UNIVERSITÁ
DEGLI STUDI
DI TERAMO

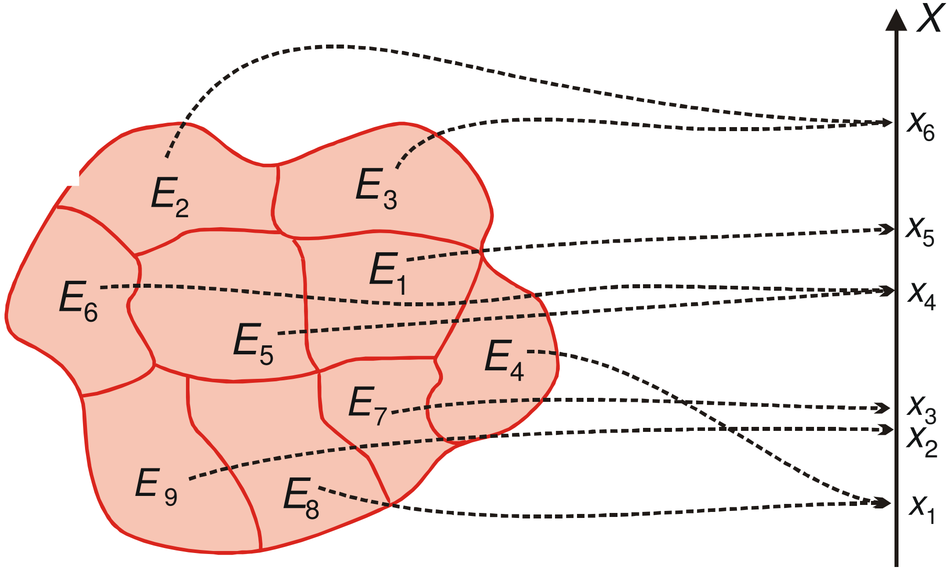
Cenni sulle variabili casuali e sulla v.c. binomiale

Introduzione

- Variabili casuali
- Importanza di un “modello di riferimento”
- Variabile casuale binomiale

Le variabili casuali

Una VARIABILE CASUALE è una variabile che assume un determinato valore in corrispondenza del verificarsi di un evento; ad ognuno dei valori che tale variabile casuale può assumere, noi associamo una probabilità, che rappresenta la probabilità che quell'evento si verifichi (e, dunque, la probabilità che la variabile casuale assuma quel determinato valore)



Cfr. Borra-Di Ciaccio, pag. 196

Le variabili casuali - 2

Supponiamo di fare tre lanci con una moneta. Cosa può accadere?

1) T ; T ; T
2) T ; T ; C
3) T ; C ; T
4) T ; C ; C
5) C ; T ; T
6) C ; T ; C
7) C ; C ; T
8) C ; C ; C

O volte T

$$P(0) = \frac{C.F.}{C.P.}$$

1 volta T

$$P(1) = \frac{C.F.}{C.P.}$$

2 volte T

$$P(2) = \frac{C.F.}{C.P.}$$

X_i	$P(X_i)$
0	$1/8 = 0{,}125$
1	$3/8 = 0{,}375$
2	$3/8 = 0{,}375$
3	$1/8 = 0{,}125$
	$8/8 = 1$

Le variabili casuali - 3

Variabili casuali → Probabilità

Le considerazioni che possiamo fare dall’osservazione della variabile casuale precedente provengono dall’osservazione di un modello che è stato generato prendendo in considerazione tutti i possibili eventi che possono accadere a seguito di un esperimento

Decisioni

→ Esperienza particolare

→ Probabilità (Oggettivo!!)

Le variabili casuali - 4

Variabile casuale DISCRETA

E' una variabile le cui modalità possono essere messe in corrispondenza con l'insieme dei numeri interi (1 – 2 – 3 . . . .)

Variabile casuale CONTINUA

E' una variabile le cui modalità possono essere messe in corrispondenza con l'insieme dei numeri reali (con virgola)

Le variabili casuali - 5

X_i	$P(X_i)$	$X_i \cdot P(X_i)$	$X_i - E(X)$	$[X_i - E(X)]^2$	$[X_i - E(X)]^2 \cdot P(X_i)$
0	0,125	$0 \cdot 0{,}125 = 0$	$-1{,}5$	2,25	0,281
1	0,375	$1 \cdot 0{,}375 = 0{,}375$	$-0{,}5$	0,25	0,094
2	0,375	$2 \cdot 0{,}375 = 0{,}750$	0,5	0,25	0,094
3	0,125	$3 \cdot 0{,}125 = 0{,}375$	1,5	2,25	0,281
	1	1,5			0,750

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot P(X_i) = 1{,}5$$

$$VAR(X) = \sum_{i=1}^{n} [X_i - E(X)]^2 \cdot P(X_i) = 0{,}75$$

La V. C. Bernoulliana

Eventi dicotomici (che possono verificarsi in due modi)

Si – No; Vero – Falso; Successo - Insuccesso

X_i	$P(X_i)$
0	$1-\pi$
1	π
	1

$$E(X)=\pi$$

$$VAR(X)=\pi\cdot(1-\pi)$$

La V. C. Binomiale

la Variabile Casuale Binomiale:

più prove di tipo bernoulliano indipendenti tra loro
(n lanci con una moneta, n lanci con un dado, ecc…)

La binomiale rappresenta la probabilità di ottenere un certo numero di successi in n prove indipendenti ripetute nelle stesse condizioni (ad esempio, la probabilità che esca 3 volte testa in 5 lanci di una moneta)

5 prove 3 successi π = prob. successo

T; T; T; C; C $\pi \times \pi \times \pi \times (1-\pi) \times (1-\pi) \longrightarrow \pi^3(1-\pi)^2$

La V. C. Binomiale - 2

In generale:

n prove   x successi $\longrightarrow$ $\pi^x(1-\pi)^{n-x}$

Manca qualcosa?   SI…

T; T; T; C; C   T; C; T; C; T   C; C; T; T; T

$$P(X) = \binom{n}{x} \boxed{\pi^x} \cdot \boxed{(1-\pi)^{n-x}}$$

$$E(X) = n \cdot \pi \qquad VAR(X) = n \cdot \pi \cdot (1-\pi)$$

La V. C. Binomiale - esempio

Supponiamo di effettuare 5 lanci di un dado. Si consideri l'evento: E = {Uscita di un numero inferiore a 3} .

Qual è la probabilità che l'evento E si verifichi:

a) 2 volte; b) almeno 3 volte; c) meno di 2 volte?

a) 2 volte

$$P(X) = \binom{n}{x} \pi^{x} \cdot (1-\pi)^{n-x} = \binom{5}{2} 0{,}333^{2} \cdot (1 - 0{,}333)^{5-2} =$$

$$= \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot 0{,}333^{2} \cdot (0{,}667)^{3} = 10 \cdot 0{,}111 \cdot 0{,}297 = 0{,}329$$

$$\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = \frac{20}{2} = 10$$

$$\binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{5.040}{24} = 210$$

La V. C. Binomiale - esempio

b) almeno 3 volte

$$P(X)=\begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix}\pi^{x}\cdot(1-\pi)^{n-x}=\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}0{,}333^{3}\cdot(1-0{,}333)^{5-3}=$$

$$=\frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3}\cdot0{,}333^{3}\cdot(0{,}667)^{2}=10\cdot0{,}037\cdot0{,}445=0{,}165$$

Esattamente 3 volte!

Esattamente 4 volte!

$$P(X)=\begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix}\pi^{x}\cdot(1-\pi)^{n-x}=\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}0{,}333^{4}\cdot(1-0{,}333)^{5-4}=$$

$$=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\cdot0{,}333^{4}\cdot(0{,}667)^{1}=5\cdot0{,}012\cdot0{,}667=0{,}040$$

La V. C. Binomiale - esempio

Esattamente 5 volte!

$$P(X) = \binom{n}{x} \pi^{x} \cdot (1-\pi)^{n-x} = \binom{5}{5} 0{,}333^{5} \cdot (1 - 0{,}333)^{5-5} =$$

$$= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot 0{,}333^{5} \cdot (0{,}667)^{0} = 1 \cdot 0{,}004 \cdot 1 = 0{,}004$$

La probabilità che l’evento E si verifichi almeno 3 volte sarà data da:

$$P(x \geq 3) = P(3) + P(4) + P(5) = 0{,}165 + 0{,}040 + 0{,}004 = 0{,}209$$

c) meno di 2 volte $P(x = 2) = 0{,}329$ $P(x \geq 3) = 0{,}209$

$$P(x < 2) = 1 - P(x = 2) - P(x \geq 3) = 1 - 0{,}329 - 0{,}209 = 0{,}462$$

Variabili casuali – competenze acquisite

Cosa abbiamo imparato?

- Variabili casuali
- Decidere su modelli probabilistici
- Analizzare eventi dicotomici
- Prove indipendenti
- V.C. Binomiale

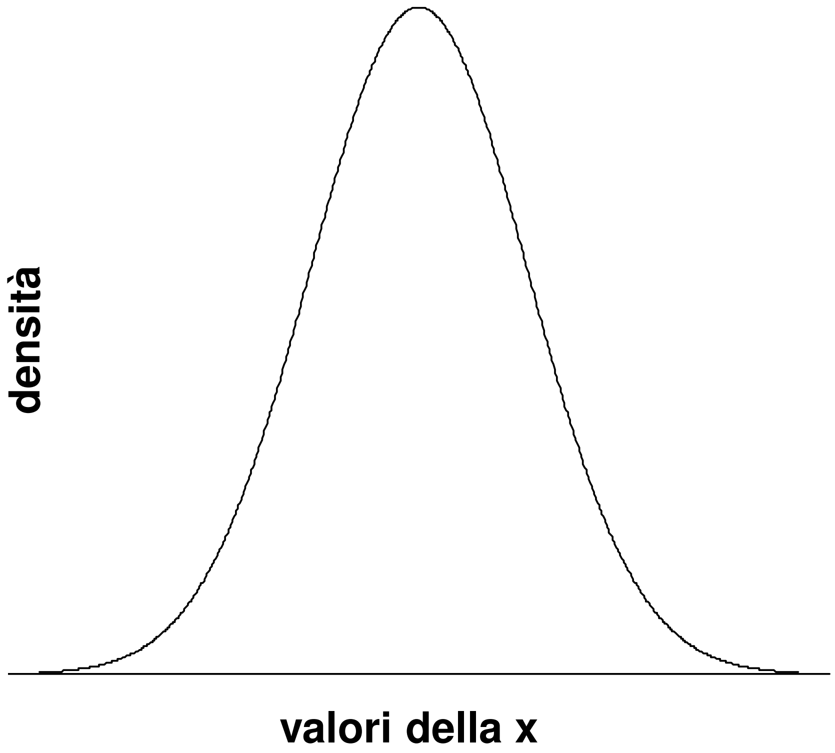
Distribuzione Normale

Introduzione

- Introdurre la curva normale
- Approssimare i dati reali con tale modello
- Utilizzo delle tavole della c.n. standardizzata

La curva normale

Approssima molto bene i fenomeni sociali, economici, demografici

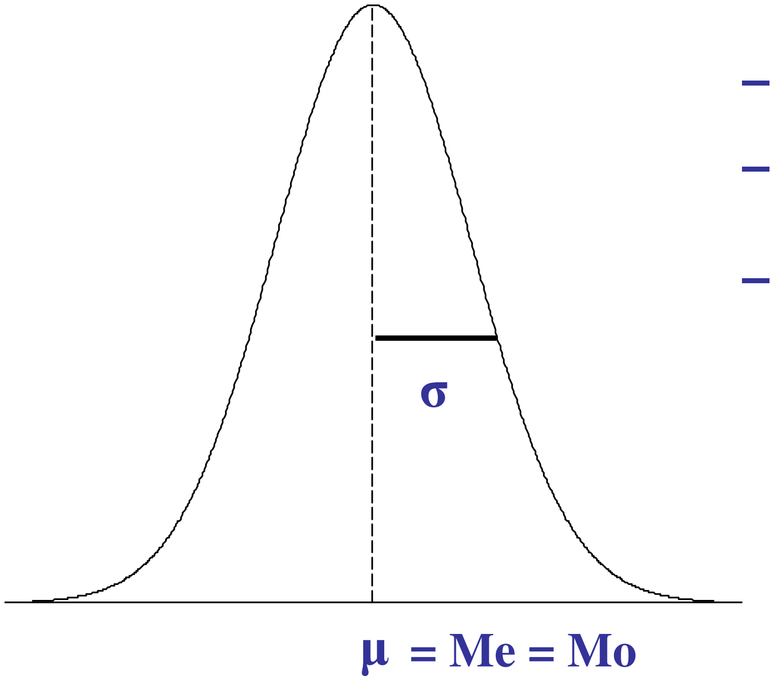


$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$\pi = 3,14$

$e = 2,72$

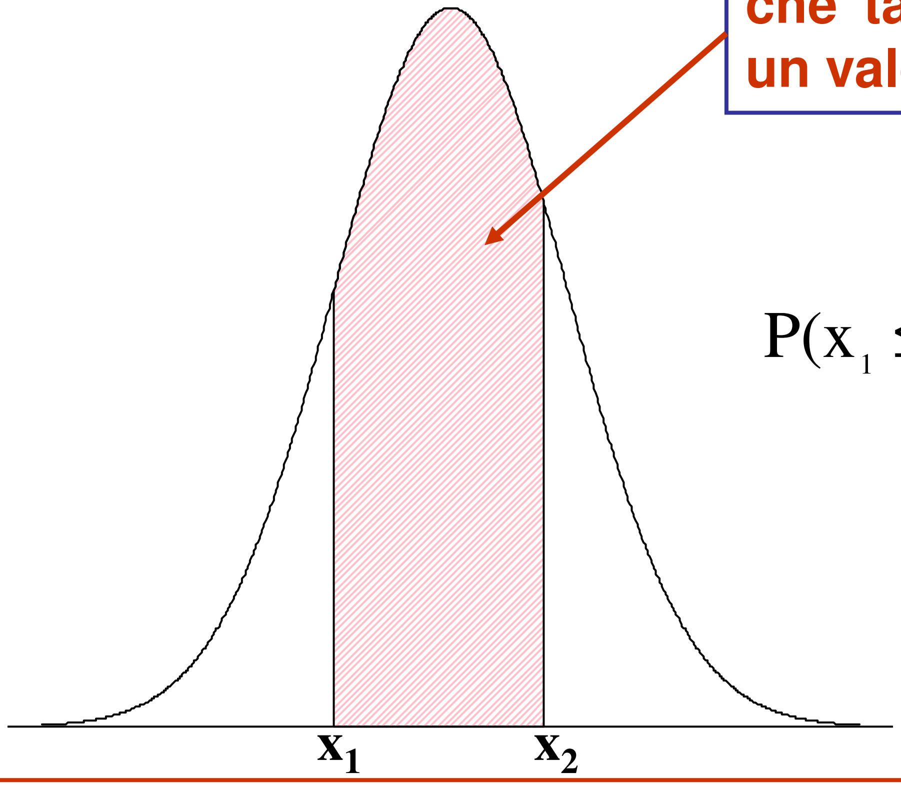
La curva normale - 2



- può variare da –∞ a +∞
- ha un andamento asintotico rispetto all'asse delle ascisse
- ha media pari a μ e varianza pari a σ^2
- è simmetrica rispetto alla media
- ha media, moda e mediana coincidenti
- cresce da –∞ a μ; decresce da μ a +∞

La curva normale - 3

E' una curva di densità di probabilità



tale area rappresenta la probabilità che tale variabile casuale assuma un valore compreso tra x_1 ed x_2

$$P(x_1 \le x \le x_2) = \boxed{\int_{x_1}^{x_2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Standardizzazione

Standardizzazione: Trasformazione lineare dei dati effettuata ricorrendo ai due parametri fondamentali di una distribuzione: la media e lo scarto quadratico medio, secondo la formula riportata di seguito:

$$Z = \frac{x_i - \overline{x}}{\sigma}$$

Media aritmetica = 0

Scarto quadratico medio = 1

Confrontare distribuzioni aventi differenti unità di misura;

Esempio 3

Altezze: → **Media: 170 cm ; S.Q.M. = 10 cm**

Pesi: → **Media: 70 kg ; S.Q.M. = 5 kg**

	Altezza	Peso
A	190	85
B	165	75
C	185	80

Individuo A:

$$Z_A = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} = \frac{(190 - 170)}{10} = \frac{20}{10} = 2$$

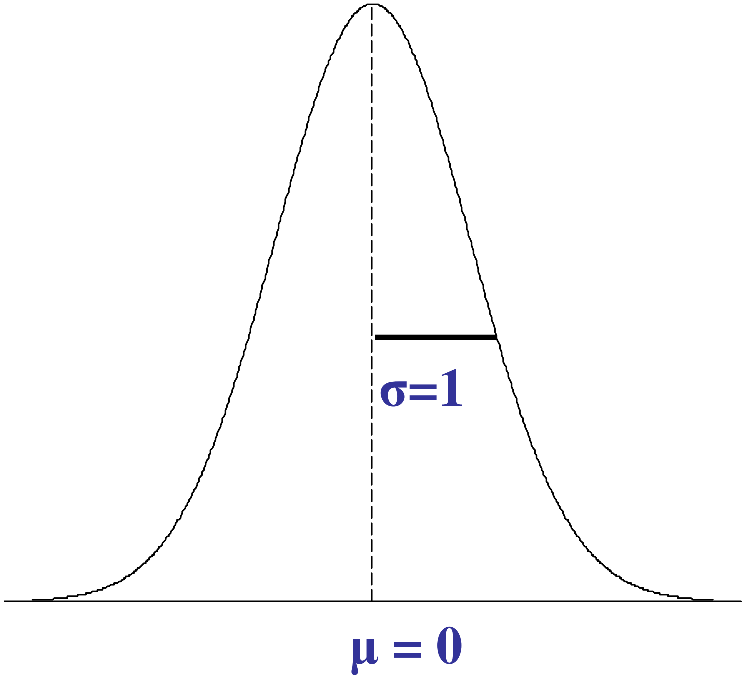
$$Z_P = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} = \frac{(85 - 70)}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

Individuo B:

$$Z_A = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} = \frac{(165 - 170)}{10} = \frac{-5}{10} = -\frac{1}{2}$$

$$Z_P = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} = \frac{(75 - 70)}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

La curva normale standardizzata



$\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma \longrightarrow \boxed{68{,}27\%}$

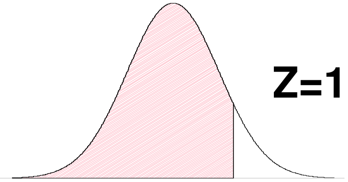
$\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma \longrightarrow \boxed{95{,}45\%}$

$\mu - 3\sigma \leq x \leq \mu + 3\sigma \longrightarrow \boxed{99{,}73\%}$

$\mu - 1{,}96\sigma \leq x \leq \mu + 1{,}96\sigma \longrightarrow \boxed{95\%}$

La curva normale standardizzata

Area sottostante la curva della distribuzione normale standardizzata



Z=1,23

Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

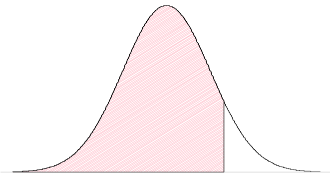
La curva normale st. – es. 1

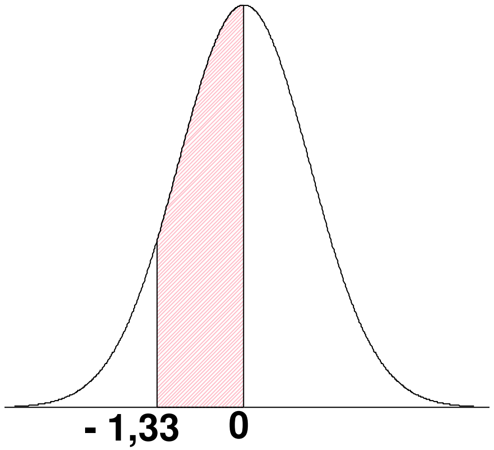
Una compagnia di trasporto ha calcolato che i propri camion coprono una distanza media annua di 50.000 km., con uno s.q.m. di 12.000 km. Si suppone che la distribuzione segua un andamento approssimativamente normale. Qual è la probabilità che un camion copra una distanza: A) compresa tra 34.000 e 50.000 km? B) compresa tra 34.000 e 38.000 km? C) inferiore a 30.000 o superiore a 60.000 km?

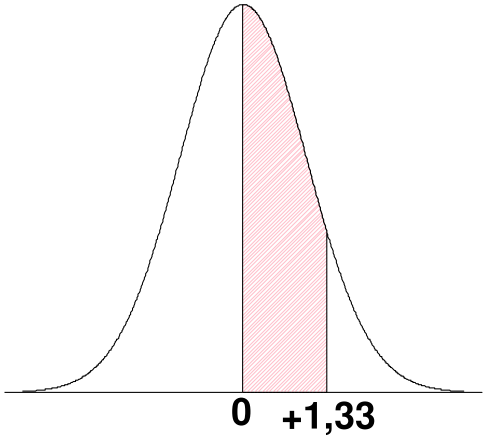
A) Compresa tra 34 e 50

$$z_1 = \frac{34-50}{12} = \frac{-16}{12} = -1{,}33$$

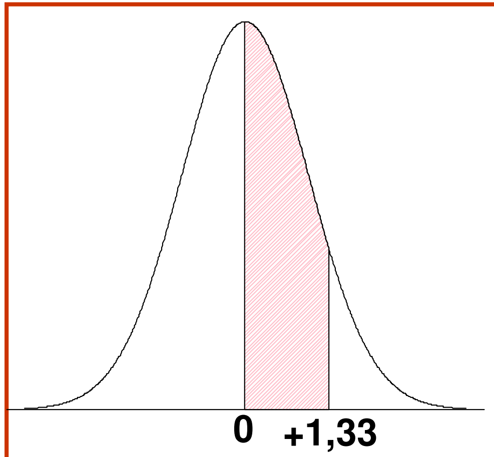
$$z_2 = \frac{50-50}{12} = \frac{0}{12} = 0$$

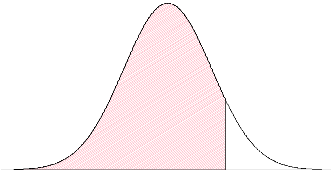






La curva normale st. – es. 1





Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382

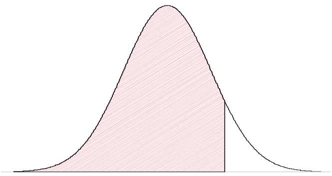
$P(-1{,}33 \leq z \leq 0)=$

$= 0{,}9082 - 0{,}5 = 0{,}4082$

40,82%

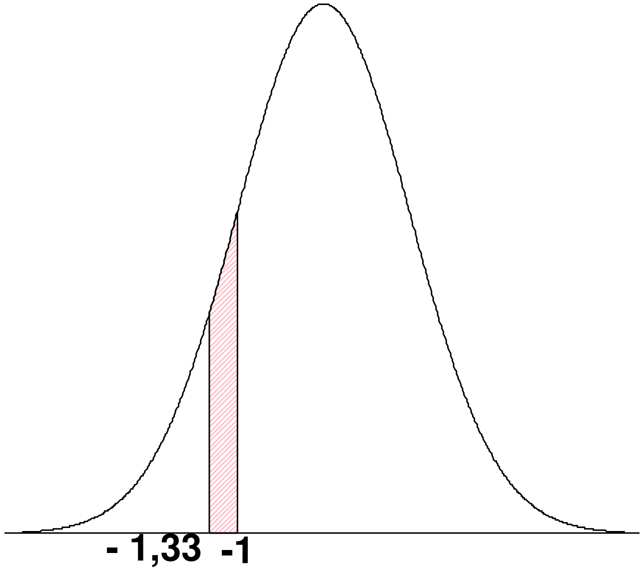
La curva normale st. – es. 1

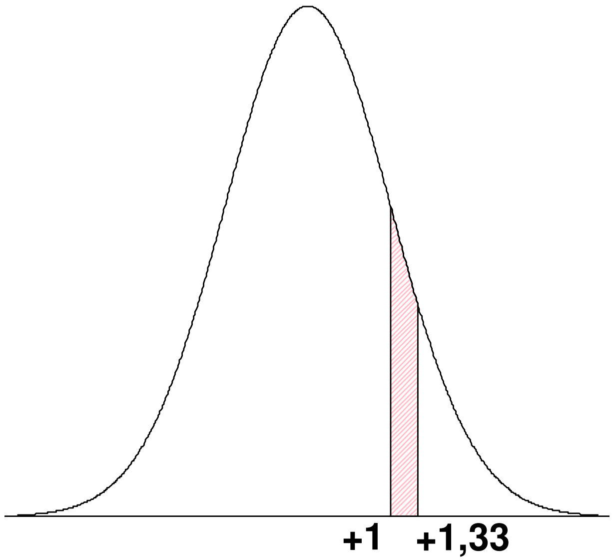
B) Compresa tra 34 e 38



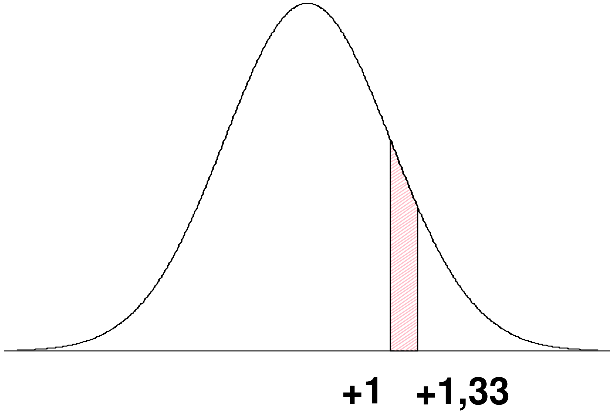
$$z_1 = \frac{34-50}{12} = \frac{-16}{12} = -1{,}33$$

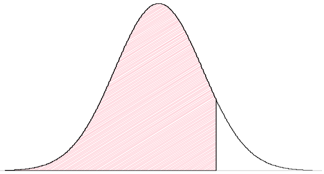
$$z_2 = \frac{38-50}{12} = \frac{-12}{12} = -1$$





La curva normale st. – es. 1





Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382

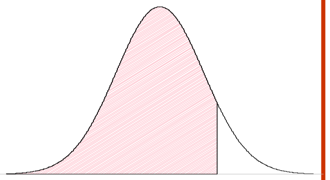
P(-1,33≤ z ≤-1) =

= 0,9082 - 0,8413 = 0,0669

6,69%

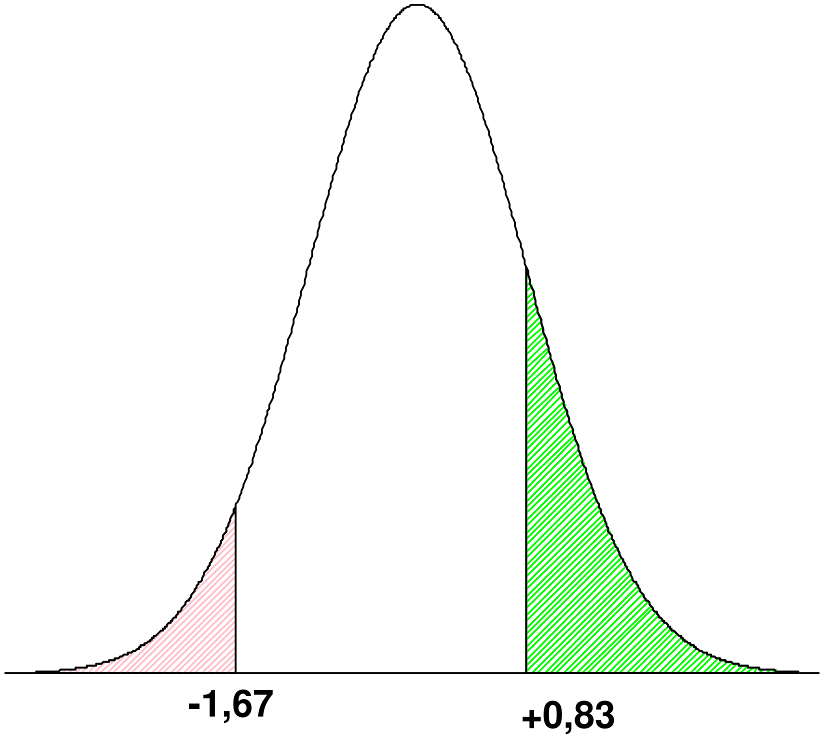
La curva normale st. – es. 1

C) Inferiore a 30 o superiore a 60

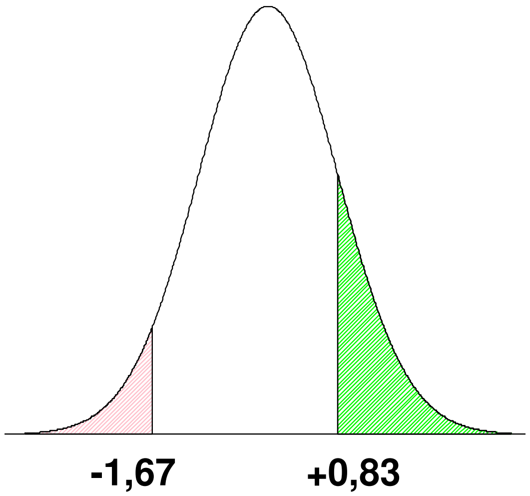


$$z_1 = \frac{30-50}{12} = \frac{-20}{12} = -1{,}67$$

$$z_2 = \frac{60-50}{12} = \frac{10}{12} = 0{,}83$$



La curva normale st. – es. 1

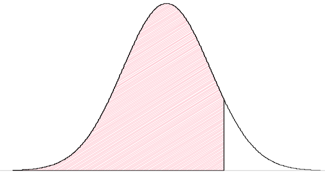


$P(z \leq -1{,}67) + P(z \geq 0{,}83) =$

$= (1 - 0{,}7967) + (1 - 0{,}9525) =$

$= 0{,}2033 + 0{,}0475 = 0{,}2508$

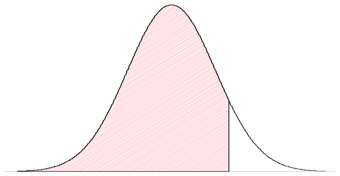
25,08%



Z	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0,0	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279
0,1	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675
0,2	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064
0,3	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443
0,4	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808
0,5	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157
0,6	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486
0,7	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794
0,8	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078
0,9	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340
1,0	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577
1,1	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790
1,2	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980
1,3	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147
1,4	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292
1,5	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418
1,6	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525
1,7	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616
1,8	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693

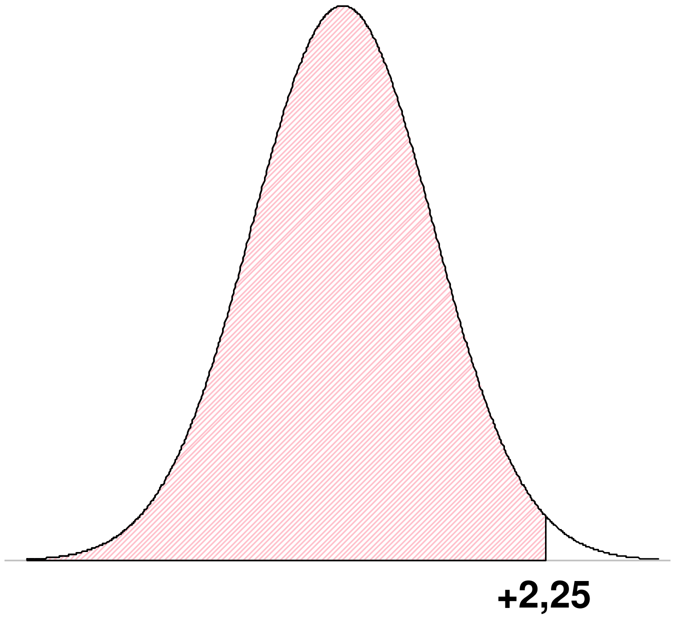
La curva normale st. – es. 2

Il risultato ottenuto ad un test da un gruppo di studenti si distribuisce come la curva normale con media pari a 73 e s.q.m. pari a 8. A) Qual è la probabilità che uno studente abbia riportato un voto non superiore a 91? B) Qual è la probabilità che uno studente abbia riportato un voto compreso tra 65 e 89? C) e compreso tra 81 e 89?

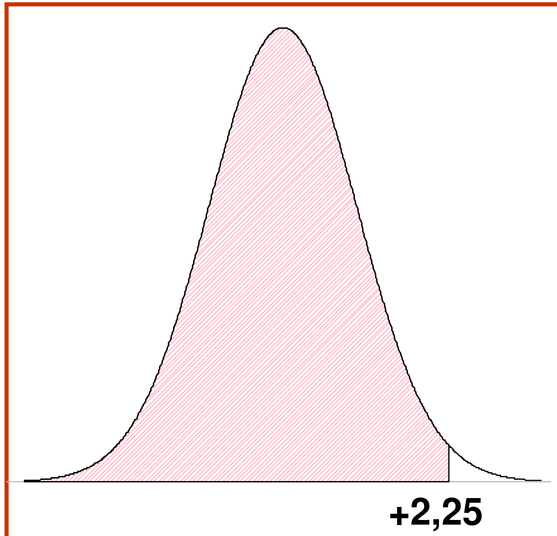


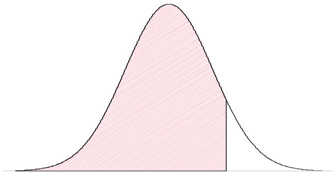
A) Non superiore a 91

$$z_1 = \frac{91-73}{8} = \frac{18}{8} = 2{,}25$$



La curva normale st. – es. 2





Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946

P(z ≤+2,25) = 0,9878

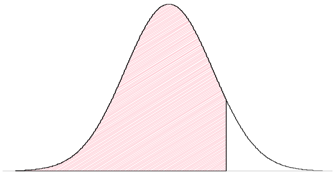
98,78%

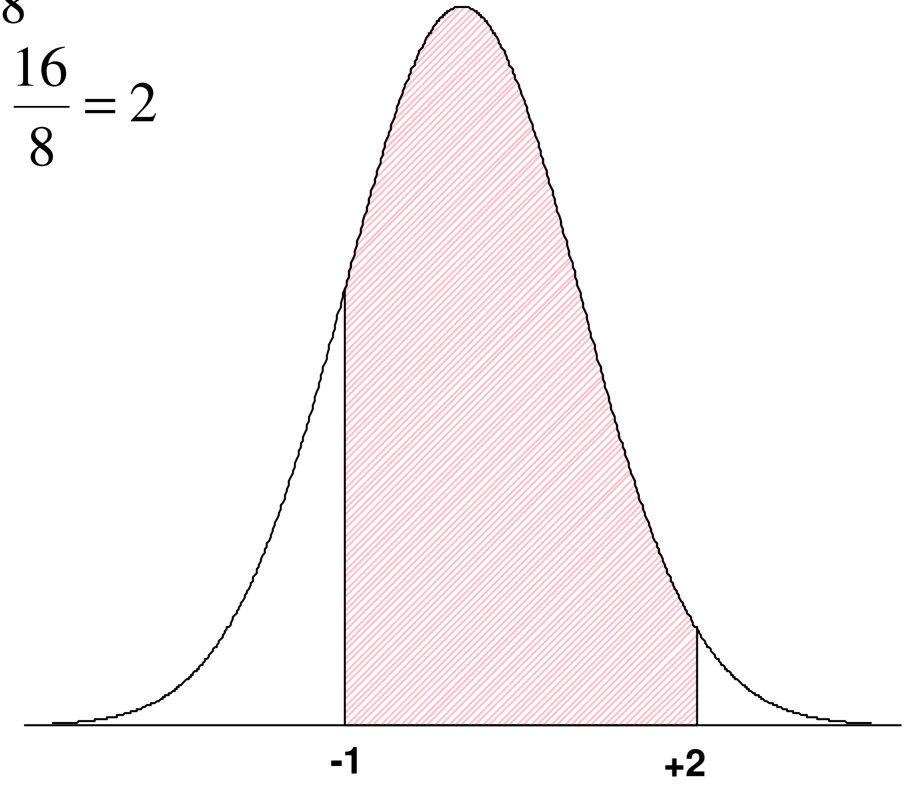
La curva normale st. – es. 2

B) Compreso tra 65 e 89

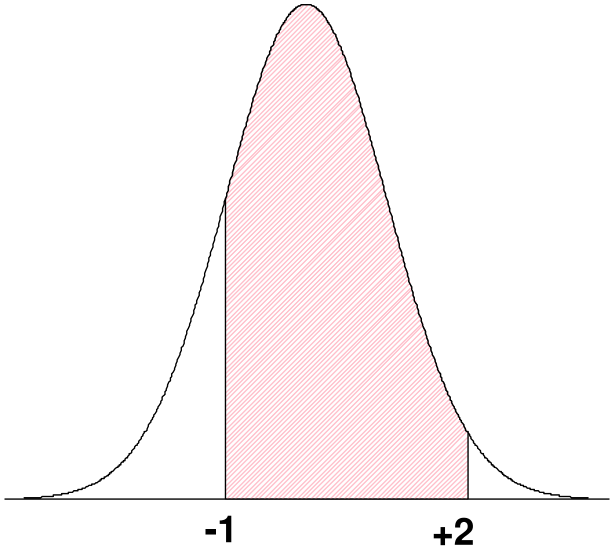
$$z_1 = \frac{65-73}{8} = \frac{-8}{8} = -1$$

$$z_2 = \frac{89-73}{8} = \frac{16}{8} = 2$$





La curva normale st. – es. 2

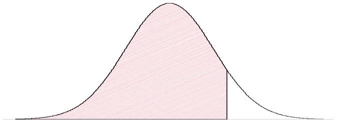


$P(-1 \leq z \leq +2) =$

$= (0{,}9772 - 0{,}5) + (0{,}8413 - 0{,}5) =$

$= 0{,}4772 + 0{,}3413 = 0{,}8185$

81,85%



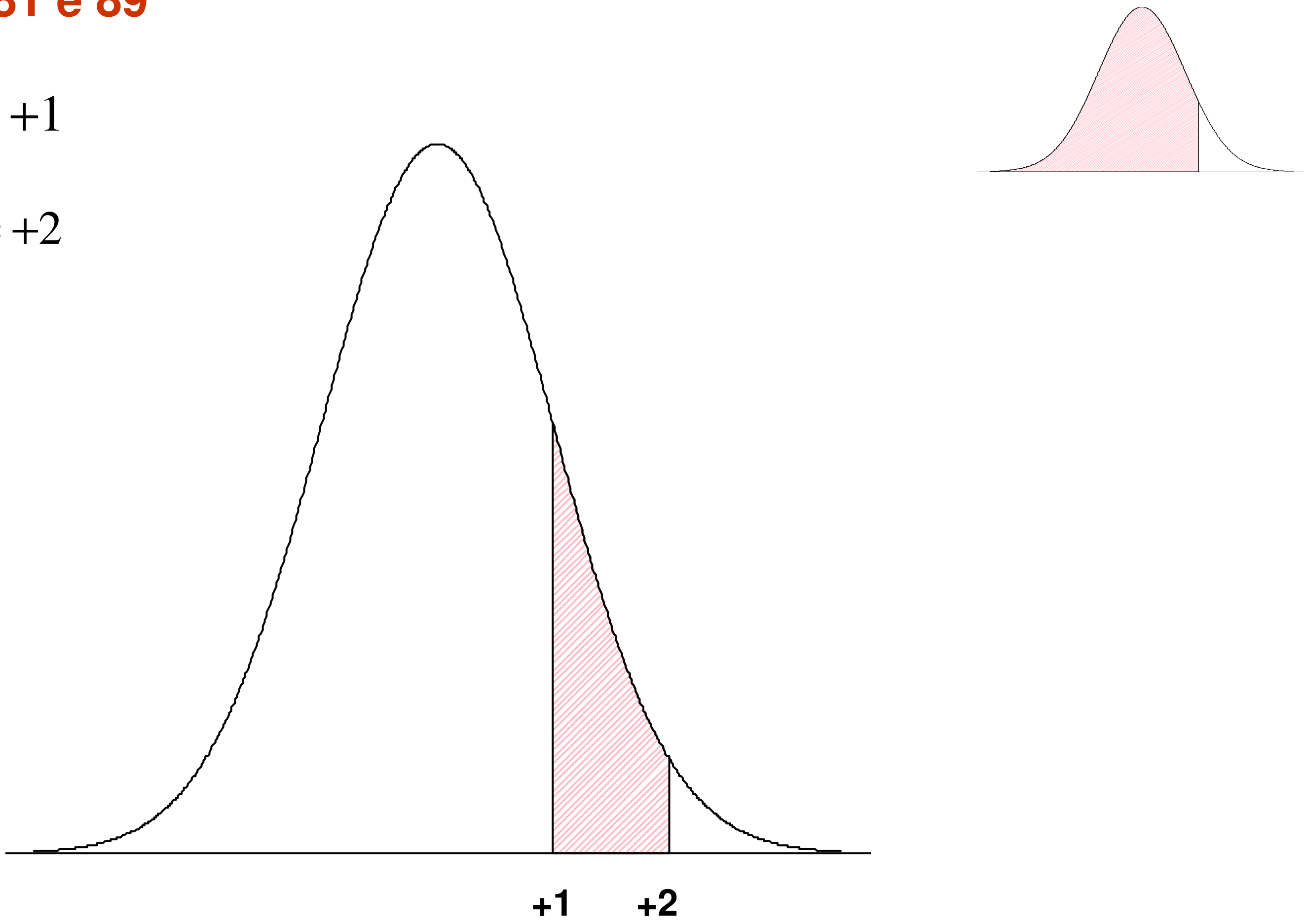
Z	0,00	0,01	0,02	0,03
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925

La curva normale st. – es. 2

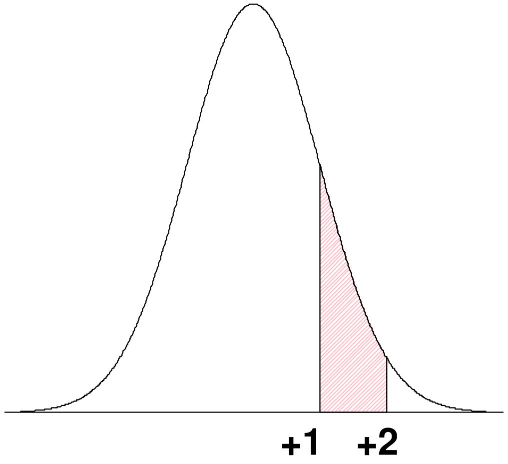
B) Compreso tra 81 e 89

$$z_1 = \frac{81-73}{8} = \frac{8}{8} = +1$$

$$z_2 = \frac{89-73}{8} = \frac{16}{8} = +2$$



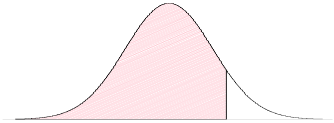
La curva normale st. – es. 2



$P(+1 \leq z \leq +2) =$

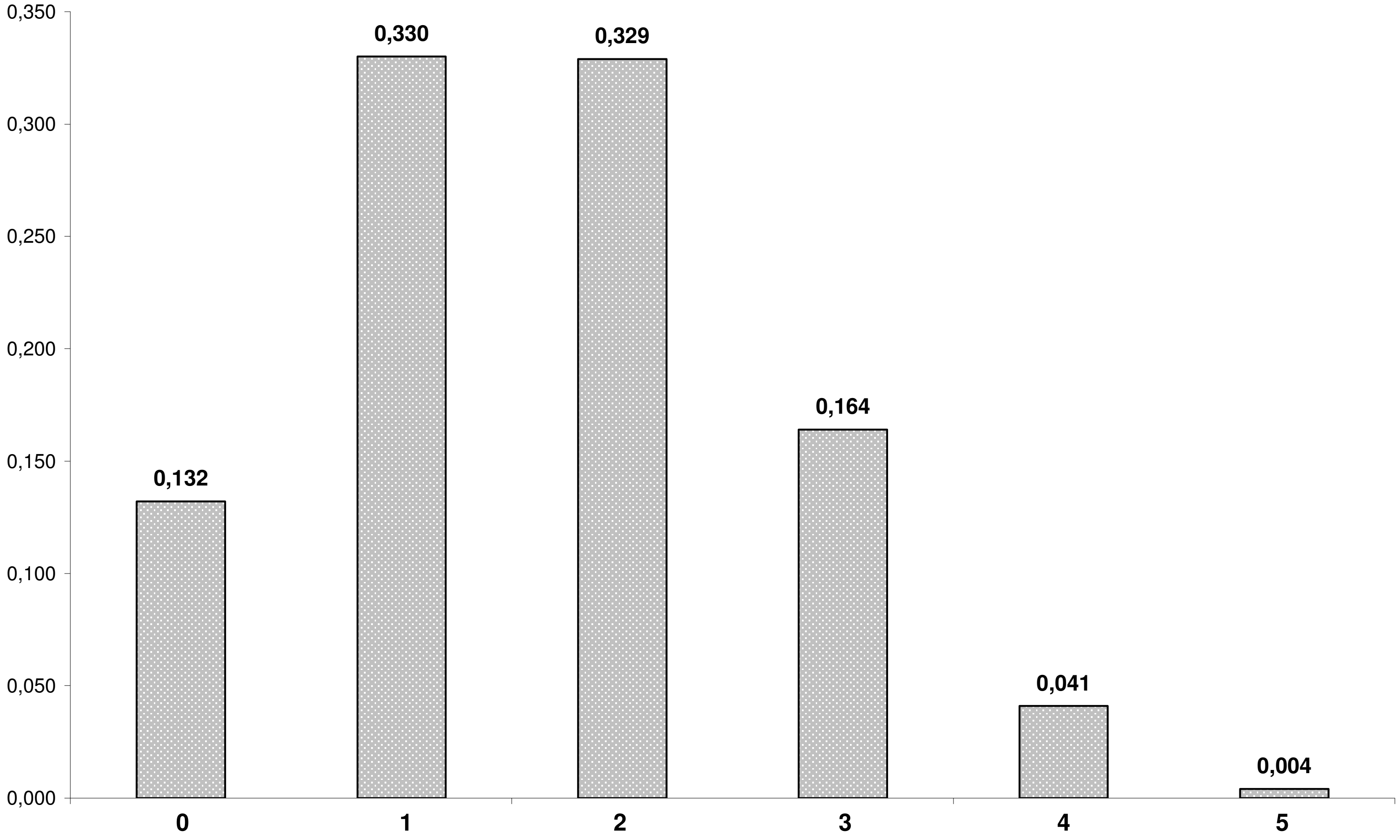
$= (0{,}9772 - 0{,}8413) = 0{,}1359$

13,59%

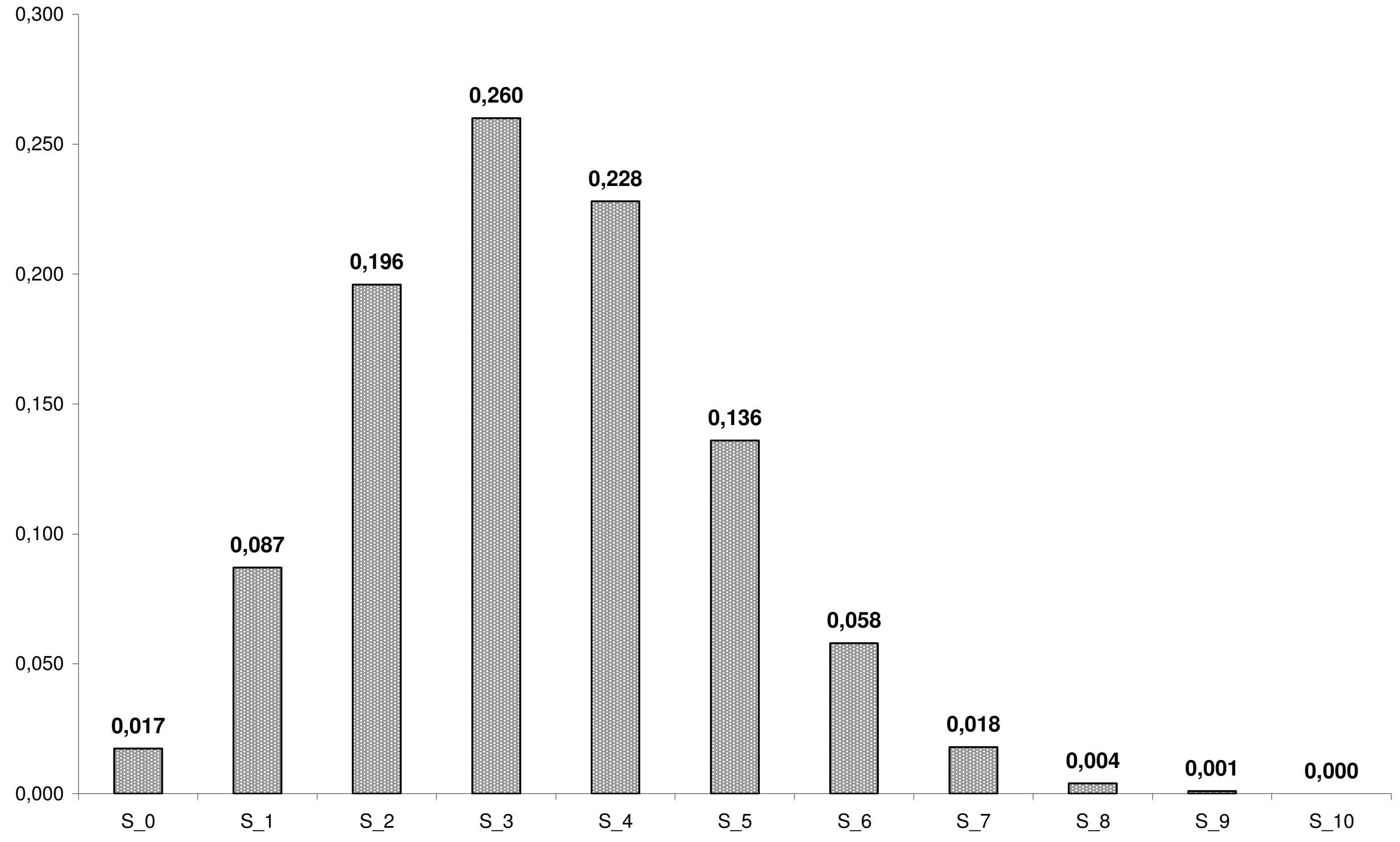


Z	0,00	0,01	0,02	0,03
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925

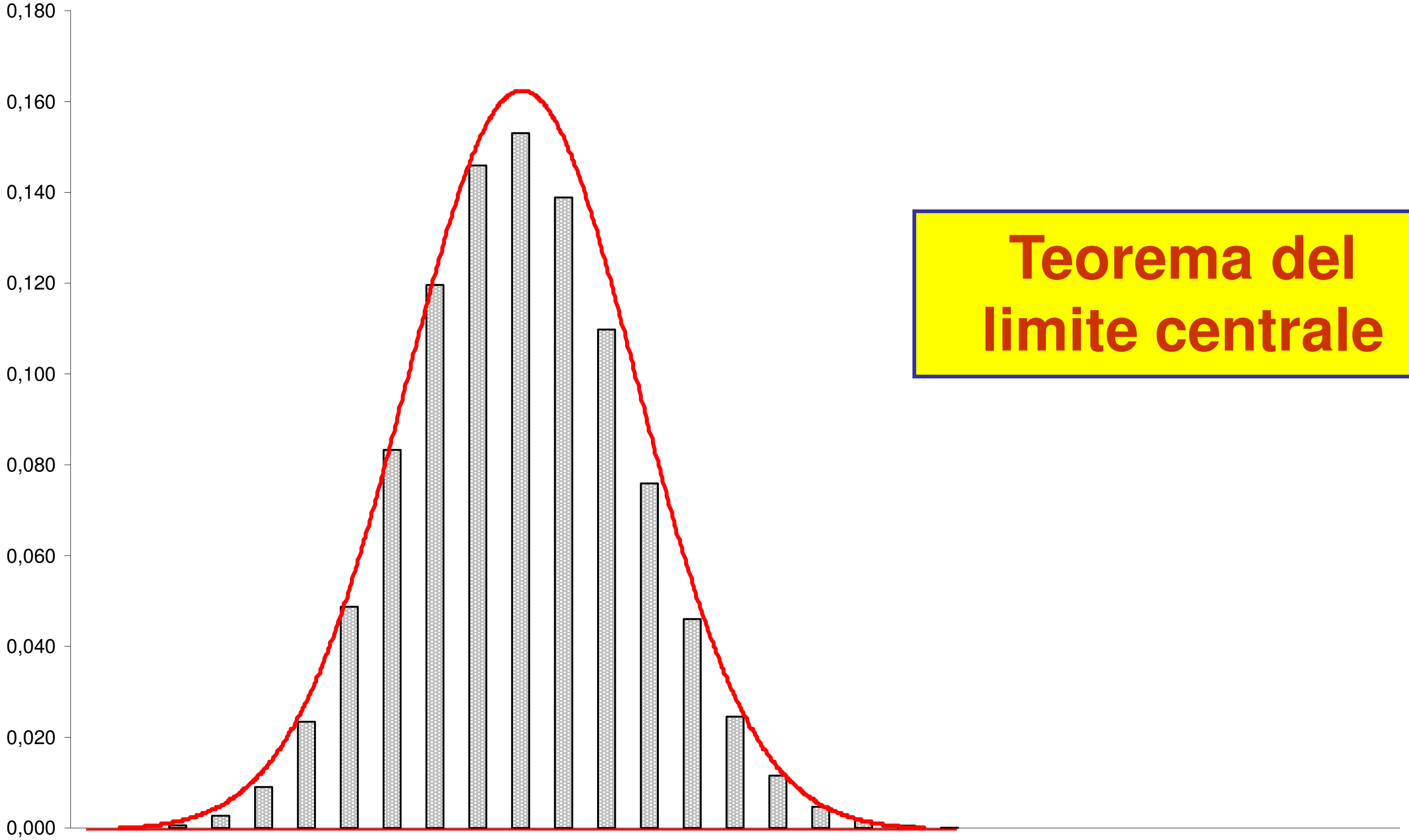
Binomiale e Normale



Binomiale e Normale



Binomiale e Normale



Teorema del limite centrale

V.C. Normale – competenze acquisite

Cosa abbiamo imparato?

- Curva Normale
- Valori standardizzati
- Approssimare la realtà con la Normale
- Teorema del limite centrale