LE DISEQUAZIONI

Premessa.

Ci sono problemi, alcuni appartenenti anche alla vita quotidiana, che possono essere risolti attraverso una *disequazione*, ossia un'espressione algebrica formata da due membri, contenenti un'incognita, ad esempio la variabile x, e legati tra loro da uno dei simboli di diseguaglianza, $<$, $\leq$, $>$, $\geq$, che, a loro volta, stanno ad indicare il *senso* o *verso* della disequazione.
In questa sezione, pertanto, ci si occuperà dello studio delle disequazioni, partendo dal concetto di diseguaglianza tra numeri relativi e ponendo l'attenzione, in particolar modo, sui seguenti argomenti:

1) Definizione di retta orientata e principali proprietà delle diseguaglianze
2) Concetto di intervallo
3) Disequazioni razionali intere di primo grado
4) Disequazioni razionali intere di secondo grado
5) Disequazioni frazionarie

La ***retta orientata***, come il piano cartesiano, è uno strumento molto utile per la rappresentazione grafica di certe situazioni matematiche. Verrà utilizzata ora per rappresentare ***diseguaglianze*** tra numeri reali ed introdurre nozioni che si riveleranno necessarie nel seguito.
Siano a e b due numeri reali qualsiasi con $a \neq b$ (a ***diverso*** da b). Come è ben noto, essi rappresentano le ascisse di due punti A e B di una retta orientata. Ad un punto X qualsiasi, compreso tra A e B, corrisponderà quindi un numero reale x compreso tra l'ascissa a del punto A e l'ascissa b del punto B, come riportato nella seguente figura:

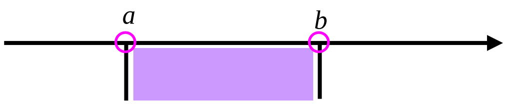
Il numero reale x varia allora nell'insieme dei numeri reali compresi tra a e b, ovvero nell'***intervallo di estremi a e b***.
Risulta ora necessario, prima di proseguire, fare alcune considerazioni riguardo l'intervallo sopra costruito. Può infatti risultare:

1) $a < x < b$

cioè l'insieme dei numeri reali in cui la x varia è rappresentato, sulla retta orientata, dall'intervallo ***aperto*** di estremi a e b. Gli estremi, quindi, non appartengono all'intervallo considerato. In simboli si scriverà:

$$]a, b[$$

cioè gli estremi dell'intervallo vengono scritti tra parentesi quadre aperte verso l'esterno:



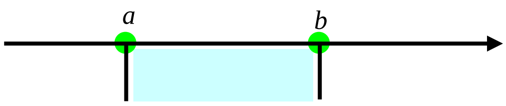
N.B.: Si osservi che con il "cerchietto vuoto" nei punti a e b, estremi dell'intervallo, si intende che gli estremi non appartengono all'intervallo considerato.

2) $a \leq x \leq b$

cioè l'insieme dei numeri reali in cui la x varia è rappresentato, sulla retta orientata, dall'intervallo ***chiuso*** di estremi a e b. Gli estremi, quindi, appartengono all'intervallo considerato. In simboli si scriverà:

$$[a, b]$$

cioè gli estremi dell'intervallo vengono scritti tra parentesi quadre:



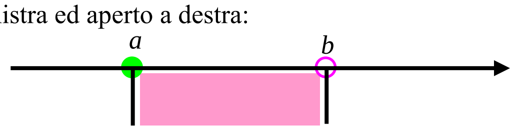
N.B.: Si osservi che con il "cerchietto pieno" nei punti a e b, estremi dell'intervallo, si intende che gli estremi appartengono all'intervallo considerato.

3) $a \leq x < b$

cioè l'insieme dei numeri reali in cui la x varia è rappresentato, sulla retta orientata, dall'intervallo ***semichiuso*** di estremi a e b. Dei due estremi, quindi, solo a appartiene all'intervallo considerato. In simboli si scriverà:

$$[a, b[$$

cioè l'intervallo è chiuso a sinistra ed aperto a destra:

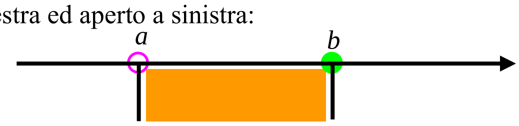


4) $a < x \leq b$

cioè l'insieme dei numeri reali in cui la x varia è rappresentato, sulla retta orientata, dall'intervallo ***semichiuso*** di estremi a e b. Dei due estremi, quindi, solo a appartiene all'intervallo considerato. In simboli si scriverà:

$$]a, b]$$

cioè l'intervallo è chiuso a destra ed aperto a sinistra:



Si osservi che fino ad ora si è parlato esclusivamente di ***intervalli limitati***.

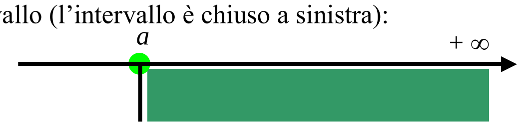
Sulla retta orientata, però, risulta sempre possibile definire anche ***intervalli illimitati*** a partire da un qualsiasi punto A, di ascissa a, ed estendendosi verso destra o verso sinistra indefinitamente. Nel primo caso si parlerà di ***infinito positivo*** $(+\infty)$ e nel secondo caso di ***infinito negativo*** $(-\infty)$. Si tenga presente che i simboli $+\infty$ e $-\infty$ sono puramente convenzionali, cioè utili per sintetizzare il discorso, ma in realtà ad essi non corrisponde alcun valore numerico. Anche in questo caso, però, occorre fare delle considerazioni. Infatti, considerato sulla retta orientata un punto A, di ascissa a, allora un altro punto X, di ascissa x, potrà cadere a destra o a sinistra del punto A. Può quindi risultare:

1) $x > a$

cioè l'insieme dei numeri reali in cui la x varia è rappresentato, sulla retta orientata, dall'intervallo ***aperto*** $]a, +\infty[$ perché a non appartiene all'intervallo:

2) $x \geq a$

cioè l'insieme dei numeri reali in cui la x varia è rappresentato, sulla retta orientata, dall'intervallo ***semichiuso*** $[a, +\infty[$ perché a appartiene all'intervallo (l'intervallo è chiuso a sinistra):

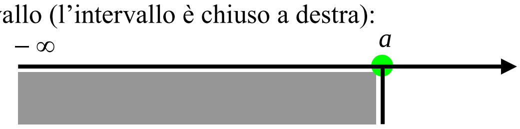


3) $x < a$

cioè l'insieme dei numeri reali in cui la x varia è rappresentato, sulla retta orientata, dall'intervallo ***aperto*** $]-\infty, a[$ perché a non appartiene all'intervallo:

4) $x \leq a$

cioè l'insieme dei numeri reali in cui la x varia è rappresentato, sulla retta orientata, dall'intervallo ***semichiuso*** $]-\infty, a]$ perché a appartiene all'intervallo (l'intervallo è chiuso a destra):



Dopo questa breve parentesi introduttiva verranno ora richiamati alcuni concetti fondamentali sulle diseguaglianze.

Dati due numeri a e b reali qualsiasi con $a \neq b$, si scriverà $a < b$ (a ***minore*** di b) oppure $a > b$ (a ***maggiore*** di b) a seconda che sia rispettivamente $a - b < 0$ oppure $a - b > 0$ e viceversa.

Proprietà delle diseguaglianze.

1) $\boxed{a > b \Rightarrow a + c > b + c}$ $\qquad \forall$ (*per ogni*) $a, b, c \in \mathbb{R}$

<u>*Esempio*</u>.

Si consideri $a = 3$, $b = 2$, cioè $a > b$ e sia $c = 4 > 0$. Allora risulta:

$a + c = 3 + 4 = 7 > b + c = 2 + 4 = 6$

Analogamente, se $a = 3$, $b = 2$, cioè $a > b$, ma $c = -4 < 0$, allora si ha:

$a + c = 3 + (-4) = -1 > b + c = 2 + (-4) = -2$

1') $\boxed{a < b \Rightarrow a + c < b + c}$ $\forall$ (*per ogni*) $a, b, c \in \mathbb{R}$

Esempio.
Si consideri $a = 2$, $b = 3$, cioè $a < b$ e sia $c = 4 > 0$. Allora risulta:
$a + c = 2 + 4 = 6 < b + c = 3 + 4 = 7$
Analogamente, se $a = 2$, $b = 3$, cioè $a < b$, ma $c = -4 < 0$, allora si ha:
$a + c = 2 + (-4) = -2 < b + c = 3 + (-4) = -1$

2) $\boxed{a > b,\ c > d \Rightarrow a + c > b + d}$ $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Esempio.
Si consideri $a = 3$, $b = 2$, $c = 2$, $d = 1$, cioè $a > b$ e $c > d$. Allora risulta:
$a + c = 3 + 2 = 5 > b + d = 2 + 1 = 3$
Analogamente, se $a = -2$, $b = -3$, $c = 2$, $d = 1$, cioè $a > b$ e $c > d$, allora si ha:
$a + c = -2 + 2 = 0 > b + c = -3 + 1 = -2$
N.B.: Si osservi che, in generale, non è lecito sottrarre membro a membro due diseguaglianze.

2') $\boxed{a < b,\ c < d \Rightarrow a + c < b + d}$ $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Esempio.
Si consideri $a = 2$, $b = 3$, $c = 1$, $d = 2$, cioè $a < b$ e $c < d$. Allora risulta:
$a + c = 2 + 1 = 3 < b + d = 2 + 2 = 5$
Analogamente, se $a = -3$, $b = -2$, $c = 1$, $d = 2$, cioè $a < b$ e $c < d$, allora si ha:
$a + c = -3 + 1 = -2 < b + c = -2 + 2 = 0$

3) $\boxed{a > b,\ c > 0 \Rightarrow ac > cb,\ \frac{a}{c} > \frac{b}{c}\ (c \neq 0)}$ $\forall$ (*per ogni*) $a, b, c \in \mathbb{R}$

Esempio.
Si consideri $a = 3$, $b = 2$, cioè $a > b$, e sia $c = 2 > 0$. Allora risulta:

$ac = 3(2) = 6 > bc = 2(2) = 4$ e $\frac{a}{c} = \frac{3}{2} = 1{,}5 > \frac{b}{c} = \frac{2}{2} = 1$

Analogamente, se $a = 2$, $b = -3$, cioè $a > b$, e $c = 2 > 0$, allora si ha:

$ac = 2(2) = 4 > bc = (-3)2 = -6$ e $\frac{a}{c} = \frac{2}{2} = 1 > \frac{b}{c} = -\frac{3}{2} = -1{,}5$

3') $\boxed{a < b,\ c > 0 \Rightarrow ac < cb,\ \frac{a}{c} < \frac{b}{c}\ (c \neq 0)}$ $\forall$ (*per ogni*) $a, b, c \in \mathbb{R}$

Esempio.
Si consideri $a = 2$, $b = 3$, cioè $a < b$, e sia $c = 2 > 0$. Allora risulta:

$ac = 2(2) = 4 < bc = 3(2) = 6$ e $\frac{a}{c} = \frac{2}{2} = 1 < \frac{b}{c} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

Analogamente, se $a = -3$, $b = 2$, cioè $a < b$, e $c = 2 > 0$, allora si ha:

$ac = (-3)2 = -6 < bc = 2(2) = 4$ e $\frac{a}{c} = -\frac{3}{2} = -1{,}5 < \frac{b}{c} = \frac{2}{2} = 1$

4) $\boxed{a > b,\ c < 0 \Rightarrow ac < bc}$ $\forall$ (*per ogni*) $a, b, c \in \mathbb{R}$

Esempio.
Si consideri $a = 3$, $b = 2$, cioè $a > b$, e sia $c = -2 < 0$. Allora risulta:

$ac = 3(-2) = -6 < bc = 2(-2) = -4$ e $\frac{a}{c} = -\frac{3}{2} = -1{,}5 < \frac{b}{c} = -\frac{2}{2} = -1$

Analogamente, se $a = 2$, $b = -3$, cioè $a > b$, e $c = -2 < 0$, allora si ha:

$ac = 2(-2) = -4 < bc = (-3)(-2) = +6$ e $\frac{a}{c} = -\frac{2}{2} = -1 < \frac{b}{c} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

4') $\boxed{a < b,\ c < 0 \Rightarrow ac > bc}$ $\forall$ (*per ogni*) $a, b, c \in \mathbb{R}$

Esempio.
Si consideri $a = 2$, $b = 3$, cioè $a < b$, e sia $c = -2 < 0$. Allora risulta:

$ac = 2(-2) = -4 > bc = 3(-2) = -6$ e $\frac{a}{c} = -\frac{2}{2} = -1 > \frac{b}{c} = -\frac{3}{2} = -1{,}5$

Analogamente, se $a = -3$, $b = 2$, cioè $a < b$, e $c = -2 < 0$, allora si ha:

$ac = (-3)(-2) = +6 > bc = 2(-2) = -4$ e $\frac{a}{c} = \frac{3}{2} = 1{,}5 > \frac{b}{c} = -\frac{2}{2} = -1$

N.B.: In particolare, cambiando il *segno* ad ambo i membri della diseguaglianza, ovvero moltiplicando entrambi i membri per -1, bisogna cambiare anche il *senso* (o *verso*) della diseguaglianza.

5) $\boxed{a, b, c, d > 0,\ a > b,\ c > d \Rightarrow ac > bd}$ $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Esempio.
Si consideri $a = 3 > 0$, $b = 2 > 0$, $c = 2 > 0$, $d = 1 > 0$, cioè $a > b$ e $c > d$. Allora risulta:
$ac = 3(2) = 6 > bd = 2(1) = 2$

5') $\boxed{a, b, c, d > 0,\ a < b,\ c < d \Rightarrow ac < bd}$ $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Esempio.
Si consideri $a = 2 > 0$, $b = 3 > 0$, $c = 1 > 0$, $d = 2 > 0$, cioè $a < b$ e $c < d$. Allora risulta:
$ac = 2(1) = 2 < bd = 2(2) = 4$

6) $\boxed{a, b > 0 \text{ oppure } a, b < 0 \Rightarrow \begin{cases} a > b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b} \\ a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \end{cases}}$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$

Esempi.
1) **$a, b > 0$**
Si consideri $a = 3$, $b = 2$, cioè $a > b$. Allora risulta:

$\frac{1}{a} = \frac{1}{3} \approx 0{,}3 < \frac{1}{b} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

Se, invece, si prende $a = 2$, $b = 3$, cioè $a < b$, allora si ha:

$\frac{1}{a} = \frac{1}{2} = 0{,}5 > \frac{1}{b} = \frac{1}{3} \approx 0{,}3$

2) **$a, b < 0$**
Si consideri $a = -2$, $b = -3$, cioè $a > b$. Allora risulta:

$\frac{1}{a} = -\frac{1}{2} = -0{,}5 < \frac{1}{b} = -\frac{1}{3} \approx -0{,}3$

Se, invece, si prende $a = -3$, $b = -2$, cioè $a < b$, allora si ha:

$\frac{1}{a} = -\frac{1}{3} \approx -0{,}3 > \frac{1}{b} = -\frac{1}{2} = -0{,}5$

7) $\boxed{a, b > 0,\ n > 0,\ a > b \Rightarrow a^n > b^n}$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

e viceversa.

Esempio.
Si consideri $a = 3$, $b = 2$, cioè $a > b$ ed $a, b > 0$, e sia $n = 2 > 0$. Allora risulta:
$a^n = (3)^2 = 9 > b^n = (2)^2 = 4$

7') $\boxed{a, b > 0,\ n > 0,\ a < b \Rightarrow a^n < b^n}$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

e viceversa.

Esempio.
Si consideri $a = 2$, $b = 3$, cioè $a < b$ ed $a, b > 0$, e sia $n = 2 > 0$. Allora risulta:
$a^n = (2)^2 = 4 < b^n = (3)^2 = 9$

8) $\boxed{a,\ b < 0,\ a > b,\ n > 0 \Rightarrow \begin{cases} a^n > b^n & se\ n\ è\ dispari \\ a^n < b^n & se\ n\ è\ pari \end{cases}}$ $\qquad \forall a,\ b \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}$

Esempio.
Si consideri $a = -2$, $b = -3$, cioè $a > b$ ed $a, b < 0$. Allora risulta:

$$\begin{cases} a^3 = (-2)^3 = -8 > b^3 = (-3)^3 = -27 & se\ n = 3\ dispari \\ a^n = (-2)^2 = +4 < b^n = (-3)^2 = +9 & se\ n = 2\ pari \end{cases}$$

N.B.: Si osservi che, in generale, da $a > b$ segue $-a < -b$, così come da $a < b$ segue $-a > -b$, (ad esempio, $2 < 3 \Rightarrow -2 > -3$, così come $3 > 2 \Rightarrow -3 < -2$).

8') $\boxed{a,\ b < 0,\ a < b,\ n > 0 \Rightarrow \begin{cases} a^n < b^n & se\ n\ è\ dispari \\ a^n > b^n & se\ n\ è\ pari \end{cases}}$ $\qquad \forall a,\ b \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}$

Esempio.
Si consideri $a = -3$, $b = -2$, cioè $a < b$ ed $a, b < 0$. Allora risulta:

$$\begin{cases} a^3 = (-3)^3 = -27 < b^3 = (-2)^3 = -8 & se\ n = 3\ dispari \\ a^2 = (-3)^2 = +9 > b^2 = (-2)^2 = +4 & se\ n = 2\ pari \end{cases}$$

9) $\boxed{m,\ n > 0,\ m > n,\ a > 0,\ a \neq 1 \Rightarrow \begin{cases} a^m > b^n & se\ a > 1,\ a > b \\ a^m < b^n & se\ a < 1,\ a < b \end{cases}}$ $\qquad \forall a,\ b \in \mathbb{R},\ \forall m,\ n \in \mathbb{N}$

e viceversa.

Esempio.
Si consideri:

- $a = +3 > 0$, $b = +2$, cioè $a = 3 > 1$, ed anche $m = 3 > 0$, $n = 2 > 0$, cioè $m > n$;
- $a = \frac{1}{3} > 0$, $b = \frac{1}{2} > 0$, cioè $a = \frac{1}{3} < 1$, ed anche $m = 3 > 0$, $n = 2 > 0$, cioè $m > n$.

Allora risulta:

$$\begin{cases} a^3 = (+3)^3 = +27 > b^2 = (+2)^2 = +4 & se\ a = 3 > 1,\ a = 3 > b = 2 \\ a^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27} < b^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} & se\ a = \frac{1}{3} < 1,\ a = \frac{1}{3} < b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

9') $\boxed{m,\ n > 0,\ m > n,\ a > 0,\ a \neq 1 \Rightarrow \begin{cases} a^m < b^n & se\ a > 1,\ a < b \\ a^m > b^n & se\ a < 1,\ a > b \end{cases}}$ $\qquad \forall a,\ b \in \mathbb{R},\ \forall m,\ n \in \mathbb{N}$

e viceversa.

Esempio.
Si consideri:

- $a = +2 > 0$, $b = +3$, cioè $a = 2 > 1$, ed anche $m = 3 > 0$, $n = 2 > 0$, cioè $m > n$;
- $a = \frac{1}{2} > 0$, $b = \frac{1}{3} > 0$, cioè $a = \frac{1}{2} < 1$, ed anche $m = 3 > 0$, $n = 2 > 0$, cioè $m > n$.

Allora risulta:

$$\begin{cases} a^3 = (+2)^3 = +8 < b^2 = (+3)^2 = +9 & se\ a = 2 > 1,\ a = 2 < b = 3 \\ a^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} > b^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} & se\ a = \frac{1}{2} < 1,\ a = \frac{1}{2} < b = \frac{1}{3} \end{cases}$$

N.B.: Si osservi che la **9')** può essere inglobata nella **9)**, invertendo la sequenza delle diseguaglianze del sistema.

DISEQUAZIONI RAZIONALI INTERE DI PRIMO GRADO.

Nel presente paragrafo ci si occuperà della risoluzione delle disequazioni ***lineari*** (ossia di primo grado) in un'incognita, riconducibili ad una delle seguenti forme:

$$ax + b > 0 \quad \text{oppure} \quad ax + b < 0$$

Si osservi, inoltre, che è sempre possibile supporre $a > 0$, cioè il coefficiente della x sempre positivo; in caso contrario, infatti, è possibile moltiplicare ambo i membri della disequazione per -1, ovvero cambiare di segno ad ambo i membri, ricordandosi di cambiare anche il senso della disequazione, così da ricondursi ad una delle due forme sopra riportate: in tal caso si dirà che la disequazione è ***ridotta a forma normale***.
Dunque ogni disequazione razionale intera, di primo grado e non, si può sempre trasformare nella ***forma normale*** $N(x) > 0$ trasportando tutti i termini in un medesimo membro e riducendo i termini simili. Il grado del polinomio $N(x)$ ottenuto è proprio il ***grado della disequazione***.
Esempio.
Si consideri la disequazione:

$$(*) \qquad 50x^2 - 60 + 15x^2 - 45x + 15 > 90x + 6x^2 - 6$$

Trasportando tutti i termini al primo membro si ha:

$$50x^2 - 60 + 15x^2 - 45x + 15 - 90x - 6x^2 + 6 > 0$$

da cui riducendo i termini simili:

$$59x^2 - 135x - 39 > 0$$

che rappresenta proprio la forma normale della disequazione considerata. Ne segue che la (*) ha grado pari a 2.

Si chiama ***soluzione della disequazione*** quel valore che, attribuito alla variabile x, soddisfa la disequazione data. In altre parole ***risolvere una disequazione*** significa trovare tutte le sue possibili soluzioni.
Il polinomio che figura a sinistra del simbolo di disequazione prende il nome di ***primo membro***, mentre quello che figura a destra di tale simbolo è detto ***secondo membro***.
Risulta allora:

(1) $\quad ax + b > 0 \Rightarrow ax > -b \Rightarrow x > -\dfrac{b}{a}$

(2) $\quad ax + b < 0 \Rightarrow ax < -b \Rightarrow x < -\dfrac{b}{a}$

Dunque, la (1) è soddisfatta per tutti i valori della x maggiori del numero $-\dfrac{b}{a}$ e la (2) è verificata, invece, per tutti i valori di x minori del numero $-\dfrac{b}{a}$.

OSSERVAZIONE.
Tutti i risultati validi per le equazioni si estendono anche alle disequazioni. Ad esempio, due disequazioni si dicono ***equivalenti*** se ammettono le medesime soluzioni.
Vale, inoltre, il seguente:
TEOREMA. Aggiungendo ad ambedue i membri di una disequazione razionale intera uno stesso polinomio si ottiene una disequazione equivalente alla data.

Da tale Teorema, come si evincerà dagli esempi di seguito riportati, segue che è sempre possibile cambiare di segno tutti i termini di una disequazione, ossia moltiplicare ambo i membri per -1, purché si cambi anche il senso, ovvero il verso, della disequazione.

Esempi.
1) Sia data la disequazione:

$$3x - \frac{1}{4} > 20 - \frac{2x}{3}$$

Per risolvere tale disequazione è possibile procedere in due modi.
a) Determinare il minimo comune multiplo tra i due membri della disequazione (nel nostro caso $m.c.m. = 3 \times 4 = 12$). Risulta allora possibile scrivere la disequazione data nel seguente modo:

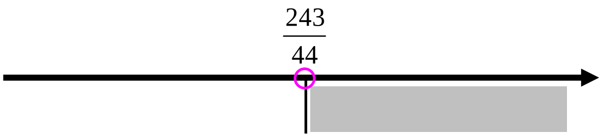
$$\frac{3x(12) - 1(3)}{12} > \frac{20(12) - 2x(4)}{12}$$

da cui, moltiplicando ambo i membri per 12, si ottiene:
$3x(12) - 1(3) > 20(12) - 2x(4)$
ed eseguendo i calcoli:
$36x - 3 > 240 - 8x$

Separando ora i termini di primo grado da quelli di grado zero ovvero dai termini noti, si ha:

$36x + 8x > 240 + 3 \Rightarrow 44x > 243 \Rightarrow \; x > \dfrac{243}{44}$

Ne segue che la disequazione data è soddisfatta per tutti quei valori della x che risultano essere maggiori del numero $\dfrac{243}{44}$. Graficamente l'insieme delle soluzioni viene in genere riportato sulla cosiddetta ***retta orientata*** nel seguente modo:



$$x > \frac{243}{44} = \left]\frac{243}{44}, +\infty\right[$$

b) Separare i termini di primo grado dai termini noti (di grado zero):

$$3x + \frac{2x}{3} > 20 + \frac{1}{4} \;\Rightarrow\; x\left(3 + \frac{2}{3}\right) > 20 + \frac{1}{4} \;\Rightarrow\; x\left(\frac{9+2}{3}\right) > \frac{80+1}{4} \;\Rightarrow\; x\left(\frac{11}{3}\right) > \frac{81}{4} \;\Rightarrow\; \frac{11}{3}x > \frac{81}{4} \;\Rightarrow\; x > \frac{81}{4}\cdot\frac{3}{11} = \frac{243}{44}$$

Dunque il risultato ottenuto è lo stesso e la rappresentazione grafica sarà pertanto la medesima.

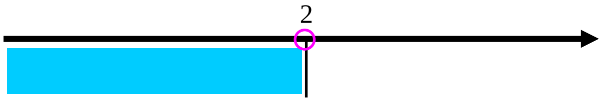
2) Si consideri la disequazione:

$$4 - 3x > 5x - 12$$

Applicando il ***principio del trasporto***, ovvero separando, come al solito, i termini di primo grado dai termini noti, si ottiene:

$-5x - 3x > -12 - 4 \Rightarrow -8x > -16 \Rightarrow +8x < +16 \Rightarrow x < 2$

Ne segue che la disequazione data è soddisfatta per tutti quei valori della x che risultano essere minori di 2.
Graficamente, l'insieme delle soluzioni della disequazione è rappresentato nel modo seguente:



$x < 2 = \{x \in \mathbb{R} : x < 2\} =]-\infty, 2[$

3) Risolvere la disequazione:

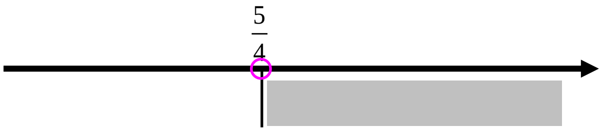
$$2(x-2)^2 - 2(x+1) < 2(x-2)(x+1)$$

In primo luogo bisogna ridurre la disequazione in forma normale, eseguendo tutte le operazioni possibili:

$2(x^2 + 4 - 4x) - 2x - 2 < 2(x^2 + x - 2x - 2) \Rightarrow \cancel{2x^2} + 8 - 8x \cancel{-2x} - 2 < \cancel{2x^2} \cancel{-2x} - 4 \Rightarrow -8x < -4 - 8 + 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow +8x > +10 \Rightarrow \; x > \dfrac{10}{8} \;\Rightarrow\; x > \dfrac{5}{4}$

Graficamente l'insieme delle soluzioni della disequazione è rappresentato nel modo seguente:



$$x > \frac{5}{4} = \left\{x \in R : x > \frac{5}{4}\right\} = \left]\frac{5}{4}, +\infty\right[$$

4) Risolvere la seguente disequazione:

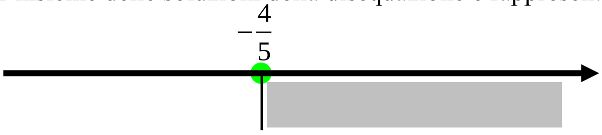
$$\frac{2}{3}x - \frac{4}{5} \le \frac{5}{4}x - \frac{1}{3}$$

Anche in questo caso, come già fatto nel precedente esempio 1), bisogna in primo luogo liberare la disequazione dai denominatori procedendo come si fa normalmente per le equazioni ossia andando a calcolare in minimo comune multiplo. Nel caso in esame risulta che *m. c. m.* = 3 × 5 × 4 = 60. Ne segue:

$$\frac{2}{3}x - \frac{4}{5} \le \frac{5}{4}x - \frac{1}{3} \;\Rightarrow\; \frac{2(20)x - 4(12)}{60} \le \frac{5(15)x - 20}{60} \;\Rightarrow\; \frac{40x - 48}{60} \le \frac{75x - 20}{60} \;\Rightarrow 40x - 48 \le 75x - 20 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 40x - 75x \le -20 + 48 \Rightarrow -35x \le +28 \Rightarrow +35x \ge -28 \Rightarrow \; x \ge -\dfrac{28}{35} \;\Rightarrow\; x \ge -\dfrac{4}{5}$

Graficamente l'insieme delle soluzioni della disequazione è rappresentato nel modo seguente:



$$x \ge -\frac{4}{5} = \left\{x \in R : x \ge -\frac{4}{5}\right\} = \left[-\frac{4}{5}, +\infty\right[$$

DISEQUAZIONI RAZIONALI INTERE DI SECONDO GRADO.

Le disequazioni razionali intere di secondo grado sono espressioni della forma $P_1(x) > P_2(x)$ oppure $P_1(x) < P_2(x)$ dove $P_1(x)$ e $P_2(x)$ sono polinomi di secondo grado nella variabile x.
In generale, però, una disequazione razionale intera di secondo grado è sempre riducibile alla ***forma normale***:

$$(1) \qquad ax^2 + bx + c > 0$$

oppure

$$(2) \qquad ax^2 + bx + c < 0$$

con $a \neq 0$.
Inoltre si può sempre supporre $a > 0$, cioè il coefficiente della x^2 sempre positivo: in caso contrario, infatti, è possibile moltiplicare ambo i membri della disequazione per -1, ovvero cambiare di segno ad ambo i membri, ricordandosi di cambiare, però, anche il senso della disequazione, così da ricondursi ad una delle due forme normali sopra indicate.
Per risolvere tali disequazioni, ovvero per determinare i valori che possono essere attribuiti alla variabile x in modo tale che il trinomio $ax^2 + bx + c$ sia positivo o negativo, bisogna:
a) scrivere l'equazione associata alla disequazione, cioè $ax^2 + bx + c = 0$;
b) determinare le soluzioni x_1 ed x_2 dell'equazione associata con la formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

o anche:

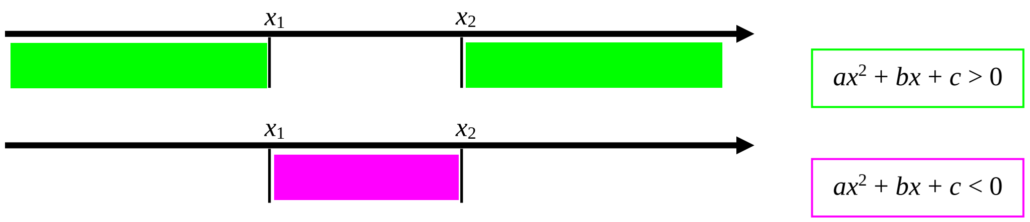
$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}$$

qualora il coefficiente del termine di primo grado sia un multiplo di 2;
c) osservare in quali dei seguenti tre casi ci si trova:

PRIMO CASO: $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

In questo caso:
- l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ ha due soluzioni reali e distinte x_1 ed x_2 ($x_1 \neq x_2$);
- la disequazione $ax^2 + bx + c > 0$ è soddisfatta per valori esterni all'intervallo di estremi x_1 ed x_2, supponendo $x_1 < x_2$;
- la disequazione $ax^2 + bx + c < 0$ è soddisfatta per valori interni all'intervallo di estremi x_1 ed x_2, supponendo $x_1 < x_2$.

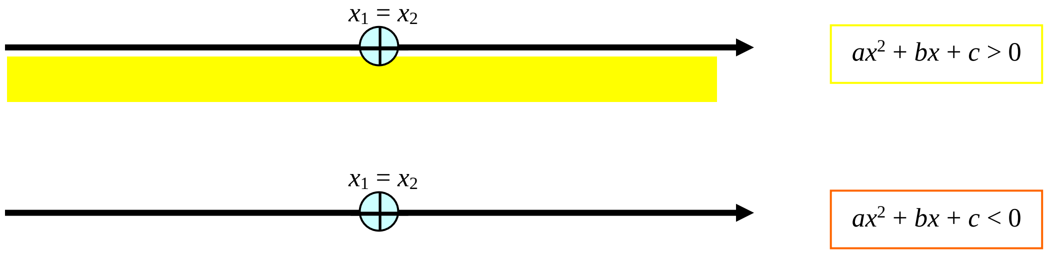
Graficamente si ha:



SECONDO CASO: $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

In questo caso:
- l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ ha due soluzioni, x_1 ed x_2, reali e coincidenti ($x_1 = x_2$);
- la disequazione $ax^2 + bx + c > 0$ è soddisfatta per ogni valore di $x \in \mathbb{R}$ (insieme dei numeri reali) tranne che per i valori in cui si annulla, ovvero $x_1 = x_2$;
- la disequazione $ax^2 + bx + c < 0$ non è mai soddisfatta.

Graficamente si ha:



OSSERVAZIONE.

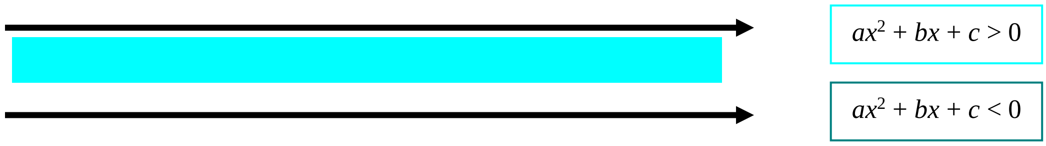
Questo è il caso in cui ci si trova di fronte ad un trinomio, $ax^2 + bx + c$, che risulta essere il quadrato di un binomio e quindi una quantità sempre positiva!!!

TERZO CASO: $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

In questo caso:

- l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ ha due soluzioni complesse e coniugate x_1 ed x_2 ($x_1 \neq x_2$);
- la disequazione $ax^2 + bx + c > 0$ è soddisfatta per ogni valore di $x \in \mathbb{R}$;
- la disequazione $ax^2 + bx + c < 0$ non è mai soddisfatta.

Graficamente si ha:



Esempi.

1) $\dfrac{x^2}{3} - x > \dfrac{4}{3} - \dfrac{x^2}{2}$ **PRIMO CASO: $\Delta = b^2 - 4ac > 0$**

Poiché ci si trova di fronte a delle frazioni occorre dapprima, al fine di semplificare i calcoli, eliminare i denominatori determinando il minimo comune multiplo che, nel caso specifico, risulta essere pari a $3 \times 2 = 6$. Ne segue:

$$\frac{2x^2 - 6x}{6} > \frac{8 - 3x^2}{6} \Rightarrow 2x^2 - 6x > 8 - 3x^2 \Rightarrow 2x^2 + 3x^2 - 6x - 8 > 0 \Rightarrow 5x^2 - 6x - 8 > 0$$

Occorre ora trovare le soluzioni dell'equazione associata:

$$5x^2 - 6x - 8 = 0$$

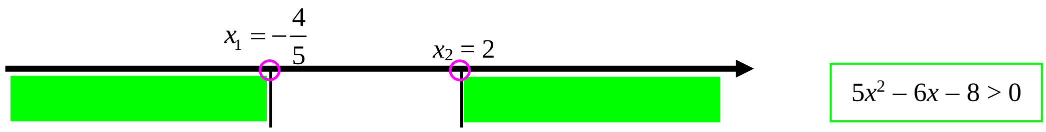
Utilizzando la formula risolutiva si ha:

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4(5)(-8)}}{2(5)} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 160}}{10} = \frac{6 \pm \sqrt{196}}{10} = \frac{6 \pm 14}{10} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{6 - 14}{10} = -\dfrac{8}{10} = -\dfrac{4}{5} \\ x_2 = \dfrac{6 + 14}{10} = \dfrac{20}{10} = 2 \end{cases}$$

Dunque, essendo $a > 0$ e $\Delta > 0$, la disequazione data è soddisfatta per valori esterni all'intervallo di estremi x_1 ed x_2, cioè per:

$$x < -\frac{4}{5} \quad \text{e} \quad x > 2$$

Si osservi che gli estremi non sono compresi in quanto nella disequazione figura il simbolo "$>$" e non quello "$\geq$".
Graficamente è possibile rappresentare l'insieme delle soluzioni della disequazione assegnata nel modo seguente:



2) $-x^2 + 9x - 14 > 0$ **PRIMO CASO: $\Delta = b^2 - 4ac > 0$**

In questo caso risulta $a < 0$ ma , in virtù di quanto sopra detto, è sempre possibile ricondursi al caso $a > 0$ moltiplicando ambo i membri della disequazione data per -1, ovvero cambiando di segno ad ambo i membri della disequazione, ricordandosi chiaramente di cambiare anche il verso della disequazione. Nel caso in questione, quindi, si avrà:

$$x^2 - 9x + 14 < 0$$

la cui equazione associata:

$$x^2 - 9x + 14 = 0$$

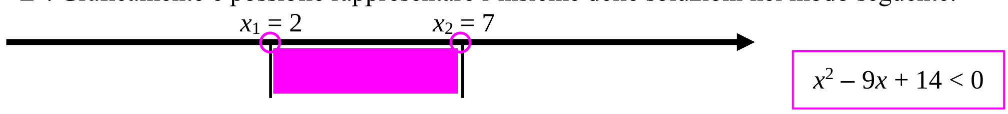
avrà come soluzioni:

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4(1)(14)}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 56}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{9 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{9 - 5}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \\ x_2 = \dfrac{9 + 5}{2} = \dfrac{14}{2} = 7 \end{cases}$$

Dunque, essendo $a > 0$ e $\Delta > 0$, la disequazione è soddisfatta per valori interni all'intervallo di estremi x_1 ed x_2, cioè per:

$$x_1 = 2 < x < x_2 = 7$$

Si osservi che anche in questo caso sono stati esclusi gli estremi in quanto nella disequazione figura il simbolo "$<$" e non quello "$\leq$". Graficamente è possibile rappresentare l'insieme delle soluzioni nel modo seguente:

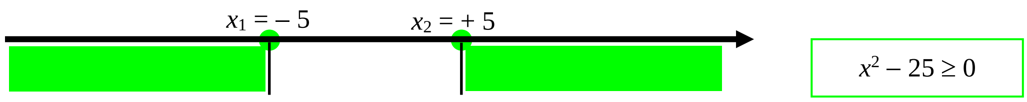


3) $x^2 - 25 \geq 0$ **PRIMO CASO: $\Delta = b^2 - 4ac > 0$**

In questo caso risulta $a > 0$, manca il termine in x e si può osservare che il binomio, che figura al primo membro, è proprio la differenza di due quadrati, precisamente è il risultato del prodotto di una somma per la loro differenza.
Quindi l'equazione associata può essere scritta anche come:
$x^2 - 25 = 0 \Rightarrow (x - 5)(x + 5) = 0 \Rightarrow x_1 = +5$ e $x_2 = -5$
Si osservi, però che era possibile ottenere lo stesso risultato anche per altra via:
$x^2 - 25 = 0 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 5$
Dunque, essendo $a > 0$ e $\Delta > 0$, la disequazione è soddisfatta per valori esterni all'intervallo di estremi x_1 ed x_2, cioè per:

$$x \leq x_1 = -5 \quad \text{e} \quad x \geq x_2 = +5$$

Si osservi che è stato messo anche il segno di uguale in quanto gli estremi dell'intervallo devono essere compresi, figurando nella disequazione di partenza non semplicemente il simbolo ">", bensì quello di "≥".
Graficamente è possibile rappresentare l'insieme delle soluzioni nel modo seguente:



4) $2x^2 - 3x + 5 > 0$ **TERZO CASO: $\Delta = b^2 - 4ac < 0$**

Le soluzioni dell'equazione associata $2x^2 - 3x + 5 = 0$ sono complesse coniugate in quanto:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4(2)(5) = 9 - 40 = -31 < 0$$

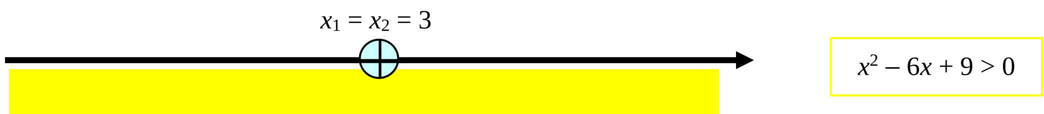
Dunque, essendo $a > 0$ e $\Delta < 0$, la disequazione è soddisfatta per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Graficamente è possibile rappresentare l'insieme delle soluzioni nel modo seguente:

5) $x^2 - 6x + 9 > 0$ **SECONDO CASO: $\Delta = b^2 - 4ac = 0$**

Le soluzioni dell'equazione associata $x^2 - 6x + 9 = 0$ sono reali e coincidenti, essendo il trinomio, che figura al primo membro dell'equazione, proprio il quadrato del binomio $x - 3$, ovvero essendo $\Delta = 36 - 36 = 0$. Si può allora scrivere:
$x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x - 3)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 3$

Ne segue che la disequazione è soddisfatta per ogni $x \in R \,/\, \{x = 3\}$, ovvero per tutti gi x appartenenti ad $\mathbb{R}$, ad eccezione di $x = 3$, valore che soddisfa l'equazione associata ma non la disequazione data (nella disequazione, infatti, compare il simbolo ">" e non il simbolo "≥").
Graficamente è possibile rappresentare l'insieme delle soluzioni nel modo seguente:



6) $x^2 - x + 5 < 0$ **TERZO CASO: $\Delta = b^2 - 4ac < 0$**

Le soluzioni dell'equazione associata $x^2 - x + 5 = 0$ sono complesse e coniugate, essendo:
$\Delta = 1 - 4(5) = 1 - 20 = -19 < 0$

Ne segue che la disequazione non è mai soddisfatta, indipendentemente dal valore attribuito alla variabile $x \in \mathbb{R}$.

Graficamente è possibile rappresentare l'insieme delle soluzioni nel modo seguente:

DISEQUAZIONI RAZIONALI FRATTE O FRAZIONARIE.

Le disequazioni ***razionali fratte*** o ***frazionarie*** sono così denominate in quanto presentano la variabile x al denominatore. Se ridotte a forma normale sono del tipo:

$$(1) \qquad \frac{P_1(x)}{P_2(x)} > 0$$

oppure:

$$(2) \qquad \frac{P_1(x)}{P_2(x)} < 0$$

dove:
- $P_2(x) \neq 0$;
- $P_1(x)$ e $P_2(x)$ sono polinomi nella variabile x;
- il grado di $P_1(x)$ è arbitrario;
- il grado di $P_2(x)$ è maggiore od uguale ad uno (se $P_2(x)$ avesse grado zero, cioè se $P_2(x)$ fosse un numero, allora non si potrebbe parlare di disequazione frazionaria).

Per studiare tali disequazioni occorre studiare il segno del rapporto $\frac{P_1(x)}{P_2(x)}$, cioè determinare il segno sia del numeratore che del denominatore.
Per comodità poniamo sia il numeratore che il denominatore maggiori di zero. Precisamente:

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} > 0 \Leftrightarrow P_1(x) > 0 \text{ e } P_2(x) > 0 \qquad (\alpha)$$

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} < 0 \Leftrightarrow P_1(x) > 0 \text{ e } P_2(x) > 0 \qquad (\beta)$$

Dopo aver risolto le disequazioni (α) o (β) ed aver riportato su uno stesso grafico le soluzioni ottenute, per determinare le soluzioni della disequazione fratta basta applicare la ***regola dei segni*** e considerare, come soluzioni della (1) quelle con il segno positivo, e come soluzioni della (2) quelle con il segno negativo.

Esempi.
1) Sia data la seguente disequazione:

$$\frac{3x-2}{9-x^2} > 0$$

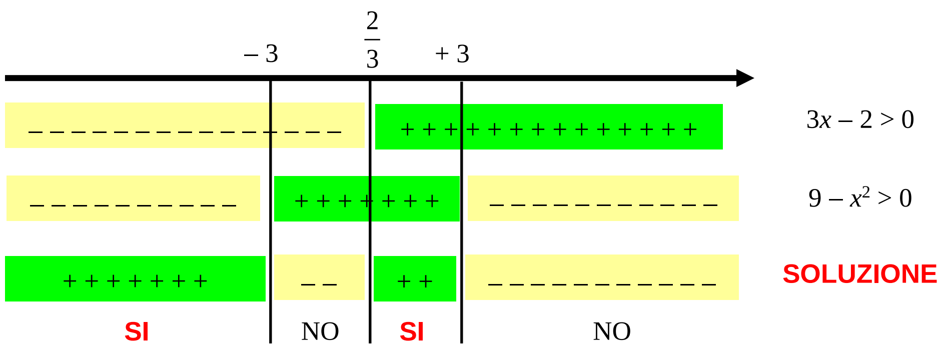
Per determinare le sue soluzioni poniamo numeratore e denominatore entrambi positivi, cioè:

$$(\alpha) \qquad 3x - 2 > 0 \qquad \text{e} \qquad 9 - x^2 > 0$$

Se si considerano le disequazioni (α), si ottengono le soluzioni:

$$x > \frac{2}{3} \qquad \text{e} \qquad -3 < x < +3$$

Graficamente si ha:
(α)



2) Sia data la disequazione:

$$\frac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 7} < 0$$

Per determinare le sue soluzioni poniamo numeratore e denominatore entrambi positivi, cioè:

(α) $\quad x^3 - 3x^2 > 0 \quad$ e $\quad x^2 - 5x + 7 > 0$

Se si considerano le disequazioni (α), si ottengono le soluzioni:

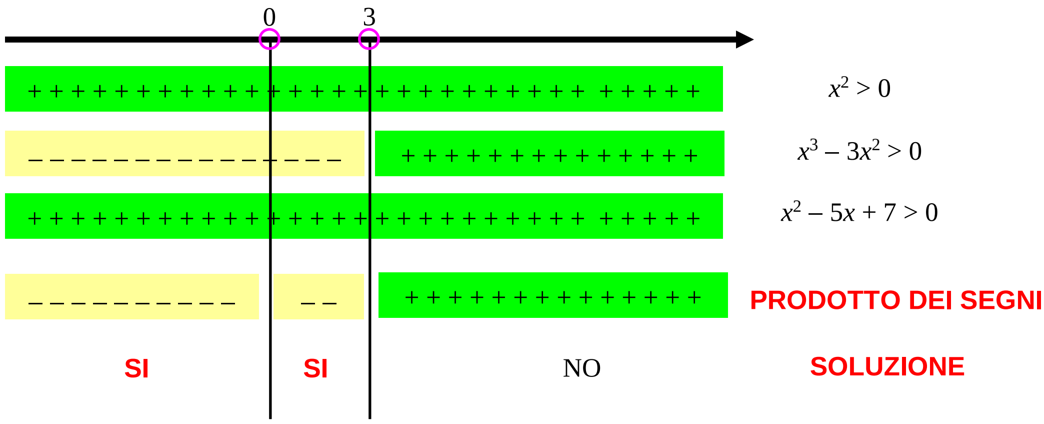
$x^3 - 3x^2 > 0 \Rightarrow x^2 (x - 3) > 0 \Rightarrow x^2 > 0$ e $x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$ (x^2 è sempre positivo in quanto è un quadrato!!!)

$x^2 - 5x + 7 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$

$x^2 - 5x + 7 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-28}}{2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{-3}}{2} \qquad \Delta < 0$

Graficamente si ha:

(α)



ESERCIZI PROPOSTI.

Disequazioni razionali intere di primo grado.

$(x+2)^2 > x^2$	$[x > -1]$
$\left(x-\frac{1}{2}\right)^3 < x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5$	$\left[x < \frac{41}{6}\right]$
$\frac{2}{3}x - \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$	$\left[x < \frac{9}{8}\right]$
$\frac{3}{4}x - \frac{1}{2} > 2$	$\left[x > \frac{10}{3}\right]$
$\frac{1}{2}x - 6 < 0$	$[x < 12]$
$7 - (2x-1) < x - 3$	$\left[x > \frac{11}{3}\right]$
$3x - 4(-2x-6) < 2(3x-6) - 4$	$[x < -8]$
$\frac{1}{4} - \frac{1}{2}(x+2) < 2x - \frac{1}{2}(x+4)$	$\left[x > \frac{5}{8}\right]$
$\frac{(3x-2)^2}{4} - 1 < \frac{(3x+4)^2}{4} - \frac{3}{4}x + 1$	$\left[x > -\frac{20}{33}\right]$
$(x-1)^2 - \frac{1}{3}x < x\left(x-\frac{1}{3}\right) - 2x - 4$	[*Nessuna soluzione*]
$4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right) - x(x+2) + 3x < x(4+3x) - \frac{2x-1}{4}$	$\left[-\frac{1}{2} < x < +\infty\right]$
$x(2-x)^2 + 4(x+4)^2 < x^3 - 8 + \frac{3x-6}{5}$	$\left[-\infty < x < -\frac{122}{59}\right]$
$\frac{\frac{x-2}{3} - \frac{x-4}{2}}{\frac{1}{4}} + \frac{5}{6}x < \frac{5-2x}{12}$	$\left[-\infty < x < -\frac{59}{4}\right]$
$\frac{x}{4} - 16 + 18x > x\left(x+\frac{1}{4}\right) - (x-9)^2$	$\forall x \in \mathbb{R}$

Disequazioni razionali intere di secondo grado.

$x^2 - 6x > 0$	$[x < 0;\ x > 6]$
$3x - x^2 > 0$	$[0 < x < 3]$
$x^2 - 4 < 0$	$[-2 < x < +2]$
$x^2 - 8 > 0$	$\left[x < -2\sqrt{2};\ x > 2\sqrt{2}\right]$
$x^2 - 6x + 8 > 0$	$[x < 2;\ x > 4]$
$x^2 + 3x - 4 > 0$	$[x < -1;\ x > 4]$
$x^2 - 8x + 15 < 0$	$[3 < x < 5]$
$x^2 - 9x + 18 < 0$	$[3 < x < 6]$
$-6x^2 < 0$	$\forall x \in \mathbb{R}$
$x^2 + 1 > 0$	$\forall x \in \mathbb{R}$
$9x^2 - 6x + 1 \geq 0$	$\forall x \in \mathbb{R}$
$-x^2 + 7 \leq 0$	$\left[x \leq -\sqrt{7};\ x \geq +\sqrt{7}\right]$
$6x^2 - 5 \geq 0$	$\left[x \leq -\frac{\sqrt{30}}{6};\ x \geq +\frac{\sqrt{30}}{6}\right]$
$8x^2 - 4x(2x-1) + 4x^2 - 3 \geq 0$	$\left[-\infty < x \leq -\frac{3}{2};\ \frac{1}{2} \leq x < +\infty\right]$

$\frac{x^2+16}{4}-\frac{x-3}{2}<1-x$ [*Nessuna soluzione*]

$(x+4)^2-\frac{x-1}{3}+8<0$ [*Nessuna soluzione*]

$(1-3x)^2 > (x+2)(x-2)-3x+5$ $\left[-\infty<x<0;\ \frac{3}{8}<x<+\infty\right]$

$x-(x+3)^2-(2x+1)(2x-1)+3x>-9$ $\left[\frac{-1-\sqrt{6}}{5}<x<\frac{-1+\sqrt{6}}{5}\right]$

$(x-1)(x-3)(x-4)>(x-5)^3$ $\forall x\in\mathbb{R}$

$\frac{3-2x}{2}-\frac{(x-1)^2}{4}<3$ $\forall x\in\mathbb{R}$

$x^2-3<(1+2x)^2-2$ $\forall x\in\mathbb{R}$

$3x(x-2)<\frac{x+2}{2}-6x$ $\left[-\frac{1}{2}<x<\frac{2}{3}\right]$

Disequazioni razionali fratte.

$\frac{2x+1}{3x-2}\geq 0$ $\left[x\leq-\frac{1}{2};\ x>\frac{2}{3}\right]$

$\frac{-3x+4}{x-2}<0$ $\left[x<\frac{4}{3};\ x>2\right]$

$\frac{4-6x}{2x-1}\geq 0$ $\left[\frac{1}{2}<x\leq\frac{2}{3}\right]$

$\frac{x-1}{x-2}>0$ $[-\infty<x<1;\ 2<x<+\infty]$

$\frac{2x-3}{x-4}>0$ $\left[-\infty<x<\frac{3}{2};\ 4<x<+\infty\right]$

$\frac{x-3}{2x-5}<0$ $\left[\frac{5}{2}<x<3\right]$

$\frac{4-x}{x-2}>0$ $[2<x<4]$

$\frac{11}{2x+3}>\frac{5}{2-x}$ $\left[-\frac{3}{2}<x<\frac{1}{3};\ x>2\right]$

$\frac{4}{x+2}>3-\frac{x}{x-1}$ $\left[-2<x<-\frac{1}{2};\ 1<x<2\right]$

$\frac{x^2+25}{x^2-4x}<0$ $[0<x<4]$

$2x-\frac{x^2-7}{4}\geq\frac{4x-1}{2}$ $[-3<x<+3]$

$\frac{8}{2x+5}\geq\frac{7}{3x-2}$ $\left[-\frac{5}{2}<x<\frac{2}{3};\ x\geq\frac{51}{10}\right]$

$\frac{x^2-5x+8}{9-x^2}<0$ $[-\infty<x<-3;\ 3<x<+\infty]$

$\frac{x^2+2x-5}{x^2-6x+8}<0$ $\left[-1-\sqrt{6}<x<-1+\sqrt{6};\ 2<x<4\right]$

$\frac{x(x-1)^3}{x^4-81}\geq 0$ $[-\infty<x<-3;\ 0\leq x\leq 1;\ 3<x<+\infty]$

$\frac{x^4+4x^2}{1-27x^3}\leq 0$ $\left[\frac{1}{3}<x<+\infty;\ \{0\}\right]$

$\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x}\le\frac{1}{x^2-x}$	$[x<0;\ 0<x<1;\ x\ne 0]$
$\frac{x-2\sqrt{2}}{4x-\sqrt{5}}<0$	$\left[\frac{\sqrt{5}}{4}<x<2\sqrt{2}\right]$
$\frac{x+2}{x-3}<1$	$[x<3]$
$\frac{4x-2}{x-5}\ge 2$	$[x\le -4;\ x>5]$
$\frac{3}{x-2}\le\frac{2}{2x-3}$	$\left[-\frac{1}{2}<x<1;\ x>4\right]$
$\frac{x}{x-3}-\frac{4}{x-2}\ge 1$	$[x<2;\ 3<x\le 6]$
$\frac{(2x+1)^2(x-3)}{(2x+1)(x-4)(x-2)}\ge 0$	$\left[x<-\frac{1}{2};\ 2<x\le 3;\ x>4\right]$
$\frac{2x+1}{4x^2-9}-\frac{x}{2x+3}<\frac{x-3}{2x-3}$	$\left[x<-\frac{3}{2};\ \frac{4-\sqrt{14}}{4}<x<\frac{3}{2};\ x>\frac{4+\sqrt{14}}{4}\right]$
$\frac{4x-x^2}{9x^2+6x+1}\ge 0$	$[0\le x\le 4]$
$\frac{x^3-3x^2}{x^2-5x+7}<0$	$[-\infty<x<0;\ 0<x<3]$
$\frac{x^2+2x+4}{3-x^2}<0$	$\left[-\infty<x<-\sqrt{3};\ \sqrt{3}<x<+\infty\right]$
$\frac{2x^2-5x+2}{3x}>0$	$\left[0<x<\frac{1}{2};\ 2<x<+\infty\right]$
$\frac{x^2-3\sqrt{2}x+4}{x-2}<0$	$\left[-\infty<x<\sqrt{2};\ 2<x<2\sqrt{2}\right]$
$\frac{x^2-2}{2x-3}\ge 1$	$\left[\{x=1\};\ \frac{3}{2}<x<+\infty\right]$
$\frac{x^2+3x}{x^2-3x-4}>0$	$[-\infty<x<-3;\ -1<x<0;\ 4<x<+\infty]$
$\frac{x^2-x-6}{x^2-6x+5}<0$	$[-2<x<1;\ 3<x<5]$
$\frac{x^2+4x+3}{x^2+2x}>0$	$[-2<x<0]$
$\frac{3x^2-4x+1}{3x^2-10x-8}\ge 0$	$\left[-\infty<x<-\frac{2}{3};\ \frac{1}{3}\le x\le 1;\ 4<x<+\infty\right]$
$\frac{2x^2-10x+5}{(x-1)(2x-1)}>0$	$\left[-\infty<x<\frac{1}{2};\ \frac{5-\sqrt{15}}{2}<x<1;\ \frac{5+\sqrt{15}}{2}<x<+\infty\right]$
$\frac{2(x+1)^2+1}{x^3-1}+\frac{x}{x^2+x+1}-\frac{2}{x-1}>0$	$[1<x<+\infty]$