LE FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

Daniela Tondini

dtondini@unite.it

Facoltà di Scienze Politiche

CdS in Economia

Università degli Studi di Teramo

COME CALCOLARE I MASSIMI E MINIMI RELATIVI LIBERI

Esempio:

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + xy$$

Si osservi, in primo luogo, che la funzione data è una funzione polinomiale, per cui è definita su tutto $\mathbb{R}^2$.
Le derivate parziali prime di f sono:

$$f_x(x, y) = 3x^2 + y$$

$$f_y(x, y) = 3y^2 + x$$

COME CALCOLARE I MASSIMI E MINIMI RELATIVI LIBERI

Occorre ora eguagliare a zero entrambe le equazioni precedenti per ottenere i punti stazionari o estremanti:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 3x^2 + y = 0 \\ f_y(x,y) = 3y^2 + x = 0 \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} y = -3x^2 \\ 3\left(-3x^2\right)^2 + x = 0 \Rightarrow 27x^4 + x = 0 \Rightarrow x\left(27x^3 + 1\right) = 0 \end{cases}$$

COME CALCOLARE I MASSIMI E MINIMI RELATIVI LIBERI

ovvero:

$$\begin{cases} y = -3x^2 \\ x = 0{,}27x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x = 0{,}27x^3 = -1 \Rightarrow x = 0{,}x^3 = -\dfrac{1}{27} \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} y = -3x^2 \\ x = 0{,}x = -\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow y = -3\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2 = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

COME CALCOLARE I MASSIMI E MINIMI RELATIVI LIBERI

I punti stazionari, pertanto, sono:

$$P_1 = (0,0), P_2 = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

Occorre ora calcolare il determinante Hessiano attraverso le derivate parziali seconde:

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & 1 \\ 1 & 6y \end{vmatrix} = 6x \cdot 6y - 1 = 36xy - 1$$

Calcolare poi l'Hessiano nei punti stazionari:

$$H(P_1) = H(0,0) = 36 \cdot (0) \cdot (0) - 1 = -1 < 0$$

Dunque P_1 è un *punto di sella* della funzione, ovvero né massimo né minimo.

COME CALCOLARE I MASSIMI E MINIMI RELATIVI LIBERI

Analogamente si ha:

$$H(P_2) = H\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = 36 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) - 1 = +4 - 1 = +3 > 0$$

Essendo $H(P_2) > 0$, occorre calcolare il valore della derivata seconda rispetto ad x nel punto P_2; si ha, quindi:

$$f_{xx}(P_2) = f_{xx}\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = 6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -2 < 0$$

Dunque P_2 è un punto di *massimo relativo* della funzione.

COME CALCOLARE I MASSIMI E MINIMI RELATIVI VINCOLATI

Per calcolare i massimi e minimi vincolati da un'equazione, si può applicare il cosiddetto *metodo dei moltiplicatori di Lagrange*.

Sia $z = f(x, y)$ la funzione da ottimizzare e sia $g(x, y) = 0$ il vincolo. Si può procedere come segue:

- determinare il dominio della funzione;
- scrivere $\mathscr{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$ la Lagrangiana con λ parametro reale;
- calcolare le derivate parziali prime della funzione Lagrangiana, ovvero $\mathscr{L}_x, \mathscr{L}_y, \mathscr{L}_\lambda$;

COME CALCOLARE I MASSIMI E MINIMI RELATIVI VINCOLATI

- risolvere il sistema ottenuto ponendo le tre derivate parziali prime uguali a zero: i punti $P(x_0, y_0, \lambda_0)$ soluzioni del sistema sono detti *punti stazionari*;
- calcolare le derivate parziali seconde, precisamente:

$$\mathcal{L}_{xx}, \mathcal{L}_{yy}, \mathcal{L}_{\lambda\lambda}, \mathcal{L}_{xy} = \mathcal{L}_{yx}, \mathcal{L}_{x\lambda} = \mathcal{L}_{\lambda x}, \mathcal{L}_{y\lambda} = \mathcal{L}_{\lambda y}$$

- calcolare le derivate parziali prime del vincolo, ovvero:

$$g_x, g_y$$

- costruire il determinante Hessiano:

$$H(x,y,\lambda) = \begin{vmatrix} \mathcal{L}_{xx} & \mathcal{L}_{xy} & \mathcal{L}_{x\lambda} \\ \mathcal{L}_{yx} & \mathcal{L}_{yy} & \mathcal{L}_{y\lambda} \\ \mathcal{L}_{\lambda x} & \mathcal{L}_{\lambda y} & \mathcal{L}_{\lambda\lambda} \end{vmatrix}$$

COME CALCOLARE I MASSIMI E MINIMI RELATIVI VINCOLATI

- calcolare il determinante Hessiano nei punti stazionari, ovvero $H(x_0, y_0, \lambda_0)$;
- studiare la natura dei punti stazionari che dipende dal valore assunto da $H(x_0, y_0, \lambda_0)$:

a) $H(x_0, y_0, \lambda_0) > 0 \Rightarrow P$ è un punto di *massimo relativo* vincolato della funzione e $z(P)$ è un *valore di massimo relativo* vincolato;

b) $H(x_0, y_0, \lambda_0) < 0 \Rightarrow P$ è un punto di *minimo relativo vincolato* della funzione e $z(P)$ è un *valore di minimo relativo vincolato*;

COME CALCOLARE I MASSIMI E MINIMI RELATIVI VINCOLATI

c) $H\left(x_0, y_0, \lambda_0\right) = 0 \Rightarrow$ il *caso* è *dubbio* o *ambiguo* (non si può stabilire con tale metodo se P è un punto di massimo o di minimo relativo della funzione; si deve, cioè, ricorrere ad altro metodo, ad esempio alle linee di livello).

COME CALCOLARE I MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI LIBERI O VINCOLATI

Data una funzione reale di due variabili reali $z = f(x, y)$, sia che si parli di massimi e minimi liberi sia che si parli di massimi e minimi vincolati, si dice *valore massimo assoluto* il più grande tra i valori massimi relativi (che la funzione assume in punti interni al dominio dei vincoli) ed i valori massimi che la funzione assume nei punti di frontiera, ovvero sul bordo del vincolo; si dice *valore minimo assoluto* il più piccolo tra i valori minimi relativi (che la funzione assume in punti interni al dominio dei vincoli) ed i valori minimi che la funzione assume nei punti di frontiera.

COME CALCOLARE I MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI VINCOLATI

Sia $z = f(x,y)$ la funzione da ottimizzare. Allora:

- si rappresenta su uno stesso piano cartesiano il dominio della funzione e l'eventuale dominio dei vincoli;
- si cerca l'esistenza dei punti di massimo o di minimo relativi, scartando quelli esterni al Dominio dei vincoli;
- si individuano i punti estremanti relativi o assoluti nella frontiera del dominio dei vincoli;
- si confrontano tutti i valori massimi o minimi, sia relativi che assoluti;
- il valore maggiore è il valore massimo assoluto ed il punto in cui viene assunto è il punto di massimo assoluto; il valore minore è il valore minimo assoluto ed il punto in cui viene assunto è il punto di minimo assoluto.

COME CALCOLARE I MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI VINCOLATI

Esempio 1:

$$f(x,y) = x + y \text{ con } M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}$$

Si osservi, in primo luogo, che la funzione data è una funzione polinomiale, per cui è definita su tutto $\mathbb{R}^2$.

Il vincolo M, inoltre, è una circonferenza con centro l'origine e raggio 1, per cui $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$.

Per determinare i punti stazionari occorre utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, considerando la funzione:

$$\mathscr{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = x + y - \lambda\left(x^2 + y^2 - 1\right)$$

COME CALCOLARE I MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI VINCOLATI

Si calcolino ora le derivate parziali prime della Lagrangiana:

$$\mathcal{L}_x(x, y, \lambda) = 1 - \lambda(2x) = 1 - 2\lambda x$$

$$\mathcal{L}_y(x, y, \lambda) = 1 - \lambda(2y) = 1 - 2\lambda y$$

$$\mathcal{L}_\lambda(x, y, \lambda) = -x^2 - y^2 + 1$$

eguagliando a zero le precedenti equazioni si ottiene:

$$\begin{cases} 1 - 2\lambda x = 0 \\ 1 - 2\lambda y = 0 \\ -x^2 - y^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

COME CALCOLARE I MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI VINCOLATI

Risolvendo il precedente sistema si ottengono i punti stazionari della funzione Lagrangiana:

$$\begin{cases} 1-2\lambda x=0 \\ 1-2\lambda y=0 \\ -x^2-y^2+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2\lambda} \\ y=\dfrac{1}{2\lambda} \\ -\left(\dfrac{1}{2\lambda}\right)^2-\left(\dfrac{1}{2\lambda}\right)^2+1=0 \end{cases}$$

COME CALCOLARE I MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI VINCOLATI

E risolvendo l'ultima equazione del precedente sistema si ha:

$$\left(-\frac{1}{2\lambda}\right)^2-\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2+1=0\Rightarrow-\frac{1}{4\lambda^2}-\frac{1}{4\lambda^2}+1=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{-1-1+4\lambda^2}{4\lambda^2}=0\Rightarrow\frac{-2+4\lambda^2}{4\lambda^2}=0\Rightarrow-2+4\lambda^2=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow-1+2\lambda^2=0\Rightarrow2\lambda^2-1=0\Rightarrow\lambda_{1,2}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\lambda_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

COME CALCOLARE I MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI VINCOLATI

Sostituendo nel sistema i valori di λ sopra trovati, si ottengono i seguenti valori di *x* ed *y*:

$$x=\frac{1}{2\lambda}\Rightarrow x_1=\frac{1}{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}=+\frac{\sqrt{2}}{2}, x_2=\frac{1}{2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y=\frac{1}{2\lambda}\Rightarrow y_1=\frac{1}{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}=+\frac{\sqrt{2}}{2}, y_2=\frac{1}{2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

COME CALCOLARE I MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI VINCOLATI

I punti stazionari di $\mathcal{L}$, quindi, sono:

$$\mathcal{L}_1 = (x_1, y_1, \lambda_1) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\mathcal{L}_2 = (x_2, y_2, \lambda_2) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

I punti stazionari vincolati di f su M, invece, sono:

$$P_1 = (x_1, y_1) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), P_2 = (x_2, y_2) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

COME CALCOLARE I MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI VINCOLATI

L'Hessiano è dato da:

$$H(x,y,\lambda)=\begin{vmatrix} -2\lambda & 0 & -2x \\ 0 & -2\lambda & -2y \\ -2x & -2y & 0 \end{vmatrix}=+8\lambda x^2+8\lambda y^2$$

COME CALCOLARE I MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI VINCOLATI

e, sostituendo con i punti stazionari, si ottiene:

$$H(\mathcal{Z}_1) = 8\lambda y^2 + 8\lambda x^2 = 8\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 8\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 =$$

$$= 8\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{2}{4}\right) + 8\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{2}{4}\right) = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2} > 0$$

Quindi P_1 è un punto di massimo vincolato relativo per *f* su *M*.

COME CALCOLARE I MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI VINCOLATI

e, sostituendo con i punti stazionari, si ottiene:

$$H(\mathcal{Z}_2) = 8\lambda y^2 + 8\lambda x^2 = 8\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 8\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 =$$

$$= 8\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{2}{4}\right) + 8\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{2}{4}\right) = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = -4\sqrt{2} < 0$$

Quindi P_2 è un punto di minimo vincolato relativo per f su M.

COME CALCOLARE I MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI VINCOLATI

Si osservi che i punti di massimo e minimo relativo vincolati sopra trovati sono anche assoluti:

$$f(P_1) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$f(P_2) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

Quindi P_1 è un punto di massimo vincolato assoluto per f su M e P_2 è un punto di minimo vincolato assoluto per f su M.