LE FUNZIONI E
IL PIANO CARTESIANO

Scopo centrale, sia della teoria statistica che della economica, è proprio quello di esprimere ed analizzare le *relazioni*, esistenti tra le variabili statistiche ed economiche, che, in linguaggio matematico, sono denominate *funzioni* e che, assieme ai numeri, rappresentano i mattoni fondamentali della Matematica.
Il termine *funzione* viene spesso utilizzato in numerosi settori della conoscenza ed in una notevole varietà di situazioni più o meno quotidiane, anche se con significati specifici differenti: in ambito statistico, ad esempio, tale concetto consente di analizzare come varia il consumo rispetto al reddito o ancora il legame che intercorre tra il prodotto interno lordo ed il tasso di disoccupazione; in ambito economico, invece, si potrebbe studiare come varia la spesa pubblica rispetto al prodotto interno lordo; nel settore medico, inoltre, si potrebbe utilizzare un'espressione del tipo "la milza ha la funzione di riprodurre …"; ecc.
Dai precedenti esempi, però, non deve affatto sfuggire la presenza di una comune sfumatura dinamica, quasi di *causa-effetto*, con enfasi principalmente sull'*effetto*.

Ci occuperemo in questa sede di funzioni reali di una variabile reale, precisamente studieremo come varia una variabile in funzione di un'altra; in particolare, se la relazione è espressa da una *funzione lineare*, la variazione di una variabile è proporzionale a quella dell'altra e l'entità di suddetta variazione è espressa dalla *pendenza* della funzione stessa. Per funzioni non lineari, invece, l'effetto della variazione è indicato dalla *derivata prima* della funzione, concetto questo che generalizza quello più intuitivo di *pendenza*, usato solo per le funzioni lineari.

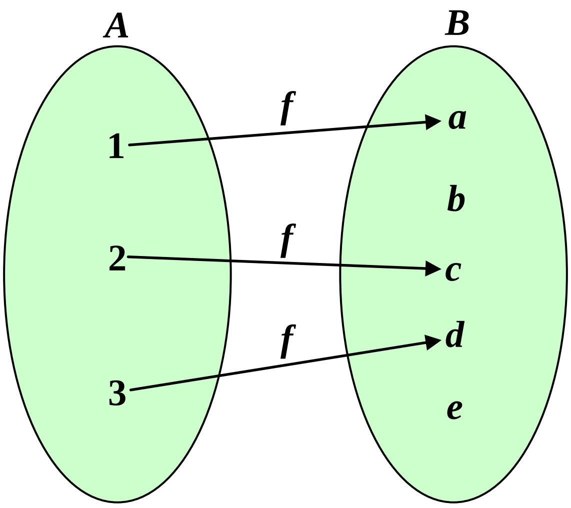
Definizione
Dati due insiemi A e B, contenuti nel campo reale $\mathbb{R}$, si definisce ***funzione reale di variabile reale*** una legge $f : A \to B$, di natura qualsiasi, che ad ogni elemento x di A associa <u>uno ed un solo</u> numero reale y dell'insieme B, ovvero:

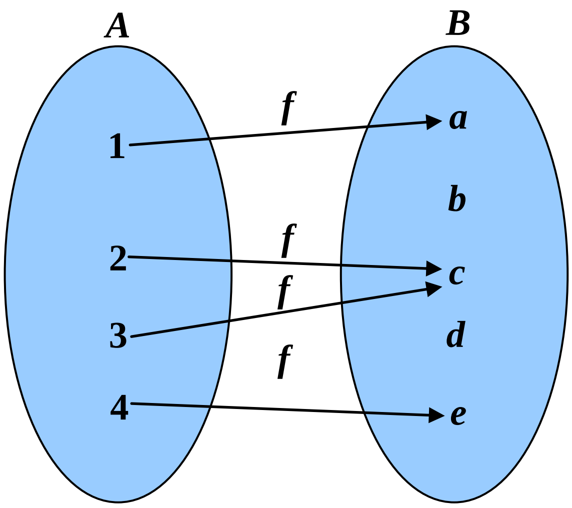
$$y = f(x) \qquad \text{con} \qquad x \in A, \quad y \in \mathbb{R}$$

L'insieme A si chiama ***campo di definizione*** o ***campo di esistenza*** o ***dominio*** ed indica esattamente le parti del piano cartesiano ove la funzione esiste; l'insieme B è detto, invece, ***codominio***.
L'elemento x è detto ***input*** o ***valore in ingresso*** o ***variabile indipendente*** e l'elemento y è detto ***output*** o ***valore in uscita*** o ***variabile dipendente***.

Dalla precedente definizione si evince subito che l'elemento di arrivo, appartenente al codominio, deve essere <u>unico</u>, cioè non ci devono essere elementi del primo insieme dai quali possano partire due o più frecce, ma da ogni elemento del dominio deve partire una ed una sola freccia, come illustrato dai seguenti diagrammi di Eulero-Venn.

Esempi di Funzioni





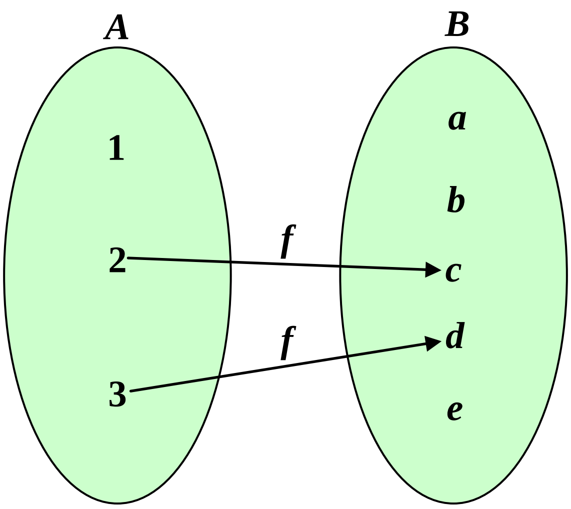
Osserviamo che, nel primo caso:

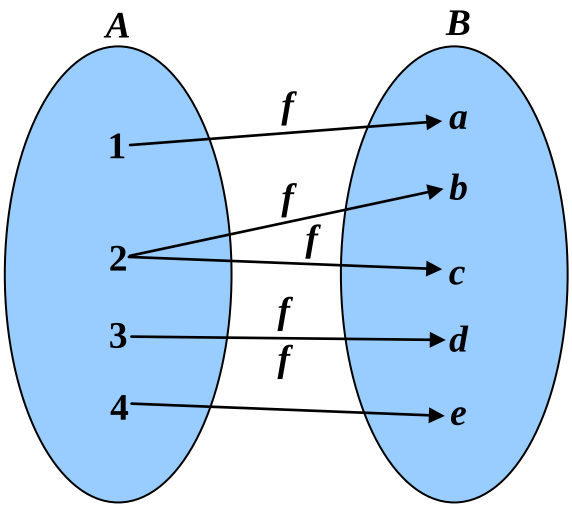
- ad ogni elemento dell’insieme *A* è associato uno ed un solo elemento dell’insieme *B*;
- esiste qualche elemento del codominio che non ha alcun corrispondente nel dominio (gli elementi *b* ed *e*).

Nel secondo caso, invece:

- ad ogni elemento dell’insieme *A* è associato uno ed un solo elemento dell’insieme *B*;
- esiste qualche elemento del codominio che ha più di un corrispondente nel dominio (gli elementi 2 ed 3).

Esempi di Non Funzioni





Osserviamo che, nel primo caso:

- non tutti gli elementi dell’insieme *A* hanno un corrispondente nell’insieme *B* (l’elemento 1).

Nel secondo caso, invece:

- vi è un elemento dell’insieme *A* (l’elemento 2) a cui sono associati due elementi dell’insieme *B* (gli elementi *b* e *c*).

Esempi

- Se A è l'insieme dei poligoni del piano e B è l'insieme delle aree di ciascun poligono, allora la relazione $f: A \to B$ è una funzione, ovvero una *corrispondenza univoca*, in quanto ogni poligono possiede una ed una sola area.
- Se A è l'insieme dei triangoli del piano e B è l'insieme dei cerchi inscritti in un triangolo, allora la relazione $f: A \to B$ è una funzione, in quanto per ogni triangolo esiste uno ed un solo cerchio inscritto.
- Se A è l'insieme dei numeri reali e B è l'insieme dei numeri reali aumentati di una unità, allora la relazione $f: A \to B$ è una funzione, in quanto ad ogni numero reale x resta sempre associato un solo numero reale della forma $x + 1$, cioè $y = f(x) = x + 1$.
- Se A è l'insieme dei numeri reali e B è l'insieme costituito da doppio di ciascun numero reale, allora la relazione $f: A \to B$ è una funzione, in quanto ad ogni numero reale x resta sempre associato un solo numero reale della forma $2x$, cioè $y = f(x) = 2x$: in tal caso, quindi, il dominio è dato dall'insieme dei numeri naturali, mentre il condominio è dato dall'insieme dei numeri pari.
- Se A è l'insieme delle madri e B è l'insieme dei figli, allora la relazione $f: A \to B$ non è una funzione, in quanto una madre può avere più figli.

Dal punto di vista analitico, le funzioni più semplici sono i ***monomi*** della forma $y = ax^k$, dove a è un numero reale, che prende il nome di ***coefficiente***, e k è un numero intero positivo, detto ***grado*** del monomio.

Esempi

$$y = 3x^4; \qquad y = -x^3; \qquad y = -5x^6$$

sono esempi di monomi, rispettivamente di quarto, terzo e sesto grado.

Una funzione costituita da più monomi prende il nome di ***polinomio*** o ***funzione polinomiale*** ed il suo ***grado*** è dato dal grado più alto fra quelli dei monomi che vi compaiono.

Esempi

$$y = 3x^4 - x^3 - 5x^6$$

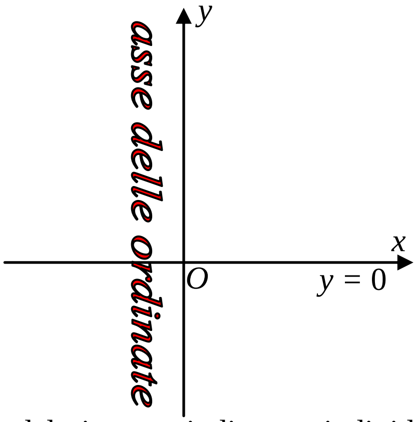
è un esempio di polinomio di grado 6, costituito esattamente dalla somma dei tre monomi considerati nell'esempio precedente.

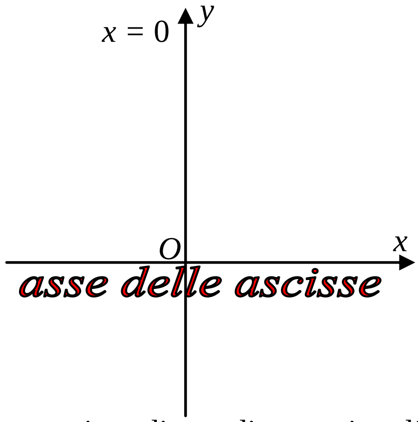
Per visualizzare, però, l'andamento di una funzione risulta utilissimo esaminare il suo *grafico* in un opportuno piano cartesiano.

Definizione

Dati due insiemi A e B, contenuti nel campo reale $\mathbb{R}$, si definisce ***grafico*** della funzione $f: A \to B$ l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali, della forma (x, y), con $x \in A$ ed $y \in B$, tale che sia $y = f(x)$.

Per poter tracciare il grafico di una funzione occorre considerare contemporaneamente due rette orientate, una per le x ed una per le y, perpendicolari tra di loro e tali che il loro punto di intersezione sia l’origine. La retta verticale, ovvero ***l’asse delle ordinate***, detta anche ***asse delle y***, assume valori positivi al di sopra dell’origine e valori negativi al di sotto; la retta orizzontale, ovvero ***l’asse delle ascisse***, detta anche ***asse delle x***, assume valori positivi a destra dell’origine e valori negativi a sinistra. La rappresentazione così ottenuta è detta ***piano cartesiano*** e le due rette che lo costituiscono sono dette ***assi coordinati***.



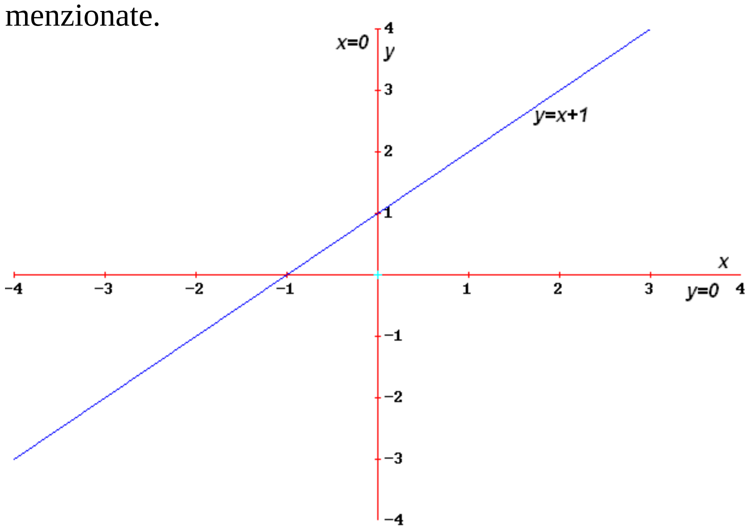


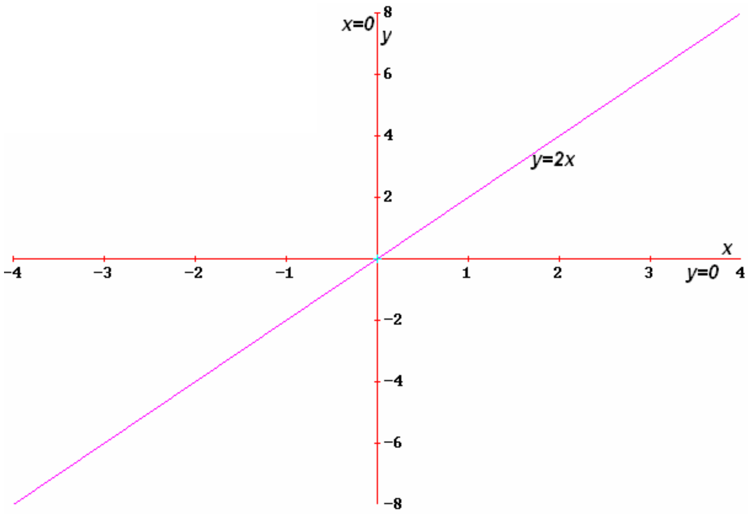
Ogni punto del piano, quindi, resta individuato da una <u>coppia ordinata</u> di numeri reali, il cui primo elemento rappresenta la posizione del punto lungo l’asse orizzontale, mentre il secondo indica la posizione del punto lungo l’asse verticale; viceversa, ciascuna coppia ordinata di numeri reali descrive un punto del piano cartesiano.

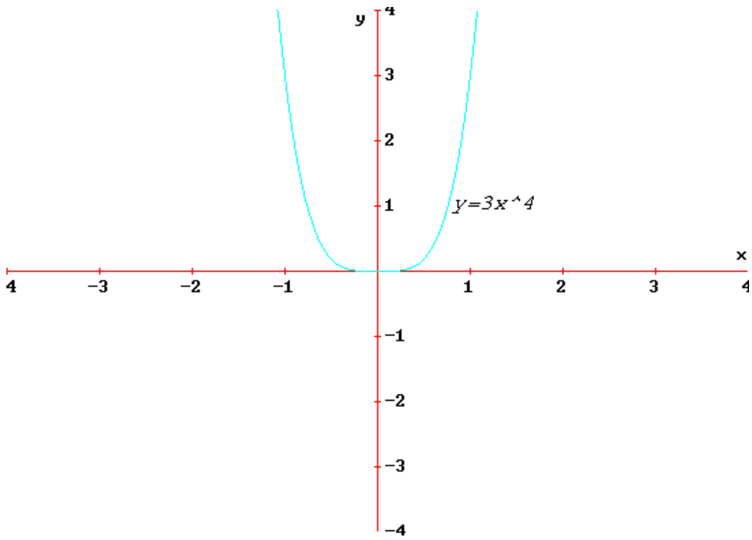
Ne segue, dunque, che, data una funzione *f*, il suo *grafico* è costituito da tutti quei punti del piano cartesiano le cui coordinate (x, y) soddisfano l’equazione $y = f(x)$.

Poiché, dunque, il piano è l’insieme di tutte le coppie di numeri, il grafico di una funzione può essere considerato come un sottoinsieme del piano che, per quasi tutte le funzioni di nostro interesse, è rappresentato da una curva (una retta oppure una linea curva).

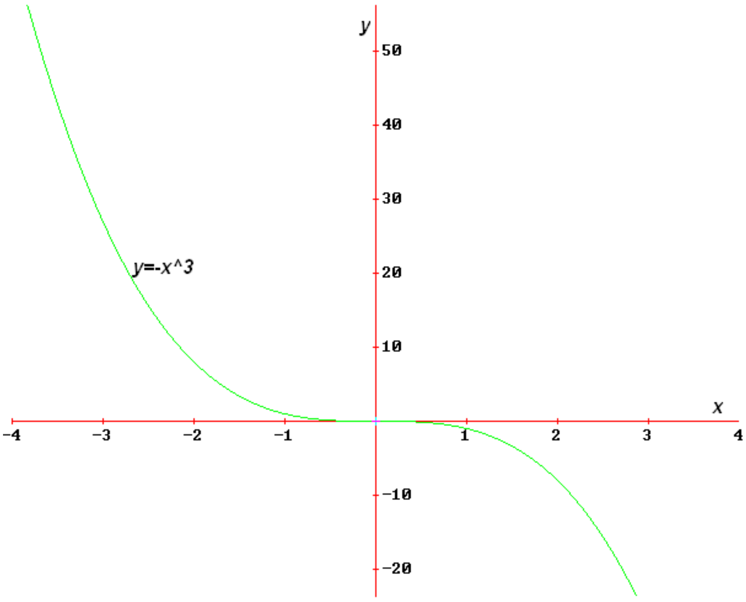
Di seguito riportiamo alcuni esempi di grafici, considerando le funzioni precedentemente menzionate.



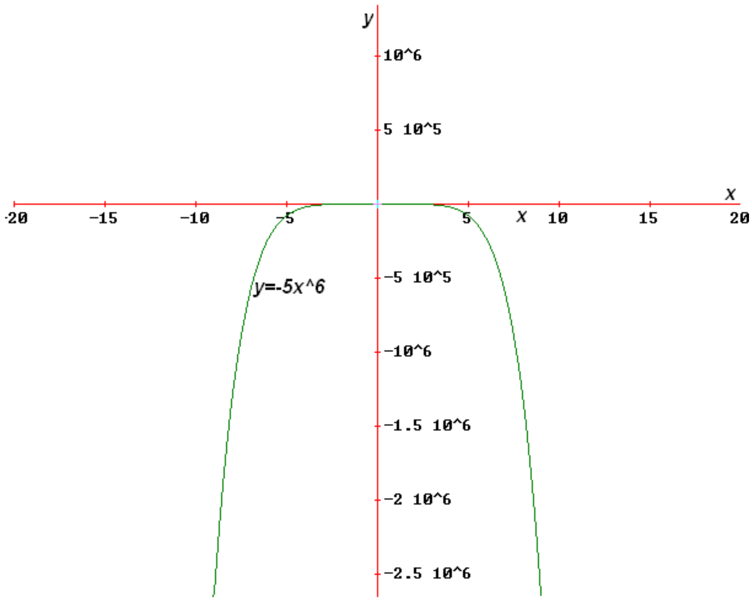




y=3x^4



y=-x^3



y=-5x^6

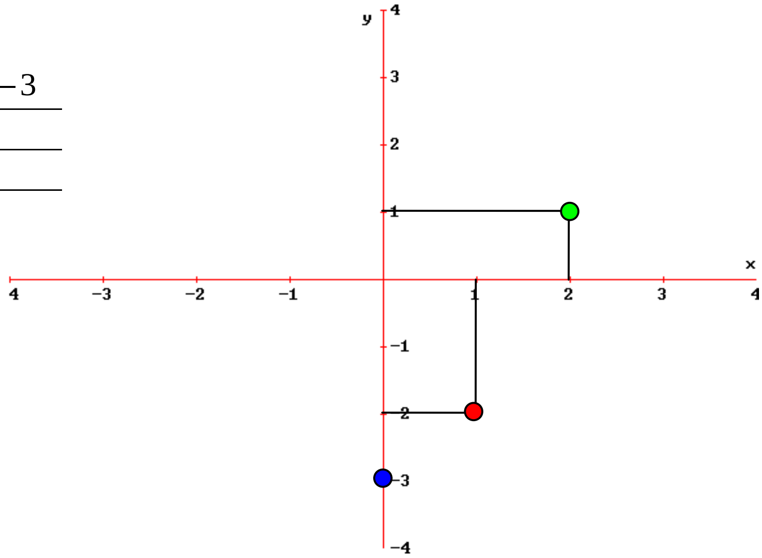
Esempio

Consideriamo la funzione di secondo grado:

$$y = f(x) = x^2 - 3$$

ovvero la funzione *f* che a ciascun numero reale *x* assegna il numero $x^2 - 3$. Costruiamo una piccola tabella dei valori scegliendo per *x* i numeri 0, 1 e 2 e calcolando, di conseguenza, i corrispondenti valori di *y*.

x	$y = x^2 - 3$
0	–3
1	–2
2	+1

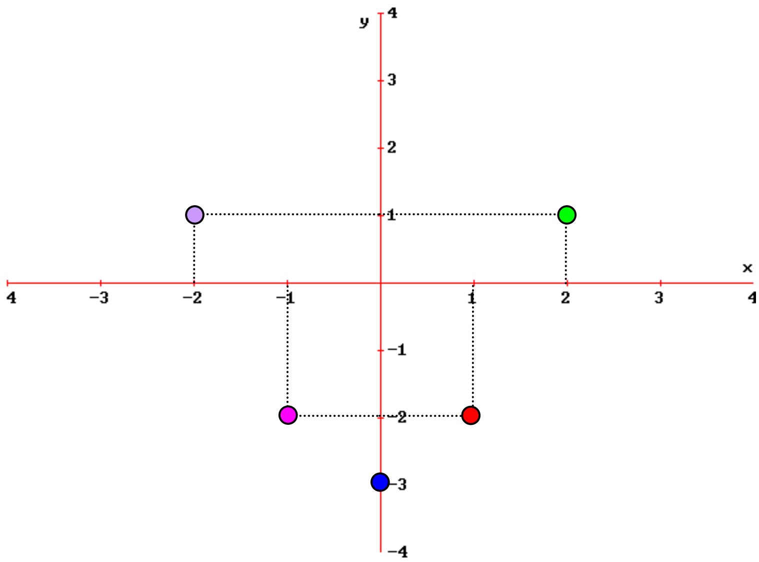


La prima riga (blu) della tabella corrisponde alla coppia (0, –3), ovvero al punto di ascissa 0 ed ordinata –3 (nella figura è il punto indicato in blu). La seconda riga (rossa) e la terza riga (verde) della tabella corrispondono agli altri due punti riportati nella figura (rispettivamente in rosso ed in verde).

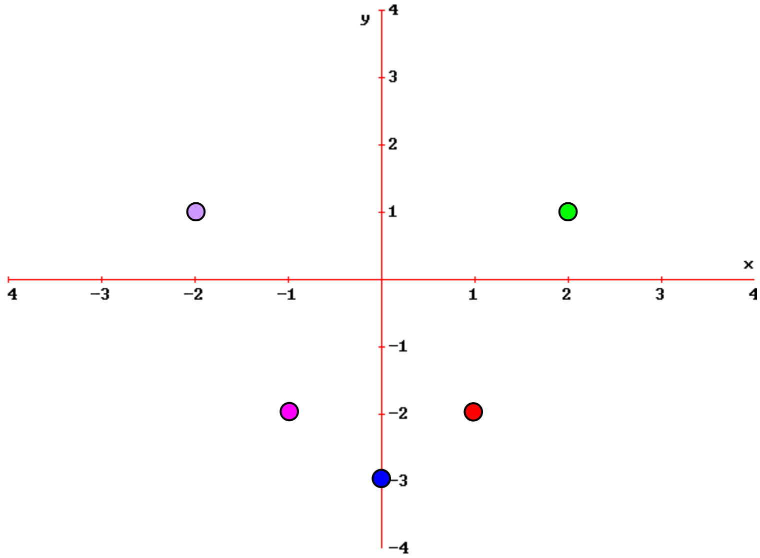
Osserviamo, in primo luogo, che la tabella dei valori fornisce le stesse informazioni della rappresentazione grafica: data la tabella, infatti, possiamo disegnare i tre punti e, viceversa, se conosciamo la rappresentazione grafica solo di alcuni punti, possiamo ricostruire la tabella dei valori leggendo le coordinate di ogni singolo punto.

Consideriamo ora la medesima funzione ma con una tabella dei valori più ampia.

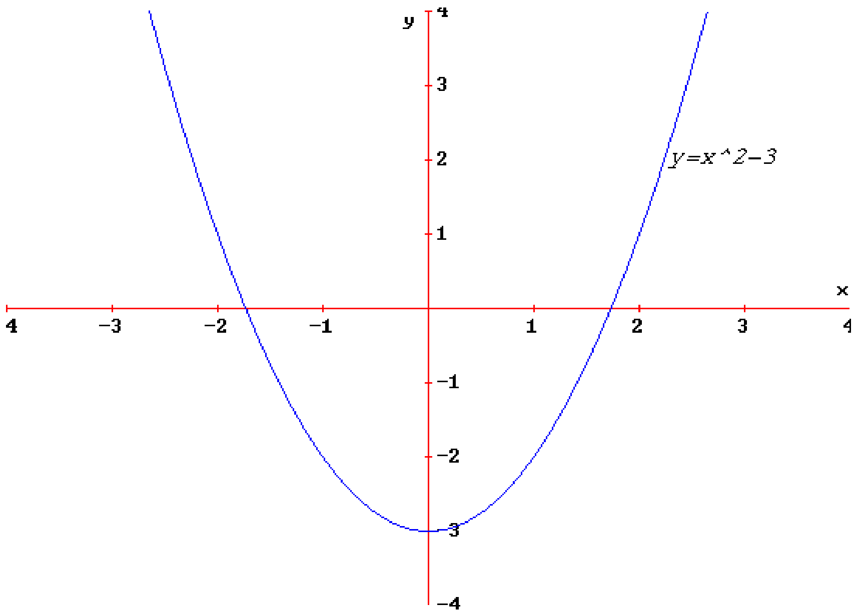
x	$y = x^2 - 3$
0	–3
1	–2
2	+1
–1	–2
–2	+1



Le coppie di numeri, riportati nella tabella, hanno lo stesso colore dei punti corrispondenti nel sistema di coordinate cartesiano.
Se adesso sopprimiamo tutte le linee ausiliarie otteniamo la seguente rappresentazione grafica:

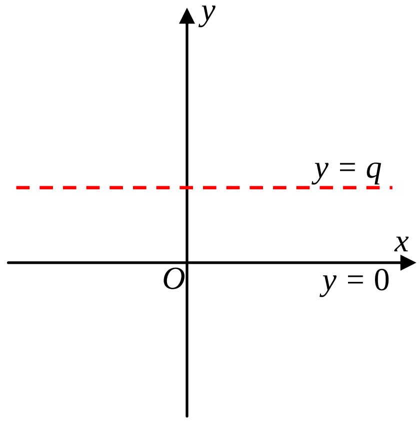


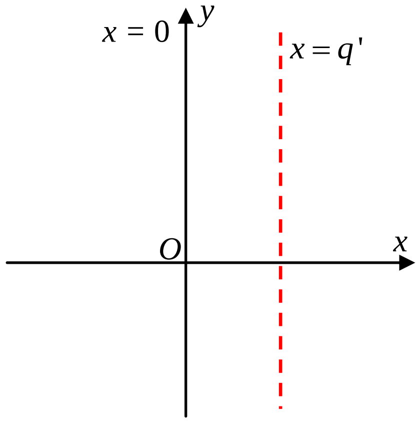
Si evince subito, allora, che, con un numero più consistente di dati, la funzione assume una certa *forma*: è proprio con tali *forme* che molto spesso si lavora in matematica.
Dunque, per la funzione $y = x^2 - 3$ otteniamo il seguente grafico:



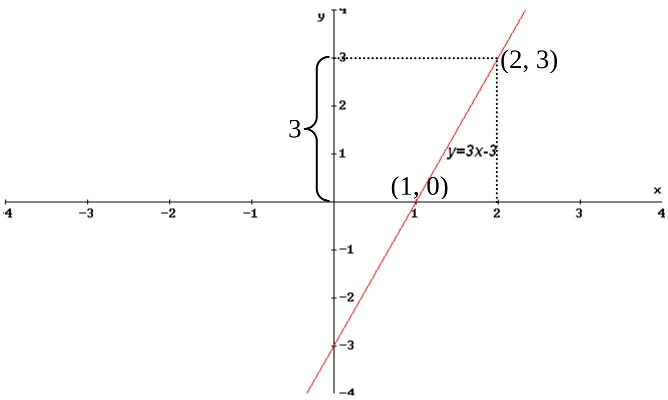
Funzioni Lineari

Le funzioni più semplici esistenti sono proprio i polinomi di grado zero, ovvero le ***funzioni costanti*** della forma $y = f(x) = q$, o anche $x = f(y) = q'$ dove q e q' sono due qualsiasi numeri reali: si tratta, cioè, di funzioni rappresentabili graficamente attraverso una retta parallela, rispettivamente, all'asse delle ascisse o all'asse delle ordinate.





Poiché ad ogni numero reale *x* od *y* associamo sempre lo stesso valore *q* o q', tali funzioni risultano essere troppo semplici per destare un qualche interesse.
Per trovare, quindi, funzioni altresì semplici ma interessanti occorre alzarsi di un grado, precisamente considerare polinomi di primo grado della forma $y = f(x) = mx$ o anche $y = f(x) = mx + q$: tali funzioni sono dette ***funzioni lineari***, essendo di primo grado. Osserviamo, in particolare, che le funzioni lineari della forma $y = f(x) = mx + q$ sono ottenute da quelle della forma $y = f(x) = mx$ traslando il grafico della funzione lineare $y = f(x) = mx$ di *q* unità verso l'alto se *q* è positivo oppure di – *q* unità verso il basso se *q* è negativo.
Tutte le funzioni lineari, inoltre, sono rappresentate, graficamente, da una retta più o meno inclinata, essendo la pendenza della retta individuata dal ***coefficiente angolare***, ossia dal coefficiente del termine di primo grado, che può essere misurato nel seguente modo: se consideriamo la retta *l* di equazione $y = 3x - 3$, partendo da un punto qualunque di essa, ad esempio (1, 0), e spostandoci, lungo tale retta, fino a raggiungere il punto di ascissa *x* = 2, ovvero, il punto (2, 3), possiamo osservare che la *y* cresce di 3 unità. Dunque il coefficiente angolare della retta *l* è proprio *m* = 3.



Il coefficiente angolare di una retta, quindi, misura di quanto varia *y* quando ci si sposta sulla retta stessa aumentando *x* di una unità.

Definizione

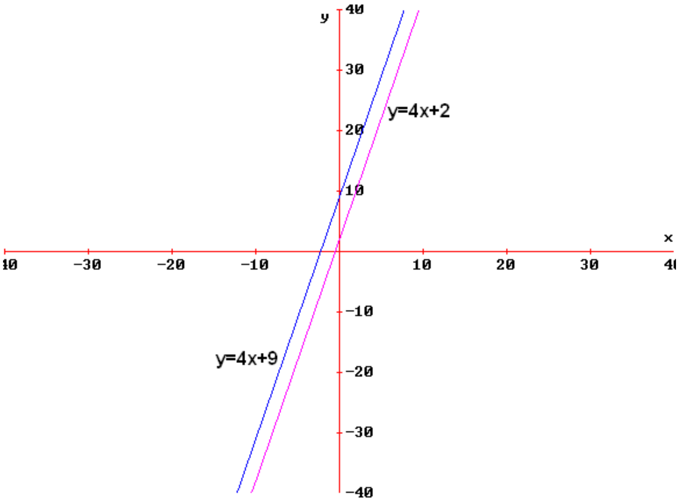
Se (x_0, y_0) ed (x_1, y_1) sono due punti di una retta *l*, scelti arbitrariamente, definiamo ***coefficiente angolare*** della retta *l* il rapporto:

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

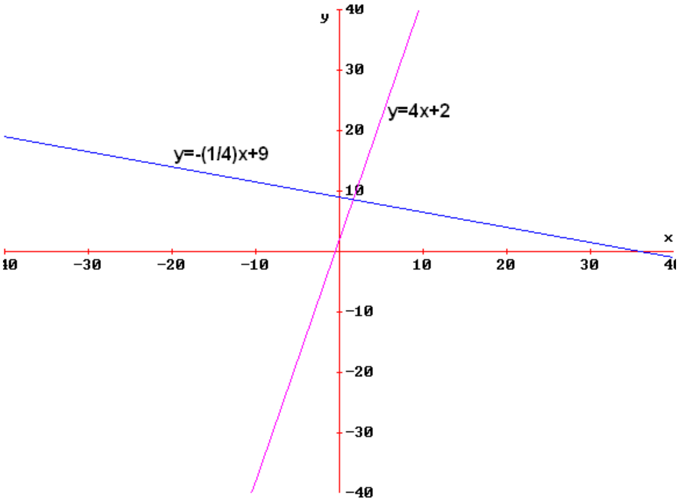
Osserviamo, in primo luogo, che il coefficiente angolare della retta *l* risulta indipendente dalla scelta dei punti sulla retta. In particolare, se due rette *l* ed l_1 hanno lo stesso coefficiente angolare, allora si dicono ***parallele***; se, invece, il coefficiente angolare di una delle due rette è il reciproco dell'altro, cambiato anche di segno, allora le due rette si dicono ***perpendicolari***.

Esempi

- Le rette $l: y = 4x + 2$ ed $l_1: y = 4x + 9$ sono <u>parallele</u> essendo $m = 4 = m_1$.



- Le rette $l: y = -\frac{1}{2}x + 3$ ed $l_1: y = -\frac{1}{2}x + 10$ sono <u>parallele</u> essendo $m = -\frac{1}{2} = m_1$.
- Le rette $l: y = 4x + 2$ ed $l_1: y = -\frac{1}{4}x + 9$ sono <u>perpendicolari</u> essendo $m_1 = -\frac{1}{4} = -\frac{1}{m}$.



- Se consideriamo i punti $(4,6)=(x_0,y_0)$ e $(0,7)=(x_1,y_1)$, allora il coefficiente angolare della retta congiungente i due punti è dato, sfruttando la definizione, da:

$$m=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{7-6}{0-4}=\frac{1}{-4}=-\frac{1}{4}$$

In virtù di quanto precedentemente asserito, se la retta *l* ha coefficiente angolare *m*, se essa interseca l'asse *y* nel punto (0, *q*) e se (*x*, *y*) è il generico punto di *r*, allora:

$$m=\frac{y-q}{x-0}=\frac{y-q}{x}$$

da cui si ha la seguente equazione:

$$y=mx+q$$

Se, invece, consideriamo due generici punti del piano che appartengono alla retta *l*, precisamente (x_0,y_0) ed (x_1,y_1), risulta:

$$m=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$$

da cui si ottiene l'equazione:

$$y_1-y_0=m(x_1-x_0)$$

L'***equazione generica della retta***, dunque, può essere scritta in uno dei seguenti modi:

$$y-y_0=m(x-x_0)$$
$$y=mx+q$$
$$ax+by+c=0$$

Dati due punti del piano come facciamo a calcolare la retta che passa per i punti assegnati?
Scritta l'equazione generica della retta, ad esempio:

$$ax+by+c=0$$

bisogna imporre il passaggio per i due punti, in modo tale da ottenere un sistema di due equazioni in tre incognite, facilmente risolvibile con uno dei metodi ben noti, quale quello di sostituzione o quello del confronto.

Esempio
Scrivere l'equazione della retta passante per i punti $P_1=(2,3)$ e $P_2=(-1,0)$.
Poiché l'equazione generica della retta è $ax+by+c=0$, sostituendo in tale equazione prima le coordinate del punto P_1 e poi quelle del punto P_2, otteniamo il seguente sistema:

$$\begin{cases}2a+3b+c=0\\-a+c=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2a+3b+c=0\\a=c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2c+3b+c=0\\a=c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3b=-3c\\a=c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=-c\\a=c\end{cases}$$

Attribuendo a *c* un valore arbitrario, per comodità 1, otteniamo:

$$\begin{cases}a=1\\b=-1\\c=1\end{cases}$$

Sostituendo, poi, i valori dei parametri appena trovati nell'equazione generica della retta otteniamo proprio l'equazione della retta cercata, ovvero passante per i punti P_1 e P_2, precisamente:

$$y=x-y+1$$

Come facciamo a verificare che un punto del piano appartiene o meno ad una retta data?
Sarà sufficiente sostituire le coordinate del punto nell'equazione della retta data e verificare se si ottiene o meno una identità.

Esempio
Verificare che i punti $P_1 = (4,5)$ e $P_2 = (7,10)$ appartengono o meno alla retta di equazione $y = 2x - 3$.
Sostituendo le coordinate del punto $P_1 = (4,5)$ nell'equazione della retta, otteniamo:

$$5 = 2 \cdot (4) - 3 \;\Rightarrow\; 5 = 8 - 3 \;\Rightarrow\; 5 = 5$$

ovvero un'identità. Ne segue che $P_1 = (4,5)$ appartiene alla retta.
Sostituendo le coordinate del punto $P_2 = (7,10)$ nell'equazione della retta, otteniamo:

$$10 = 2 \cdot (7) - 3 \;\Rightarrow\; 10 = 14 - 3 \;\Rightarrow\; 10 = 11$$

che non è affatto un'identità. Ne segue che $P_2 = (7,10)$ non appartiene alla retta.

Supponiamo ora di considerare le equazioni di due rette generiche contemporaneamente:

$$y = mx + q$$
$$y = m'x + q'$$

Se vogliamo conoscere per quali valori di x ed y le due equazioni sono soddisfatte contemporaneamente, dobbiamo risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = mx + q \\ y = m'x + q' \end{cases}$$

da cui ricavare i valori delle due variabili utilizzando uno dei metodi classici di risoluzione dei sistemi lineari.

Esempio
Consideriamo le due rette:

$$y - 4x = 10$$
$$y - 2x = 20$$

Per determinare i valori delle variabili x ed y, dobbiamo risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} y - 4x = 10 \\ y - 2x = 20 \end{cases}$$

Sottraendo, membro a membro, dalla prima equazione la seconda otteniamo:

$$\cancel{y} - 4x - \cancel{y} + 2x = 10 - 20$$

da cui:

$$-2x = -10 \;\Rightarrow\; x = 5$$

Sostituendo tale risultato in una delle due equazioni, ad esempio la prima, otteniamo:

$$y - 4 \cdot (5) = 10 \;\Rightarrow\; y - 20 = 10 \;\Rightarrow\; y = 30$$

Ne segue che la coppia (5, 30) soddisfa entrambe le equazioni, ovvero il punto di coordinate $x = 5$ ed $y = 30$ appartiene ad entrambe le rette considerate, cioè la soluzione del sistema comprendente le equazioni delle due rette è proprio il punto P di intersezione.

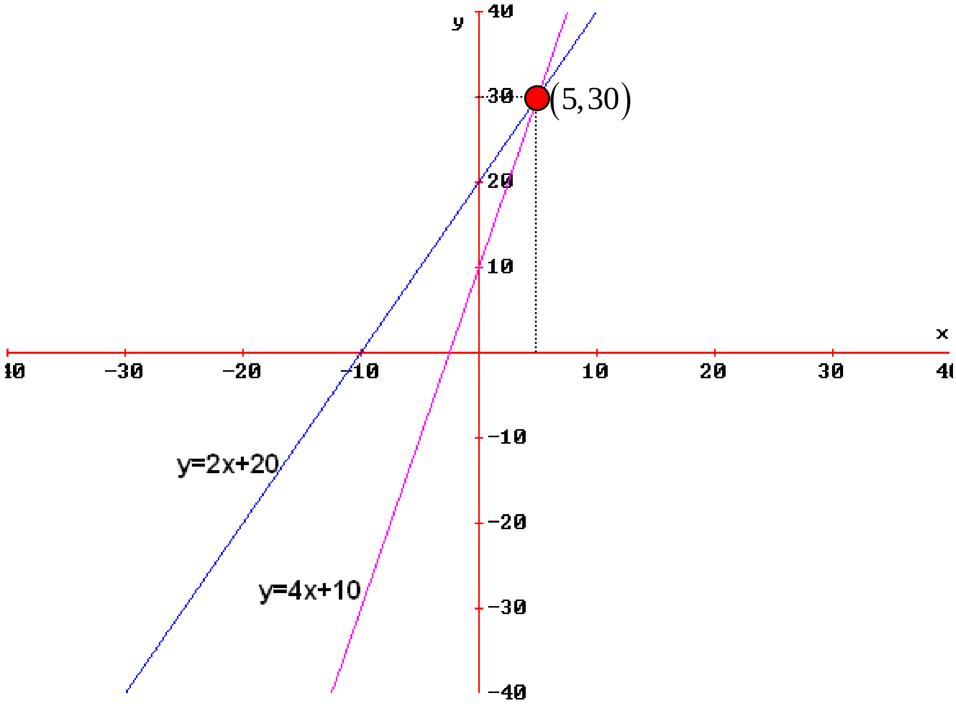
In particolare, l’idea di *contemporaneità* si evidenzia maggiormente se tracciamo il grafico delle due rette:

$r: y-4x=10$

x	y
0	10
$-\frac{5}{2}$	0

$r': y-2x=20$

x	y
0	20
-10	0



Dunque, se indichiamo con m e q dei numeri reali assegnati, precisamente i coefficienti che figurano nei polinomi di primo grado, possiamo riassumere quanto sopra asserito nella seguente tabella:

FUNZIONE	GRAFICO
$y=q$	retta parallela all’asse x
$y=mx$	retta per l’origine ($m \neq 0$)
$y=mx+q$	retta generica ($m \neq 0$, $q \neq 0$)

Funzioni Non Lineari

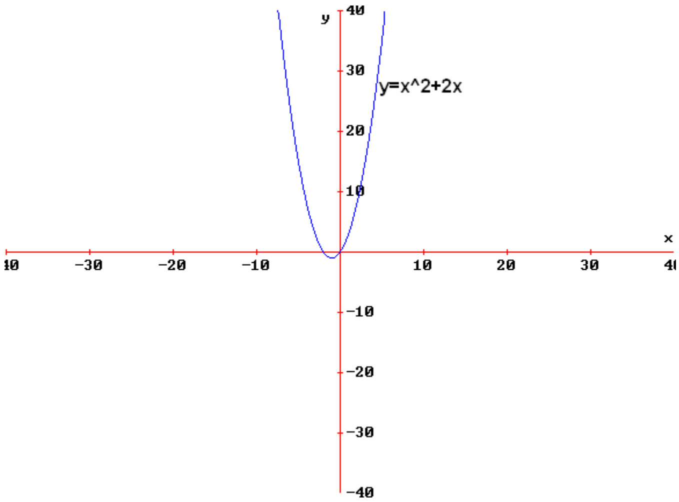
Un'altra categoria di funzioni è rappresentata dalle funzioni di grado superiore al primo, ovvero dalle cosiddette ***funzioni non lineari***. Ci occuperemo, almeno per il momento, di funzioni non lineari di secondo grado, che nel piano cartesiano rappresentano una ***parabola***, della forma:

$$y = ax^2 + bx + c$$

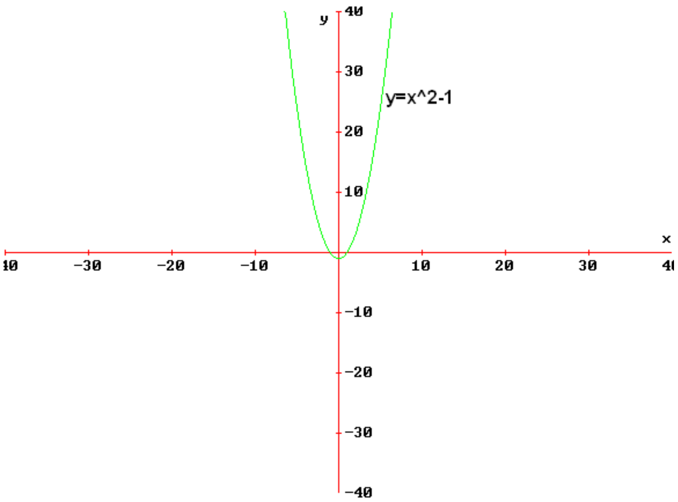
con a, b e c numeri reali assegnati.

Osserviamo che se:

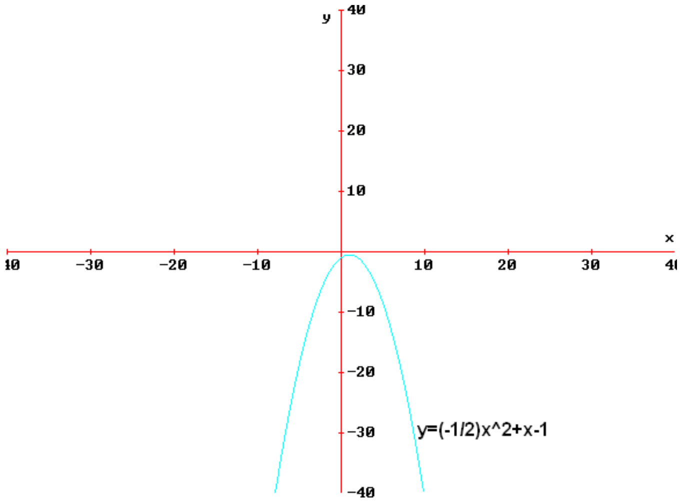
- $a = 0$, $b, c \neq 0$ allora l'equazione di secondo grado si trasforma nell'equazione di primo grado $y = bx + c$ che rappresenta graficamente, per quanto sopra detto, una retta non passante per l'origine
- $a, b \neq 0$, $c = 0$ allora l'equazione di secondo grado rappresenta graficamente una parabola passante per l'origine



- $a > 0$ allora la parabola ha la concavità rivolta verso l'alto



- $a < 0$ allora la parabola ha la concavità rivolta verso il basso



N.B.
Mentre per poter disegnare una retta nel piano cartesiano sono sufficienti due punti (*per due punti passa una ed una sola retta del piano*), per poter disegnare, con la massima precisione, una parabola occorre costruire una tabella contenente un maggior numero di punti.

Riportiamo ora di seguito lo ***schema di base*** cui attenersi per poter rappresentare graficamente una qualunque funzione:

1. determinazione del campo di esistenza o campo di definizione C.E.: bisogna, cioè, stabilire dove la funzione è definita;
2. studio del segno: bisogna, cioè, determinare per quali valori della x la funzione $y = f(x)$ è positiva o negativa, ovvero bisogna risolvere la disequazione $y > 0$;
3. intersezioni con gli assi, cioè bisogna risolvere i seguenti due sistemi:
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = f(0) \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y = 0 \\ f(x) = 0 \end{cases}$$
ottenendo, così, le intersezioni della funzione, rispettivamente con l'asse y e con l'asse x;
4. calcolo dei limiti agli estremi del campo di esistenza per la ricerca degli eventuali asintoti;
5. calcolo della derivata prima;
6. studio del segno della derivata prima per la determinazione dei massimi e dei minimi della funzione;
7. grafico della funzione.