$^2$ = 0,826. **Almeno** l'82,6% degli studenti deve aver conseguito un voto compreso tra 60 e 84.

# Esempio

Esempio: voto esame universitario
n di studenti = 50
M = 24
σ = 2
Quanti studenti hanno voto compreso tra 21 e 27?

$$P(\mu_X - k\sigma_X < X < \mu_X + k\sigma_X) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$




k = (24-21)/2= 3/2 = 1,5

1- (1 / ($1,5^2$)) = 0,56

La frequenza di coloro che hanno un voto tra 21 e 27 non è inferiore al 56%
Per sapere quanti soggetti avranno un voto tra 21 e 27 = 50*0,56 = 28 (non meno di)

# Il teorema di Chebyshev

Il teorema è applicabile a qualunque insieme di dati e può essere utilizzato per stabilire il **numero minimo** di osservazioni che si trovano entro un prestabilito numero di deviazioni standard dalla media.
Se si è certi che i dati siano distribuiti approssimativamente come una normale si può dire di più.

Per esempio la regola empirica ci consente di dire che il 95% dei valori si troverà entro 2 deviazioni standard dalla media: il teorema di Chebychev ci consente di concludere solamente che almeno il 75% dei valori si troverà in quell'intervallo.

# Esercizio

Le ante di legno di un lotto prodotto da una fabbrica hanno una lunghezza media di 205cm e varianza pari a 8.

Un'anta è considerata difettosa se la sua lunghezza è minore di 197cm o superiore a 213cm; il lotto viene rifiutato se contiene più del 10% di ante difettose. Sulla base delle informazioni a disposizione, il lotto sarà rigettato?

# Soluzione

Deviazione standard = $\sqrt{8}$ = 2,83

k = (197-205)/2,83 = 2,83

1- (1/2,83^$^2$) = 87,5%

Almeno l'87,5% delle ante rientra nell'intervallo indicato. Il 12,5% non rientra in tale intervallo, sarà minore di 197cm o maggiore di 213cm. Il lotto quindi non sarà accettato.

# Tasso d’incremento (r)

Il **tasso di incremento** esprime il numero di individui che si aggiungono durante un intervallo di tempo standard (l’anno) per ogni 1.000 persone appartenenti alla popolazione.

Rispetto alle misure precedenti consente confronti tra fenomeni relativi a popolazioni differenti.

Per il calcolo servono 3 elementi:

1- numerosità della popolazione al tempo t (iniziale) e t (finale)

2- il tempo durante il quale avviene l’incremento

# Tipologie di tassi d'incremento

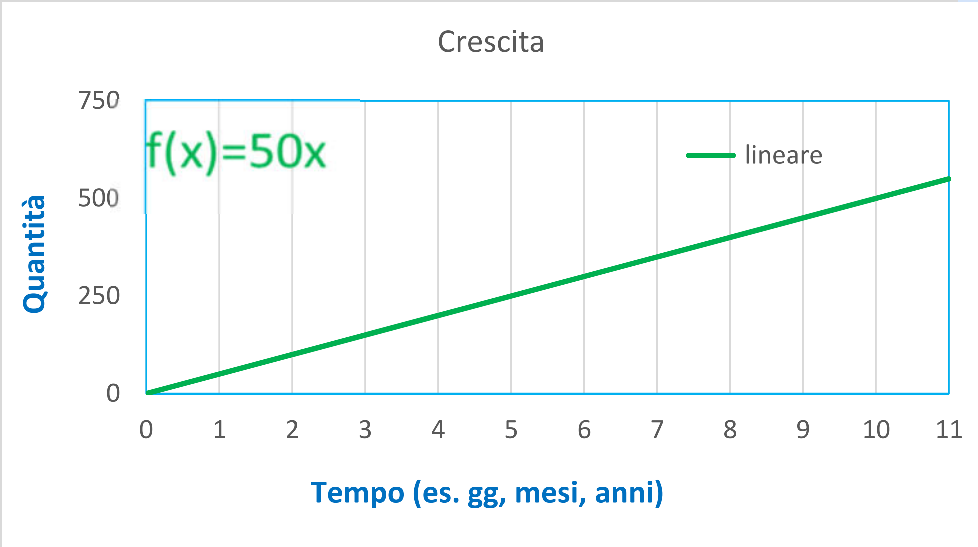
Si distinguono 3 tipologie di tassi a seconda delle assunzioni sulle leggi che regolano la crescita delle popolazioni:

1- Tasso d'incremento aritmetico → Popolazione di riferimento è quella all'inizio del periodo. Ipotizza la **crescita lineare** della popolazione (costante nel tempo es. giorno dopo giorno)

2- Tasso d'incremento geometrico → Popolazione di riferimento è quella esistente all'inizio di ciascun anno componente il periodo, il tempo viene considerato come una variabile discreta. **Progressione geometrica**

3- Tasso d'incremento continuo → Popolazione di riferimento è quella che esiste in ciascun intervallo infinitesimale piccolo. Ipotizza la continuità del fenomeno e una **crescita esponenziale**

# Crescita lineare




Su un piano cartesiano **la crescita lineare** è rappresentata da una retta (più o meno inclinata).

Per crescita lineare si intende un incremento costante delle unità, giorno dopo giorno.

Ciò significa che le unità aumentano ogni giorno di una stessa quantità: al giorno 1 avrò 50, al giorno 2 avrò 100 e così via.

La progressione sarà: 50, 100, 150, 200, 250 etc…

La differenza tra un elemento, a partire dal secondo, ed il suo precedente è costante (ragione della progressione).

# Crescita geometrica

Nella **capitalizzazione composta** l'interesse prodotto in ogni periodo si somma al capitale e produce a sua volta interessi tale che il Montante = Capitale$(1+i)^n$

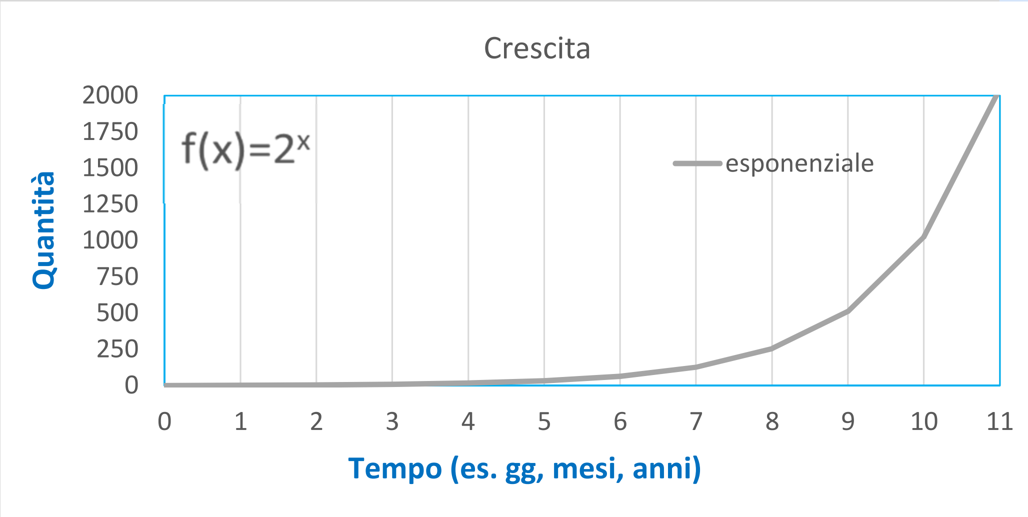
| Anni | Capitale | Interessi |
|---|---|---|
| 0 | 1.000.000 | 50.000 |
| 1 | 1.050.000 | 52.500 |
| 2 | 1.102.500 | 55.125 |
| 3 | 1.157.625 | 57.881 |
| 4 | 1.215.506 | 60.775 |
| 5 | 1.276.282 | 63.814 |

**Capitale = 1mln€**
**Tasso d'interesse = 5%**

**Gli interessi maturati sono andati ad aumentare il capitale**

**Una progressione geometrica è una successione di numeri nella quale il quoziente tra ciascun termine e il termine seguente si mantiene costante (nell'esempio in tabella è 1,05).**
**Questo quoziente si chiama ragione della successione.**

# Crescita esponenziale

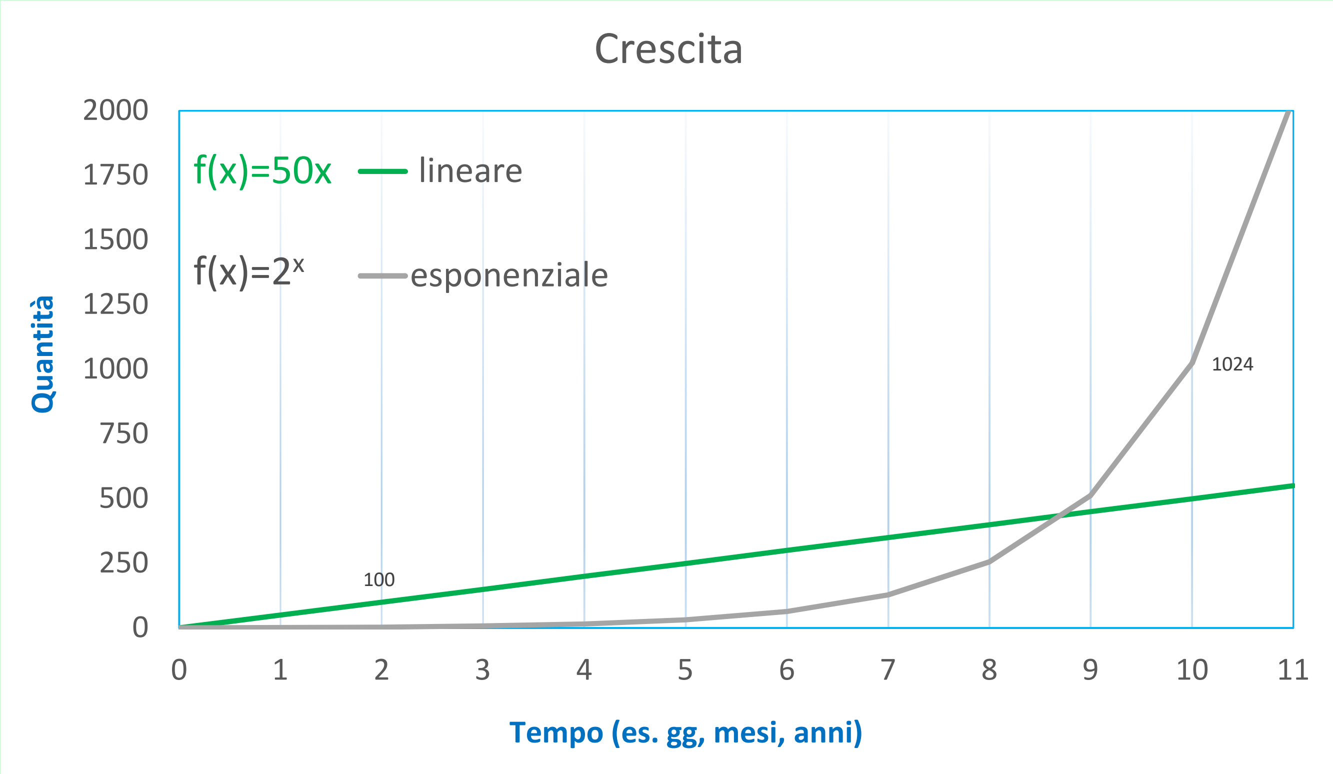



Quella **esponenziale** è una curva, che può salire più o meno rapidamente.

I fenomeni sottoposti ad una legge di crescita esponenziale in una prima fase osservano una crescita piuttosto lenta, che poi subisce un'accelerazione improvvisa.

Una quantità in crescita esponenziale è una funzione esponenziale del tempo, cioè, la **variabile indipendente (x)** che rappresenta il tempo compare ad esponente.

# Crescita lineare ed esponenziale



# Tasso di incremento aritmetico

Esprime il numero medio annuo di individui che si aggiungono o si sottraggono nell'intervallo di tempo considerato alla popolazione per ogni individuo presente all'inizio del periodo considerato (o per ogni mille), ipotizzando una **crescita lineare** della popolazione stessa.

$$r_a = \frac{P_t - P_0}{P_0 * n}$$

(n=anni)

$$P_t = P_0 * (1 + r_a * n)$$

Dal 01/01/2007 al 01/01/2017 la popolazione italiana residente è passata da:

58,510 milioni ($P_0$)

↓

60,066 milioni (Pt+n)

# Calcolo dell'incremento medio annuo aritmetico

$$r_a = \frac{60{,}066 - 58{,}510}{58{,}510 * 10} = 0{,}00266 \text{ (2,65 per mille)}$$

Nei 10 anni considerati, ogni 1.000 abitanti presenti nel 2007, si sono aggiunti annualmente **2,65 individui**.

La crescita costante anno per anno della popolazione è stata di:

$$r_{a*}\ P_0 = 0{,}00266 * 58{,}510 = 0{,}1556$$

| Anni | Quantità costante |
|---|---|
| 2008 | 0,155 |
| 2009 | 0,155 |
| 2010 | 0,155 |
| 2011 | 0,155 |
| 2012 | 0,155 |
| 2013 | 0,155 |
| 2014 | 0,155 |
| 2015 | 0,155 |
| 2016 | 0,155 |
| 2017 | 0,155 |
| | 1,556 |

Variazione assoluta $P_{(t)}\text{-}P_0$

# Tasso di crescita del PIL reale

| Anni | Pil reale | Tasso di crescita % |
|---|---|---|
| 2011 | 814,07 | 2,30 |
| 2012 | 832,77 | -0,92 |
| 2013 | 825,13 | |

# Tasso di incremento geometrico

Presuppone un modello di crescita della popolazione in funzione del tempo.
La popolazione di riferimento è quella risultante all'inizio di ogni periodo annuale costituente l'intervallo.
Assume la denominazione di tasso medio annuo di variazione geometrico, perché rappresenta la media geometrica dei tassi annuali all'interno dell'intervallo 0-t.

$$r_g = \sqrt[n]{\frac{P_t}{P_0}} - 1$$

$$P_t = P_0 * (1 + r_g)^n$$

Dal 01/01/2007 al 01/01/2017 la popolazione italiana residente è passata da:

58,510 milioni ($P_0$)

↓

60,066 milioni (Pt+n)

# Calcolo dell'incremento geometrico

$$r_g = \sqrt[10]{\frac{60{,}066}{58{,}510}} - 1 = \left(\frac{60{,}066}{58{,}510}\right)^{\wedge 1/10} - 1 = 0{,}00263$$

$$P_t = 58{,}510 * (1 + 0{,}00263)^{\wedge 10} = 60{,}066$$

La popolazione si è accresciuta di **2,63** unità ogni 1.000 abitanti presenti all'inizio dei vari anni dell'intervallo temporale.

**Presuppone che l'incremento sia composto annualmente: le unità aggiunte nel primo anno alla popolazione iniziale concorrono all'incremento del secondo anno e così via, fino a termine del periodo.**

**Ciò significa che solo dopo un anno la popolazione aggiunta a quella iniziale entra in gioco a determinare l'aumento dell'anno successivo.**

# Tasso di incremento continuo (esponenziale)

Si ipotizza che ogni unità aggiuntiva della popolazione contribuisca a sua volta all'incremento successivo della stessa nell'intervallo infinitesimo successivo (ad es. regime finanziario di capitalizzazione continua).

$$r_c = \frac{1}{n} \log_e \left[ \frac{P_t}{P_0} \right]$$

**e** = base dei logaritmi naturali ed è pari a 2,718282

$$P_t = P_0 * e^{rct}$$

Dal 01/01/2007 al 01/01/2017 la popolazione italiana residente è passata da:

58,510 milioni ($P_0$)

↓

60,066 milioni (Pt+n)

# Calcolo dell'incremento continuo

$$r_c = \frac{1}{10} \log_e \left[ \frac{60,066}{58,510} \right] = 0,00262$$

$$P_t = 58,510 * 2,71^{\wedge 0,00262*10} = 60,066$$

La popolazione si è accresciuta a un tasso medio annuo continuo di **2,62** unità ogni 1.000 abitanti.

**Nel modello esponenziale il tempo è considerato una variabile continua, tiene quindi conto di intervalli infinitesimi.**

**Il tasso continuo è il più utilizzato poiché rispecchia un modello di accrescimento della popolazione più aderente alla realtà, che segue uno sviluppo esponenziale.**

# Esercizio: calcolo dei tassi medi di incremento

Dal 1980 al 1990 la popolazione del Kenya è crescita a un ritmo elevato passando da:

16,632 milioni ($P_0$)

↓

25,130 milioni (Pt+n)

$r_a = 0{,}05109$ $r_g = 0{,}04214$ $r_c = 0{,}04127$

***Le differenze dei tassi di incremento non sono così elevate se la popolazione ha un ritmo di crescita piuttosto lento.**
**Se, invece, si tratta di una popolazione sottoposta a una forte crescita le differenze tra i modi di calcolare la crescita sono più evidenti.**

# Formule

$$r_a = \frac{P_t - P_0}{P_0 * n}$$

$$r_g = \left(\frac{P_t}{P_0}\right)^{\wedge 1/n} - 1$$

$$r_c = \frac{1}{n} \log_e \left[\frac{P_t}{P_0}\right]$$

# Tempo di raddoppio

Un parametro molto importante che descrive la velocità di una crescita esponenziale è il **tempo di raddoppio**.
Sono i giorni/anni necessari affinché una popolazione raddoppi la propria numerosità.
Più è piccolo il valore del tempo di raddoppio e più velocemente cresce la curva esponenziale.
Supponiamo di avere una crescita esponenziale con base 2: al giorno 1 avrò due casi, al giorno due avrò 4 casi, al giorno 3 avrò 8 casi e così via.
Si parte dal calcolo del tasso medio annuo di variazione della popolazione secondo la legge continua:

$$r_c = \frac{1}{n} \log_e \left[ \frac{P_{(t+n)}}{P_0} \right]$$

$$n = \frac{\log_e \frac{P_{(t+n)}}{P_0}}{r_c}$$

$$\frac{P_{(t+n)}}{P_0} = 2 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{\log_e 2}{r_c}$$

# Calcolo del tempo di raddoppio/dimezzamento

| Valore $a$ | $\log_e a$ | $\log_e \frac{1}{a}$ | $Log_{10} = a$ | $Log_{10} \frac{1}{a}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 2 | 0,693147 | -0,693147 | 0,301030 | -0,301030 |
| 3 | 1,098612 | -1,098612 | 0,477121 | -0,477121 |
| 4 | 1,386294 | -1,386294 | 0,602060 | -0,602060 |
| 5 | 1,609438 | -1,609438 | 0,698970 | -0,698970 |
| 10 | 2,302585 | -2,302585 | 1,000000 | -1,000000 |

**La regola del 70**

$$n = \frac{70}{r_{c\%}}$$

**Tempo di dimezzamento**

$$\frac{P_{(t+n)}}{P_0} = \frac{1}{2}$$

$$n = \frac{-70}{r_{c\%}}$$

**Questo indice può essere calcolato per diversi parametri, come ad esempio il numero dei nuovi positivi a Sars-Cov-2, l'occupazione dei PL ospedalieri o il numero di decessi.**

# Relazione tra tasso d’incremento e tempo di raddoppio