LE FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

Daniela Tondini

dtondini@unite.it

Facoltà di Scienze Politiche

CdS in Economia

Università degli Studi di Teramo

LE FUNZIONI

In Economia le *funzioni* svolgono un ruolo di primo piano. Si pensi alle funzioni di:

- produzione;
- costo;
- profitto;
- utilità;
- domanda,

che costituiscono la rappresentazione matematica delle relazioni tra le variabili economiche.

LE FUNZIONI

Si chiama *funzione reale di una variabile reale* una corrispondenza tra due insiemi di numeri reali che ad ogni elemento del primo insieme associa uno ed un solo elemento del secondo insieme; in simboli si ha:

$$f : A \to B \text{ tale che } x \in A, y = f\left(x\right) \in B$$

ove l'insieme A prende il nome di *dominio* e l'insieme B è detto *codominio*; la x si dice *variabile indipendente* e la y *variabile dipendente*. L'insieme di definizione di una funzione reale, quindi, non è altro che il sottoinsieme del dominio costituito da tutti i valori che si possono attribuire alla variabile indipendente affinché la variabile dipendente abbia significato.

LE FUNZIONI

In Microeconomia si considerano prevalentemente funzioni di una variabile reale, quali quella tra la quantità q di un certo bene ed il suo prezzo *p*, funzione questa della forma:

$$q = f(p)$$

relazione che esprime come varia *q* al variare di *p*.

È ben noto, inoltre, come la derivata prima di una funzione reale misuri la *rapidità* con la quale avviene la variazione di un determinato fenomeno. Dato il grafico di una certa funzione $y = f(x)$, che descrive un ben preciso fenomeno, quindi, la sua variazione di intensità in un punto x_0 è rappresentata dalla *pendenza* del grafico della $y = f(x)$ in quel punto, ovvero dalla *retta tangente* al grafico nel punto:

$$(x_0, f(x_0))$$

LE FUNZIONI

In Economia la *pendenza* della *retta tangente* al grafico rappresenta la *marginalità*, ovvero il cambiamento di una variabile economica che si verifica in relazione a variazioni infinitesime di un fenomeno considerato.

Una *funzione di produzione*, ad esempio, non dipende solo dal capitale, ma anche dal lavoro, specializzato e non, dai macchinari, dalle materie prime, ...

Nelle discipline economiche, quindi, si incontrano spesso grandezze dipendenti da più variabili. Ed è proprio per questo che, per rappresentare i fenomeni economici, si utilizzano funzioni matematiche il cui andamento non dipende da una sola variabile; si ricorre, cioè, alle cosiddette *funzioni di più variabili*.

LE FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

Si dice *funzione reale in n variabili reali* una corrispondenza che ad ogni *n*-pla di elementi del primo insieme associa uno ed un solo elemento del secondo insieme, precisamente:

$$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ tale che}$$

$$\text{ad } \left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \in \mathbb{R}^n \text{ associa } y = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \in \mathbb{R}$$

ove gli elementi $\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ rappresentano le *n variabili indipendenti*, denominate anche *argomenti* della funzione, ed *y* la *variabile dipendente*.

LE FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

Se si considera, ad esempio, l'attività di un'azienda che produce una merce, il *volume del fattore di produzione y* dipende dagli $x_1, x_2, ..., x_n$ fattori impiegati (capitale, lavoro, materie prime, macchinari, …), ovvero:

$$y = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$$

LE FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

In Economia, le principali funzioni di più variabili sono quelle di:

- <u>produzione</u>:

$$q = a_1 x_1 + a_2 x_2 \qquad \text{(funzione lineare)}$$

$$q = k x_1^{h_1} \cdot x_2^{h_2} \qquad \text{(funzione di Cobb-Douglass)}$$

$$q = \min\left\{\frac{x_1}{c_1}, \frac{x_2}{c_2}\right\} \qquad \text{(funzione di Leontieff)}$$

$$q = k\left(c_1 x_1^{-\alpha} + c_2 x_2^{-\alpha}\right)^{-\frac{b}{a}} \qquad \text{(funzione ad elasticità costante)}$$

LE FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

Le precedenti funzioni a due variabili si possono generalizzare al caso di *k* variabili, studiando il comportamento di un consumatore in un'economia a *k* beni. Attraverso il vettore $x_1, x_2, \dots, x_n$, che rappresenta la quantità consumata di ciascuno dei *k* beni e che prende il nome di *paniere di beni*, si può definire la seconda funzione di più variabili, ovvero quella di:

- <u>utilità</u> che associa ad ogni paniere un numero

$$u\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right)$$

e che indica il grado di utilità/soddisfazione che il consumatore trae dal paniere.

LE FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

Data una funzione $u(c)$, la sua derivata prima:

$$u'(c)$$

rappresenta l'*utilità marginale*, ovvero la variazione dell'utilità dovuta ad un incremento infinitesimale della quantità consumata.

Data la funzione:

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

per poter studiare l'effetto della variazione di una delle n grandezze su un'altra variabile, quindi, occorre estendere il concetto di derivata alle funzioni di più variabili, considerando le cosiddette *derivate parziali*.

LE DERIVATE PARZIALI PRIME

Data una funzione:

$$y = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$$

si definiscono *derivate parziali prime* le derivate della funzione rispetto ad una sola delle variabili (tutte la altre variabili devono essere considerate come costanti) e le si indicano con:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = f_{x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} = f_{x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} = f_{x_n}$$

LE DERIVATE PARZIALI PRIME

Esempio 1:

$$f(x,y)=3x^2y^2$$

La derivata prima di f rispetto ad x si calcola derivando la f rispetto alla x, ovvero considerando l'altra variabile, cioè la y, costante:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\left[D\left(3x^2\right)\right]\cdot y^2=6x\cdot y^2=6xy^2$$

Analogamente, la derivata prima di f rispetto ad y si calcola derivando la f rispetto alla y, ovvero considerando l'altra variabile, cioè la x, costante:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=3x^2\cdot\left[D\left(y^2\right)\right]=3x^2\cdot 2y=6x^2y$$

LE DERIVATE PARZIALI PRIME

Esempio 2:

$$f(x,y) = 3x^2y^2 + 4xy^3 + 7y$$

In questo caso si applica la regola di derivazione di una somma:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left[D\left(3x^2\right)\right] \cdot y^2 + \left[D(4x)\right] \cdot y^3 + 0 = 6xy^2 + 4y^3$$

Analogamente, si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 \cdot \left[D\left(y^2\right)\right] + 4x \cdot \left[D\left(y^3\right)\right] + D(7y) =$$

$$= 3x^2 \cdot 2y + 4x \cdot 3y^2 + 7 = 6x^2y + 12xy^2 + 7$$

LE DERIVATE PARZIALI PRIME

Esempio 3:

$$f(x,y)=\frac{x+y}{x-y}$$

In questo caso si applica la regola di derivazione di un quoziente:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\left[\frac{\partial}{\partial x}(x+y)\right]\cdot(x-y)-(x+y)\cdot\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-y)\right]}{(x-y)^2}=$$

$$=\frac{1\cdot(x-y)-(x+y)\cdot 1}{(x-y)^2}=\frac{x-y-x-y}{(x-y)^2}=\frac{-2y}{(x-y)^2}$$

LE DERIVATE PARZIALI PRIME

Analogamente, si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\left[\frac{\partial}{\partial y}(x+y)\right]\cdot(x-y)-(x+y)\cdot\left[\frac{\partial}{\partial y}(x-y)\right]}{(x-y)^2}=$$

$$=\frac{1\cdot(x-y)-(x+y)\cdot(-1)}{(x-y)^2}=\frac{x-y+x+y}{(x-y)^2}=\frac{2x}{(x-y)^2}$$

LE DERIVATE PARZIALI PRIME

Esempio 4:

$$f(x,y)=e^{2x+3y}$$

In questo caso si applica la regola di derivazione di un esponente:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^{2x+3y}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial x}(2x+3y)\right]=e^{2x+3y}\cdot 2=2e^{2x+3y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=e^{2x+3y}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial y}(2x+3y)\right]=e^{2x+3y}\cdot 3=3e^{2x+3y}$$

LE DERIVATE PARZIALI SECONDE

Anche per le funzioni di due variabili risulta possibile calcolare le derivate parziali seconde, indicate con:

$$f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}, f_{yx}$$

ove con f_{xx} si indica la derivata parziale seconda di f rispetto ad x (occorre derivare la derivata prima un'altra volta, sempre rispetto ad x); analogamente, con f_{yy} si indica la derivata parziale seconda di f rispetto ad y (occorre derivare la derivata prima un'altra volta, sempre rispetto ad y); con f_{xy} invece si indica la derivata parziale seconda di f rispetto ad y (occorre derivare la derivata prima di f rispetto ad x un'altra volta, però rispetto ad y); con f_{yx} infine si indica la derivata parziale seconda di f rispetto ad x (occorre derivare la derivata prima di f rispetto ad y un'altra volta, però rispetto ad x).

LE DERIVATE PARZIALI SECONDE

A tal riguardo sussiste il seguente:

Teorema di Schwartz: le derivate parziali seconde miste di una funzione di due variabili sono uguali, ovvero si ha:

$$f_{xy} = f_{yx}$$

MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI

Data una funzione $z = f(x, y)$, un punto $P(x_0, y_0) \in Dom(f)$ e $z_0 = f(x_0, y_0)$, allora:

$$z_0 = f(x_0, y_0) \leq z(x, y) \text{ per ogni } (x, y) \in Dom(f)$$

$$\Downarrow$$

il punto $P(x_0, y_0)$ è un *punto di minimo assoluto* per la funzione;
la quota z_0 nel punto $P(x_0, y_0)$ è il *valore minimo assoluto* della funzione;
il punto nello spazio $M(x_0, y_0, z_0)$ è un *minimo assoluto* della funzione.

MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI

Data una funzione $z = f(x, y)$, un punto $P(x_0, y_0) \in Dom(f)$ e $z_0 = f(x_0, y_0)$, allora:

$$z_0 = f(x_0, y_0) \geq z(x, y) \text{ per ogni } (x, y) \in Dom(f)$$

$$\Downarrow$$

il punto $P(x_0, y_0)$ è un *punto di massimo assoluto* per la funzione;
la quota z_0 nel punto $P(x_0, y_0)$ è il *valore massimo assoluto* della funzione;
il punto nello spazio $M(x_0, y_0, z_0)$ è un *massimo assoluto* della funzione.

MASSIMI E MINIMI RELATIVI

Data una funzione $z = f(x, y)$, un punto $P(x_0, y_0) \in Dom(f)$, $z_0 = f(x_0, y_0)$ ed I_0 un intorno di $P(x_0, y_0)$:

$$z_0 = f(x_0, y_0) \leq z(x, y) \text{ per ogni } (x, y) \in I_0$$

$$\Downarrow$$

il punto $P(x_0, y_0)$ è un *punto di minimo relativo* per la funzione;
la quota z_0 nel punto $P(x_0, y_0)$ è il *valore minimo relativo* della funzione;
il punto nello spazio $M(x_0, y_0, z_0)$ è un *minimo relativo* della funzione.

MASSIMI E MINIMI RELATIVI

Data una funzione $z = f(x, y)$, un punto $P(x_0, y_0) \in Dom(f)$, $z_0 = f(x_0, y_0)$ ed I_0 un intorno di $P(x_0, y_0)$:

$$z_0 = f(x_0, y_0) \geq z(x, y) \text{ per ogni } (x, y) \in I_0$$

$$\Downarrow$$

il punto $P(x_0, y_0)$ è un *punto di massimo relativo* per la funzione;

la quota z_0 nel punto $P(x_0, y_0)$ è il *valore massimo relativo* della funzione;

il punto nello spazio $M(x_0, y_0, z_0)$ è un *massimo relativo* della funzione.

MASSIMI E MINIMI RELATIVI LIBERI E VINCOLATI

Si parla di massimi e minimi *liberi* di una funzione reale di due variabili reali $z = f(x, y)$ quando le variabili x o y possono essere prese liberamente nel dominio algebrico.

Si parla di massimi e minimi *vincolati* di una funzione reale di due variabili reali $z = f(x, y)$ quando le variabili x o y non possono essere prese liberamente nel dominio algebrico, ma sono legate ad assumere valori, condizionati dalla presenza di vincoli che si traducono con equazioni o disequazioni della forma:

$$g(x, y) = 0, g(x, y) < 0, g(x, y) > 0, g(x, y) \leq 0, g(x, y) \geq 0$$

COME CALCOLARE I MASSIMI E MINIMI RELATIVI LIBERI

Per calcolare i massimi e minimi relativi di una funzione reale di due variabili reali $z = f(x, y)$, si può applicare il cosiddetto *metodo delle derivate parziali*:

- determinare il dominio della funzione;
- calcolare le derivate parziali prime della funzione f_x, f_y;
- risolvere il sistema ottenuto ponendo le due derivate parziali prime uguali a zero: i punti $P(x_0, y_0)$, soluzioni del sistema, sono detti *punti stazionari*;
- calcolare le derivate parziali seconde $f_{xx}, f_{yy}, f_{xy} = f_{yx}$;

COME CALCOLARE I MASSIMI E MINIMI RELATIVI LIBERI

- costruire il determinante Hessiano $H(x, y)$, ovvero il determinante della matrice quadrata delle derivate parziali seconde della funzione, precisamente:

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy} \cdot f_{yx} = f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2$$

- calcolare il determinante Hessiano nei punti stazionari, ovvero $H(x_0, y_0)$;

COME CALCOLARE I MASSIMI E MINIMI RELATIVI LIBERI

- studiare la natura dei punti stazionari che dipende dal valore assunto da $H(x_0, y_0)$:

a) $H(x_0, y_0) > 0, f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow P$ è un *punto di massimo relativo* della funzione e $z(P)$ è un *valore di massimo relativo*; $P(x_0, y_0, z_0)$ è un *massimo* della funzione;

b) $H(x_0, y_0) > 0, f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow P$ è un *punto di minimo relativo* della funzione e $z(P)$ è un *valore di minimo relativo*; $P(x_0, y_0, z_0)$ è un *minimo* della funzione;

COME CALCOLARE I MASSIMI E MINIMI RELATIVI LIBERI

c) $H(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow P$ è un *punto di sella* o *di colle* della funzione; $z(P)$ è un *valore di sella*;

d) $H(x_0, y_0) = 0 \Rightarrow$ il *caso* è *dubbio* o *ambiguo* (non si può stabilire con tale metodo se P è un punto di massimo o di minimo relativo della funzione; si deve, cioè, ricorrere ad altro metodo, ad esempio alle linee di livello).