LO STUDIO DI FUNZIONI

Daniela Tondini

dtondini@unite.it

Facoltà di Scienze politiche

CdS in Economia

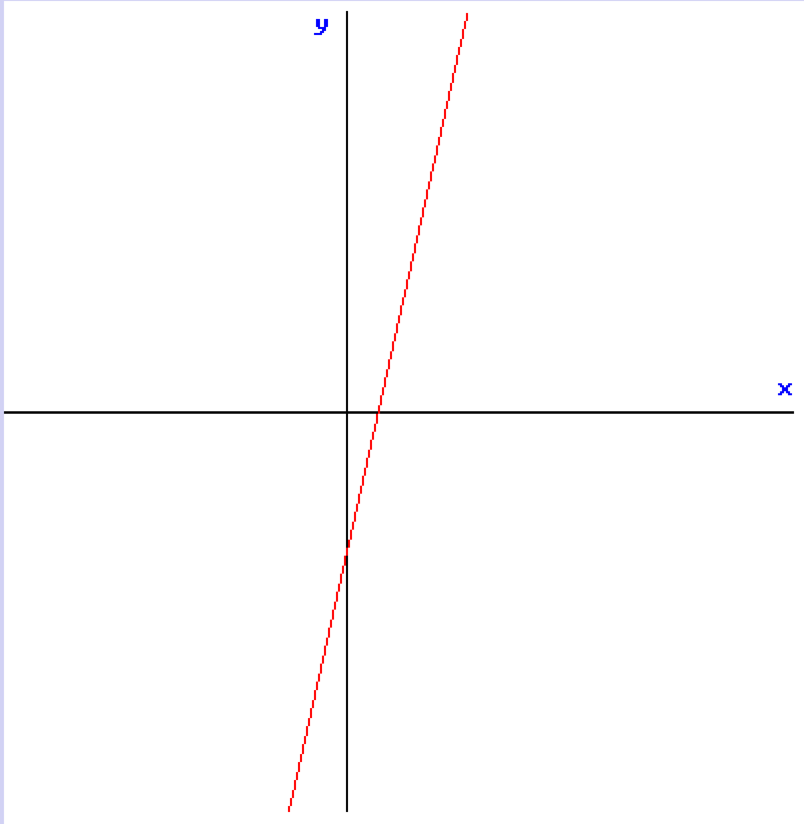
Università degli Studi di Teramo

POLINOMIALI

$n = 1$ → *retta*

$$y = P_1(x) = 5x - 7$$

$$a > 0$$

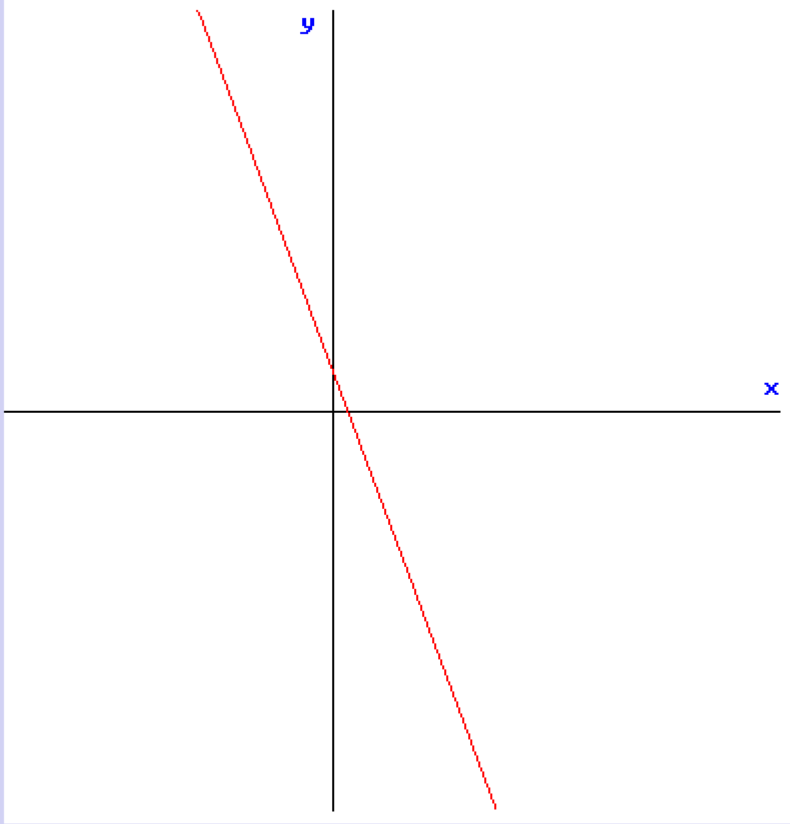


POLINOMIALI

n* = 1** → ***retta

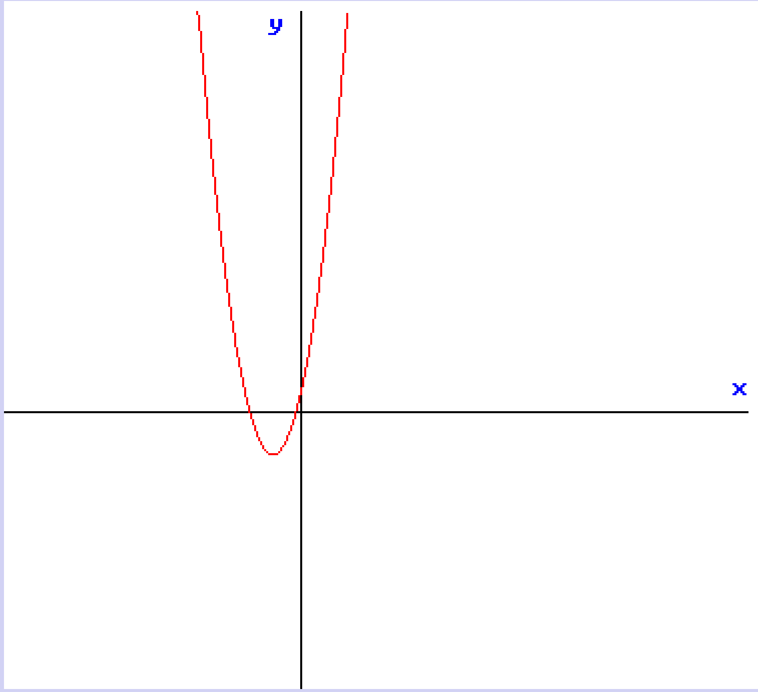
$$y = P_1(x) = -3x + 2$$

***a* < 0**



POLINOMIALI

n* = 2** → ***parabola



$$y = P_2(x) = 2x^2 + 5x + 1$$

***a* > 0**

concavità verso l'alto

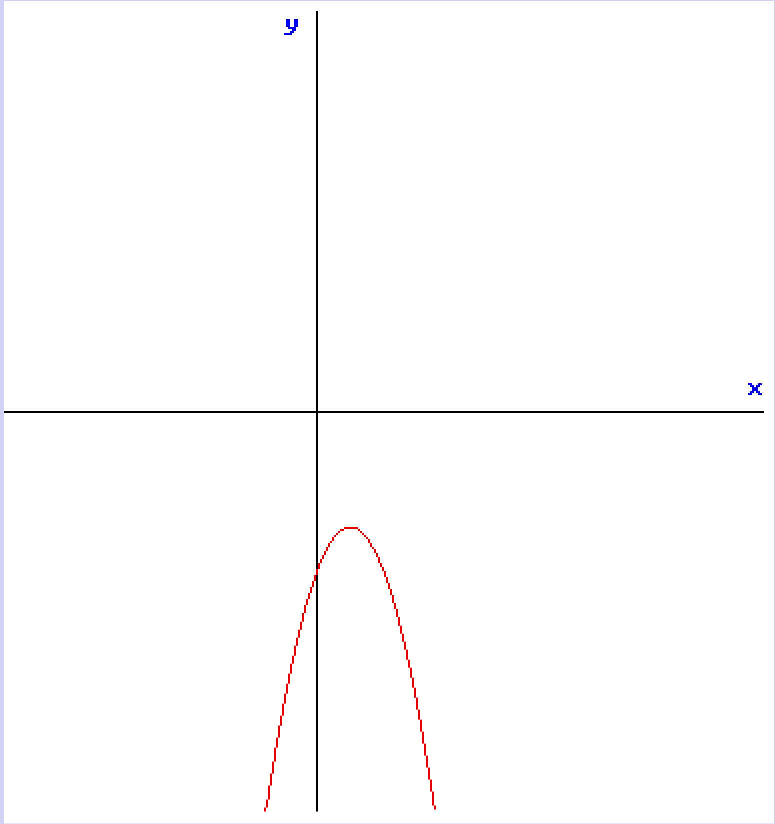
POLINOMIALI

n* = 2** → ***parabola

$$y = P_2(x) = -x^2 + 3x - 8$$

***a* < 0**

concavità verso il basso

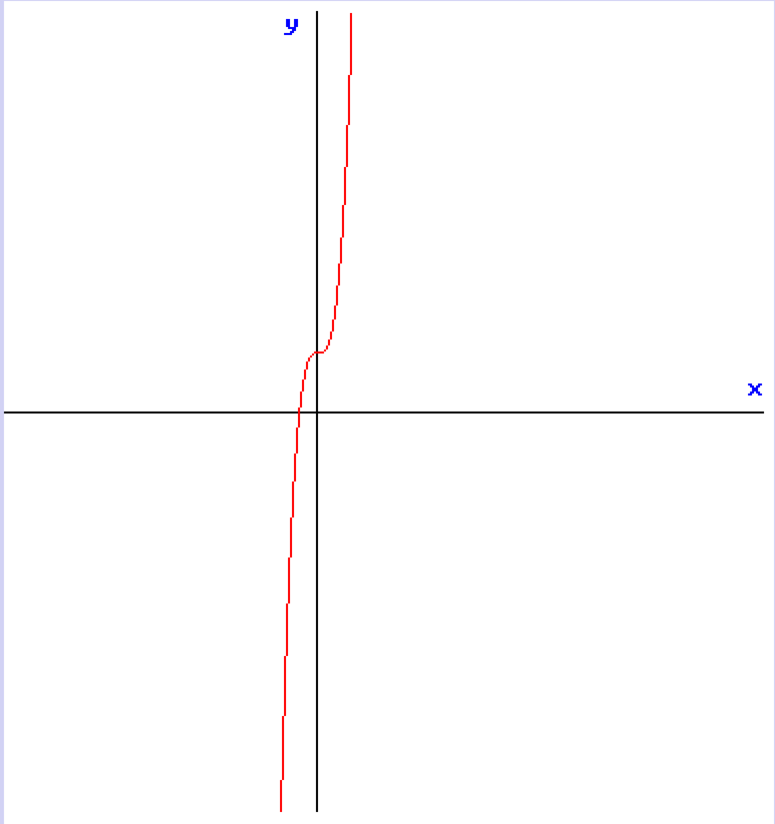


POLINOMIALI

n* = 3** → ***cubica

$$y = P_3(x) = 5x^3 - x^2 + 3$$

$\boldsymbol{a > 0}$

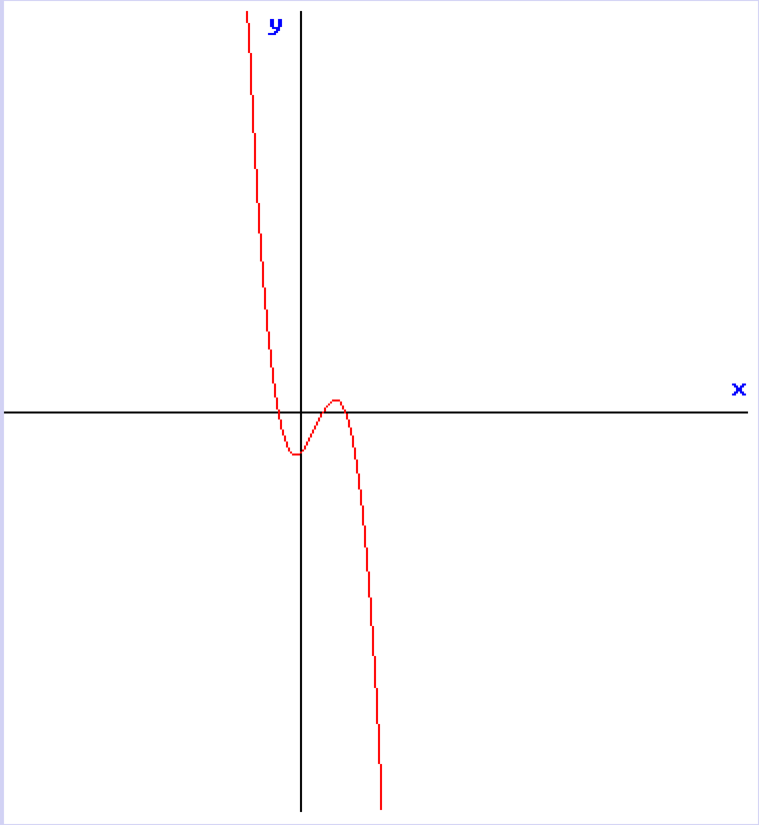


POLINOMIALI

$n = 3$ → *cubica*

$$y = P_3(x) = -x^3 + 2x^2 + x - 2$$

$a < 0$



Esempio 1

$n = 2$

$$y = P_2(x) = -x^2 + 7x + 5$$

$$\Downarrow$$

1) Determinazione del campo di esistenza (*C.E.*)

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty\} = \mathbb{R}$$

Ogni polinomio, indipendentemente dal grado,
è definito su tutta la retta reale, cioè su tutta la retta reale

$$y = P_2(x) = -x^2 + 7x + 5$$

2) Intersezioni con gli assi

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -x^2 + 7x + 5 \end{cases}$$

intersezione con l'asse *y*, ovvero con la retta *x* = 0

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = -x^2 + 7x + 5 \end{cases}$$

intersezione con l'asse *x*, ovvero con la retta *y* = 0

$$y = P_2(x) = -x^2 + 7x + 5$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -x^2 + 7x + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow A = (0,5)$$

intersezione con l’asse *y*

$$\begin{cases} y = 0 \\ -x^2 + 7x + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x_{1,2} = \dfrac{7 \pm \sqrt{69}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = \left(\dfrac{7 - \sqrt{69}}{2}, 0 \right) \\ C = \left(\dfrac{7 + \sqrt{69}}{2}, 0 \right) \end{cases}$$

intersezioni con l’asse *x*

$$y = P_2(x) = -x^2 + 7x + 5$$

$\Downarrow$

3) Studio del segno della funzione

$$y > 0 \iff -x^2 + 7x + 5 > 0$$

$\Downarrow$ **cambiando il segno ed il verso della disequazione**

$$y > 0 \iff x^2 - 7x - 5 < 0$$

$\Downarrow$ **trovando le soluzioni dell'equazione associata**

$$x^2 - 7x - 5 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 20}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{69}}{2}$$

$$x^2-7x-5<0 \iff \frac{7-\sqrt{69}}{2}<x<\frac{7+\sqrt{69}}{2}$$

$$y>0 \iff -x^2+7x+5>0 \iff x^2-7x-5<0 \iff \frac{7-\sqrt{69}}{2}<x<\frac{7+\sqrt{69}}{2}$$

	$\frac{7-\sqrt{69}}{2}$		$\frac{7+\sqrt{69}}{2}$	
- - - - - - -		+ + + + +		- - - - - - -
$y<0$		$y>0$		$y<0$

$$y = P_2(x) = -x^2 + 7x + 5$$

$$\Downarrow$$

4) Limiti agli estremi del *C.E.*

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty\} = \mathbb{R}$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} \left(-x^2 + 7x + 5\right) = ???$$

$$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to -\infty} \left(-x^2 + 7x + 5\right) = ???$$

In generale:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(a_0x^n\right)=a_0\lim_{x\to+\infty}\left(x^n\right)=$$

$$=\begin{cases}+\infty \text{ se } a_0 \text{ è positivo}, \forall n\\ -\infty \text{ se } a_0 \text{ è negativo}, \forall n\end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(a_0x^n\right)=a_0\lim_{x\to-\infty}\left(x^n\right)=$$

$$=\begin{cases}+\infty \text{ se } n \text{ è pari ed } a_0 \text{ è positivo}\\ -\infty \text{ se } n \text{ è pari ed } a_0 \text{ è negativo}\\ -\infty \text{ se } n \text{ è dispari ed } a_0 \text{ è positivo}\\ +\infty \text{ se } n \text{ è dispari ed } a_0 \text{ è negativo}\end{cases}$$

$$y = P_2(x) = -x^2 + 7x + 5$$

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} \left(-x^2 + 7x + 5\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(-x^2\right) = -\lim_{x \to +\infty} \left(x^2\right) = -\left(+\infty\right)^2 = -\left(+\infty\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to -\infty} \left(-x^2 + 7x + 5\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(-x^2\right) = -\lim_{x \to -\infty} \left(x^2\right) = -\left(-\infty\right)^2 = -\left(+\infty\right) = -\infty$$

la funzione data non ammette *asintoti orizzontali*

$$x \to +\infty \Rightarrow y \to -\infty$$

$$x \to -\infty \Rightarrow y \to -\infty$$

$$y = P_2(x) = -x^2 + 7x + 5$$

⬇

5) Calcolo della derivata prima

$$D(x^n) = nx^{n-1}$$

$$D(a_0 x^n) = a_0 D\left(x^n\right) = a_0 n x^{n-1}$$

$$D(a_0) = 0$$

$$D(x) = 1$$

$$D\left[P_1(x) + P_2(x) + \ldots + P_n(x)\right] = D\left[P_1(x)\right] + D\left[P_2(x)\right] + \ldots + D\left[P_n(x)\right]$$

⬇

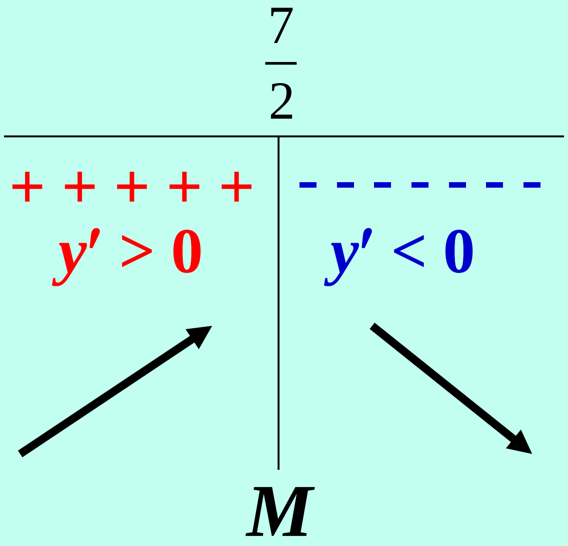
$$y' = D\left[P_2(x)\right] = D\left(-x^2 + 7x + 5\right) = D\left(-x^2\right) + D(7x) + D(5) =$$

$$= -2x + 7 + 0 = -2x + 7$$

$$y = P_2(x) = -x^2 + 7x + 5$$

6) Studio del segno della derivata prima

$$y' > 0 \iff -2x + 7 > 0 \iff -2x > -7 \iff 2x < 7 \iff x < \frac{7}{2}$$



$$y = P_2(x) = -x^2 + 7x + 5$$

⬇

$x = \frac{7}{2}$ **è un *massimo* per la funzione**

⬇

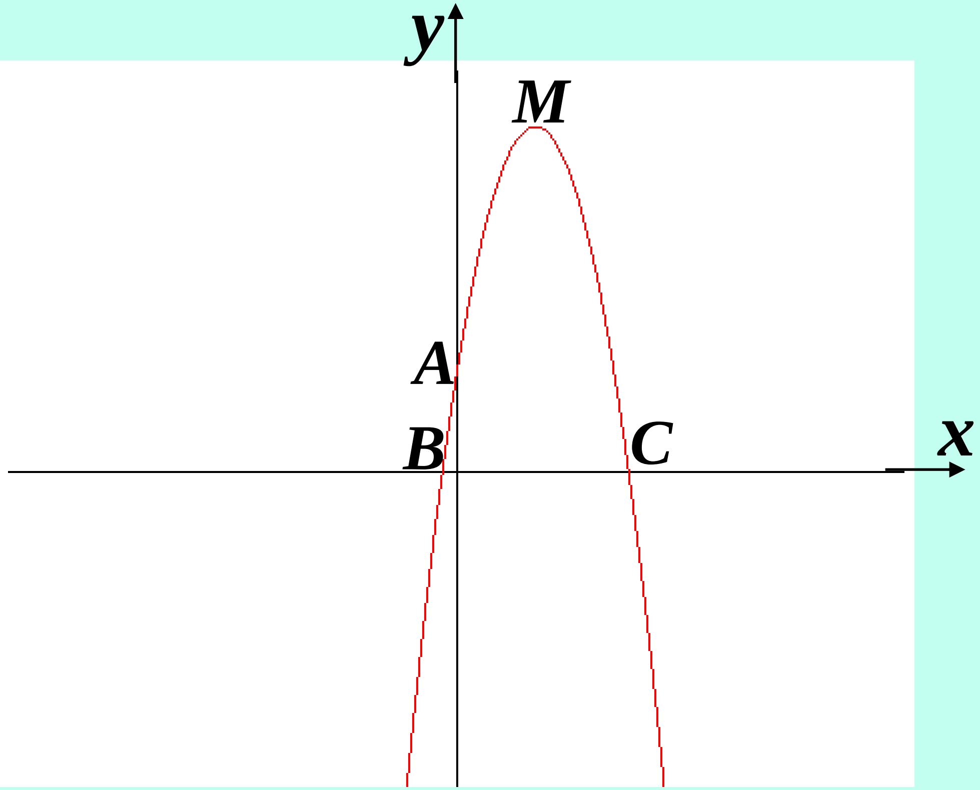
$$x = \frac{7}{2} \;\Rightarrow\; y = P_2\left(\frac{7}{2}\right) = -\left(\frac{7}{2}\right)^2 + 7\left(\frac{7}{2}\right) + 5 = \frac{69}{4}$$

⬇

$M = \left(\frac{7}{2}, \frac{69}{4}\right)$ **è un *punto di Massimo* per la funzione**

$$y = P_2(x) = -x^2 + 7x + 5$$

7) Grafico della funzione



Esempio 2

$n = 3$

$$y = P_3(x) = x^3 - x$$

1) Determinazione del campo di esistenza (*C.E.*)

$$C.E. = \left\{ x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty \right\} = \mathbb{R}$$

$$y = P_3(x) = x^3 - x$$

2) Intersezioni con gli assi

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = x^3 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A = (0,0) \equiv O$$

intersezione con l'asse *y*

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = x^3 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = +1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = (0,0) \equiv A \equiv O \\ C = (-1,0) \\ D = (+1,0) \end{cases}$$

intersezioni con l'asse *x*

$$y = P_3(x) = x^3 - x$$

3) Studio del segno della funzione

$$y > 0 \iff x^3 - x > 0$$

raccogliendo la *x*

$$y > 0 \iff x(x^2 - 1) > 0$$

trovando le soluzioni dell'equazione associata

$$x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_{2,3} = \pm 1$$

$$x^3 - x > 0 \;\Leftrightarrow\; x > 0,\; x^2 - 1 > 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x > 0 \\ x < -1, x > +1 \end{cases}$$

–1 0 1

- - - - - - - -	- - - -	+ + +	+ + + + + +
+ + + + + +	- - - -	- - - -	+ + + + + +
-	+	-	+
$y < 0$	$y > 0$	$y < 0$	$y > 0$

$$y = P_3(x) = x^3 - x$$

$$\Downarrow$$

4) Limiti agli estremi del *C.E.*

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty\} = \mathbb{R}$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} \left(x^3 - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(x^3\right) = \left(+\infty\right)^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to -\infty} \left(x^3 - x\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(x^3\right) = \left(-\infty\right)^3 = -\infty$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{x \to +\infty \Rightarrow y \to +\infty}$$

$$\boldsymbol{x \to -\infty \Rightarrow y \to -\infty}$$

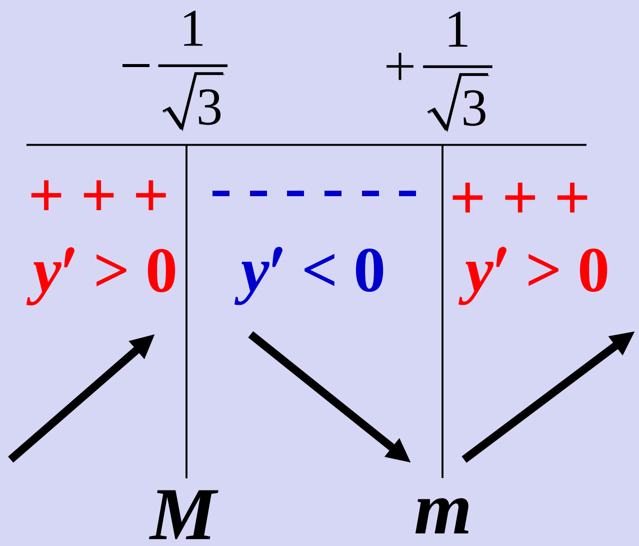
$$y = P_3(x) = x^3 - x$$

5) Calcolo della derivata prima

$$y' = D\left[P_3(x)\right] = D\left(x^3 - x\right) = D\left(x^3\right) - D(x) = 3x^2 - 1$$

6) Studio del segno della derivata prima

$$y' > 0 \iff 3x^2 - 1 > 0 \iff x < -\sqrt{\frac{1}{3}}, x > +\sqrt{\frac{1}{3}} \iff x < -\frac{1}{\sqrt{3}}, x > +\frac{1}{\sqrt{3}}$$



$$y = P_3(x) = x^3 - x$$

⬇

$x = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ **è un *Massimo* per la funzione**

$x = +\frac{1}{\sqrt{3}} = +\frac{\sqrt{3}}{3}$ **è un *minimo* per la funzione**

⬇

$$x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cong -0,57 \quad \Rightarrow \quad y = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9} \cong 0,38$$

$$x = +\frac{\sqrt{3}}{3} \cong +0,57 \quad \Rightarrow \quad y = \left(+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 - \left(+\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{9} \cong -0,38$$

⬇

$$M = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$$

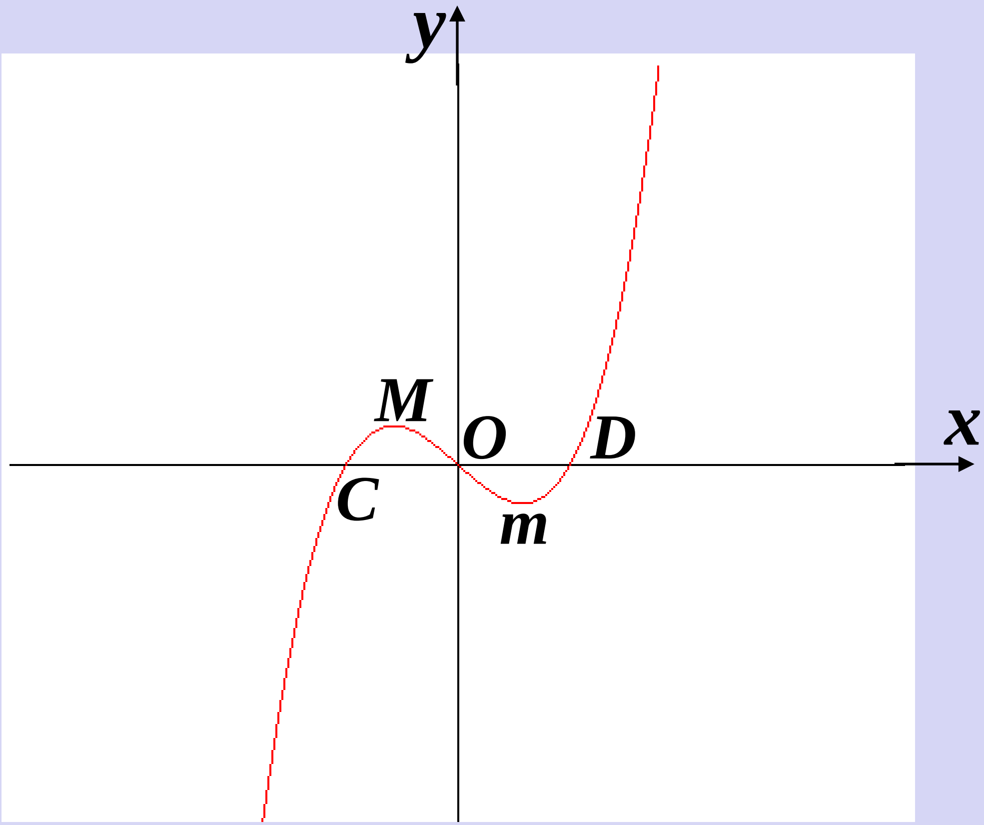
punto di Massimo

$$m = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$$

punto di minimo

$$y = P_3(x) = x^3 - x$$

7) Grafico della funzione



Esempio 3

***n* = 3**

$$y = P_3\left(x\right) = x^3 + x^2 + 2x - 4$$

↓

1) Determinazione del campo di esistenza (*C.E.*)

$$C.E. = \left\{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty\right\} = \mathbb{R}$$

$$y = P_3(x) = x^3 + x^2 + 2x - 4$$

$\Downarrow$

Scomposizione con Ruffini

$$x^3 + x^2 + 2x - 4$$

$\Downarrow$

$\pm 1, \ \pm 2, \ \pm 4$ **sono i divisori del termine noto –4**

$\Downarrow$

$$x = +1 \ \Rightarrow \ P_3(1) = 1^3 + 1^2 + 2(1) - 4 = 0$$

	1	1	2	−4
1		1	2	4
	1	2	4	0

$$y = P_3(x) = x^3 + x^2 + 2x - 4 \;\Rightarrow\; y = P_3(x) = (x-1)\left(x^2 + 2x + 4\right)$$

$$y = P_3(x) = x^3 + x^2 + 2x - 4$$

$$\Downarrow$$

2) Intersezioni con gli assi

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = x^3 + x^2 + 2x - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -4 \end{cases} \Rightarrow A = (0, -4)$$

intersezione con l'asse *y*

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = x^3 + x^2 + 2x - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ (x-1)(x^2 + 2x + 4) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x - 1 = 0 \\ x^2 + 2x + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \\ x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-4} = -1 \pm \sqrt{-3} \quad mai \end{cases} \Rightarrow B = (1, 0)$$

intersezione con l'asse *x*

$$y = P_3(x) = x^3 + x^2 + 2x - 4$$

$\Downarrow$

3) Studio del segno della funzione

$$y > 0 \iff x^3 + x^2 + 2x - 4 > 0$$

$\Downarrow$

$$(x-1)\left(x^2 + 2x + 4\right) > 0$$

$$y>0 \iff \begin{cases} x-1>0 \\ x^2+2x+4>0 \end{cases} \iff \begin{cases} x>1 \\ \textit{sempre} \end{cases}$$

	1	
- - - - - - -		+ + + + +
+ + + + + +		+ + + + +
-		+
$y<0$		$y>0$

$$y = P_3(x) = x^3 + x^2 + 2x - 4$$

⬇

4) **Limiti agli estremi del *C.E.***

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty\} = \mathbb{R}$$

⬇

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} \left(x^3 + x^2 + 2x - 4\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(x^3\right) = (+\infty)^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to -\infty} \left(x^3 + x^2 + 2x - 4\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(x^3\right) = (-\infty)^3 = -\infty$$

⬇

$$\boldsymbol{x \to +\infty \Rightarrow y \to +\infty}$$

$$\boldsymbol{x \to -\infty \Rightarrow y \to -\infty}$$

$$y = P_3(x) = x^3 + x^2 + 2x - 4$$

5) Calcolo della derivata prima

$$y' = D\left[P_3(x)\right] = D\left(x^3 + x^2 + 2x - 4\right) = 3x^2 + 2x + 2$$

6) Studio del segno della derivata prima

$$y' > 0 \iff 3x^2 + 2x + 2 > 0 \quad \textit{sempre} \quad (\Delta < 0)$$

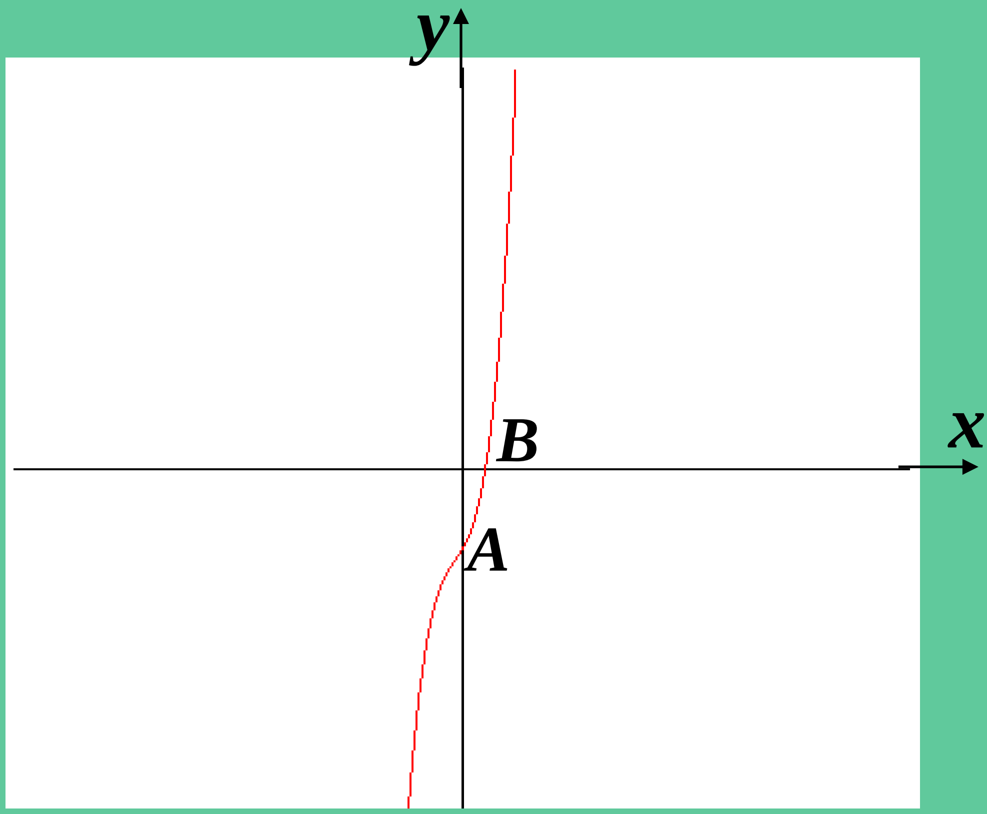
\+ + + + + + + + + + +

y′ > 0

La funzione è sempre crescente!!!
Non ci sono né massimi né minimi!!!

$$y = P_3(x) = x^3 + x^2 + 2x - 4$$

7) Grafico della funzione



Osservazioni!

Le funzioni polinomiali sono definite su tutto $\mathbb{R}$

$$C.E. = \left\{ x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty \right\} = \mathbb{R}$$

Le funzioni polinomiali non ammettono asintoti né verticali né orizzontali

$$x \to +\infty \Rightarrow y \to \pm\infty$$
$$x \to -\infty \Rightarrow y \to \pm\infty$$