

LA MATEMATICA FINANZIARIA

Daniela Tondini
dtondini@unite.it

Facoltà di Scienze politiche

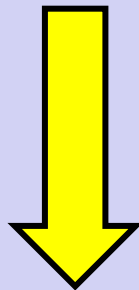
CdS in Economia

Università degli Studi di Teramo



DEFINIZIONI FONDAMENTALI

La **matematica finanziaria** si occupa di operazioni finanziarie ovvero di operazioni che danno origine allo scambio tra somme di denaro riferite ad epoche diverse



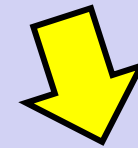
interazioni tra due parti

DEFINIZIONI FONDAMENTALI

La **matematica finanziaria** è quella matematica «ad hoc» che si occupa di operazioni economico-finanziarie ed è necessaria quando un operatore si trova in una situazione in cui deve tener conto di:



tempo: il valore di una determinata somma disponibile immediatamente è diverso da quello di una somma, identica nell'importo, ma disponibile in un periodo successivo



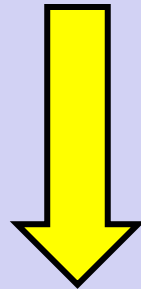
incertezza: il futuro è, in misura minore o maggiore a seconda dei casi, indeterminato; una determinata somma spettante ad un operatore in un momento futuro stabilito, cioè, può essere corrisposta, in parte o affatto, ovvero può essere liquidata in un momento diverso da quello pattuito

DEFINIZIONI FONDAMENTALI

Per **operazioni economico-finanziarie** si intendono quelle operazioni economiche che hanno per oggetto l'impiego di uno o più capitali monetari o riconducibili ad una valutazione monetaria, quali un immobile, una macchina o un prestito.

DEFINIZIONI FONDAMENTALI

Considereremo SOLO il fattore **tempo**



somme certe ma disponibili in istanti diversi

(un euro oggi non ha lo stesso valore di un euro incassato due mesi fa o di un euro che si incasserà tra cinque mesi, questo perché si trovano in tempi diversi per cui non si possono sommare con una semplice operazione algebrica)

DEFINIZIONI FONDAMENTALI

Questo accade perché il capitale finanziario spostato nel tempo modifica il proprio valore, in aumento o in diminuzione, a seconda se parliamo di capitali futuri o di capitali passati.

Tale variazione è dovuta al prezzo d'uso del capitale finanziario che prende il nome di **interesse**.

DEFINIZIONI FONDAMENTALI

I CASO

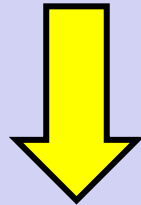
Se depositiamo in banca, alla fine di giugno, 1000,00€, allora, alla fine di dicembre, avremmo sempre 1000,00€ oppure qualcosa in più?

II CASO

Viceversa, siamo in possesso di un titolo di stato di 1000,00€ che possiamo ritirare alla fine di dicembre ma decidiamo di ritirarlo, per un qualsiasi motivo, alla fine di giugno, quindi sei mesi prima; allora incasseremo lo stesso 1000,00€ oppure qualcosa di più?

OPERAZIONI FINANZIARIE

Le operazioni finanziarie possono essere finalizzate a:



una capitalizzazione: chi rinuncia oggi ad una disponibilità finanziaria, differendola nel tempo, richiede che gli venga corrisposto un adeguato compenso.

una attualizzazione: chi richiede oggi una somma, che gli sarebbe dovuta ad una data futura, deve corrispondere un adeguato compenso, ovvero chi anticipa il pagamento di un debito ha diritto ad un compenso.

OPERAZIONI FINANZIARIE

Operazione finanziaria

Quanto vale domani il mio capitale attuale?

Quanto vale oggi il mio capitale futuro?

capitalizzazione

attualizzazione

tasso di interesse

tasso di sconto

interesse

sconto

montante

valore attuale

OPERAZIONI FINANZIARIE

Quanto vale domani il mio capitale attuale?

posticipazione

Quanto vale oggi il mio capitale futuro?

anticipazione

capitalizzazione o prestito o investimento

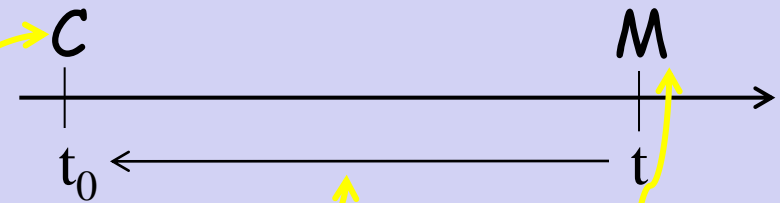
attualizzazione o sconto



montante

capitale

si porta il capitale in avanti



valore attuale

valore nominale

si porta il capitale indietro

OPERAZIONI FINANZIARIE

Regimi finanziari

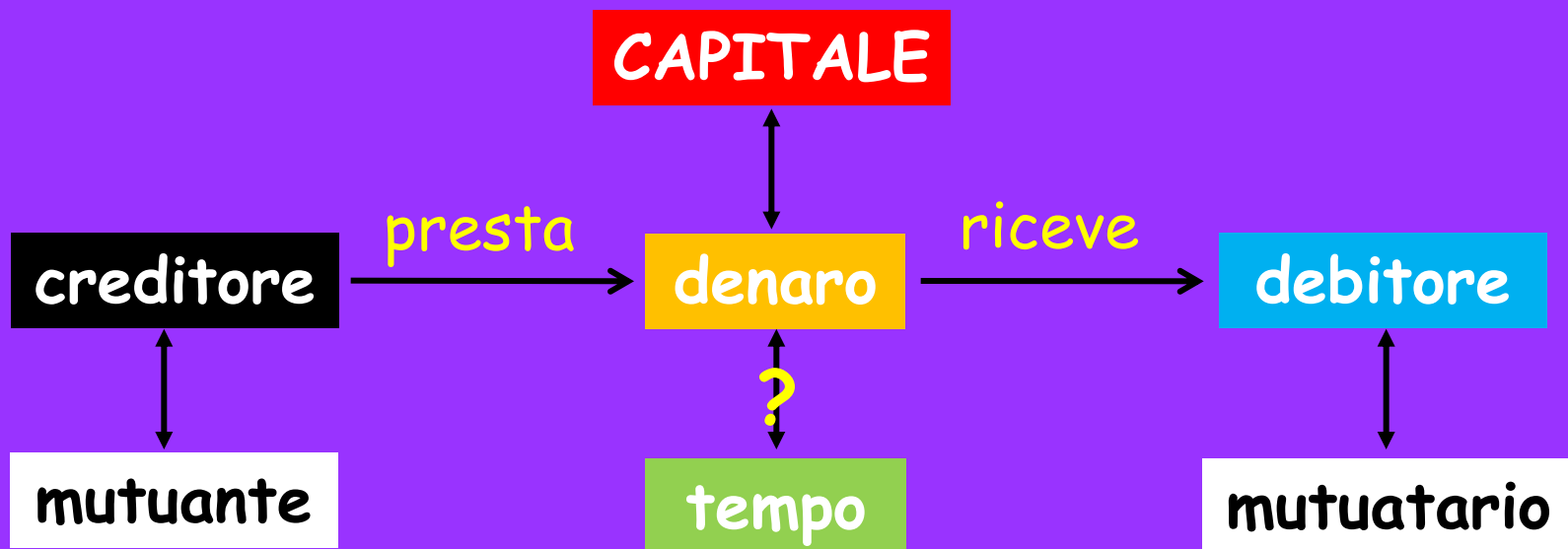
```
graph TD; A[Regimi finanziari] --> B[INTERESSE SEMPLICE]; A --> C[INTERESSE COMPOSTO];
```

**INTERESSE
SEMPLICE**

**INTERESSE
COMPOSTO**

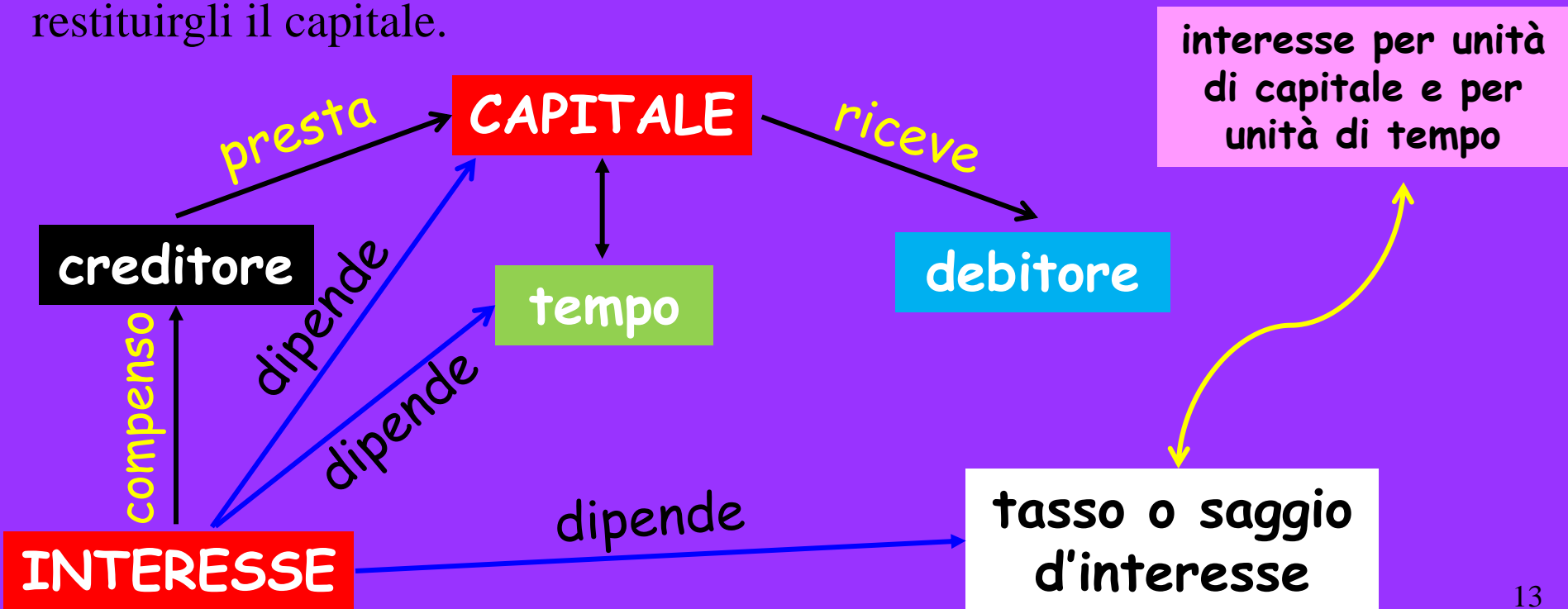
INTERESSE SEMPLICE

La **capitalizzazione ad interesse semplice**, ovvero un contratto di prestito (o di mutuo), è un'operazione finanziaria tra due parti, che possono essere persone o società, precisamente un **creditore** (o mutuante) e un **debitore** (o mutuatario). Il creditore presta del denaro per un certo intervallo di tempo e il debitore riceve. Il denaro prestato prende il nome di **Capitale**.



INTERESSE SEMPLICE

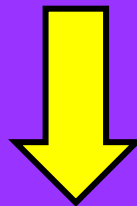
Il **creditore** presta il capitale al **debitore**, non perché è una persona o società generosa che lo fa senza alcun compenso, ma perché il debitore dovrà pagare al creditore tale compenso, che prende il nome di **interesse**, oltre a restituirgli il capitale.



INTERESSE SEMPLICE

Nel regime di **capitalizzazione ad interesse semplice**, gli interessi prodotti da un'operazione di investimento **NON** sono fruttiferi; in tal caso, cioè, l'interesse viene calcolato alla fine di ciascun periodo **SOLO** sul capitale, ovvero va a frutto solo il capitale e non gli interessi maturati periodo per periodo. Si ha:

$$I = C \cdot i \cdot t$$

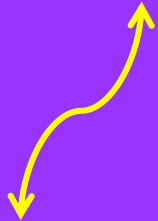


L'interesse, cioè, è direttamente proporzionale al capitale C , al tempo t , ovvero alla durata del prestito, e al tasso unitario i .

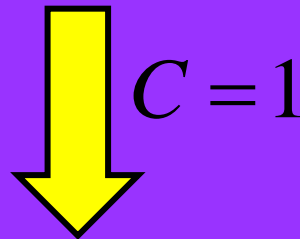
INTERESSE SEMPLICE

Il montante, o valore nominale, invece, è dato da:

$$M = C + I = C + C \cdot i \cdot t = C(1 + i \cdot t)$$



Il debitore dovrà restituire al creditore il **montante**, ovvero sia il capitale prestato sia l'interesse maturato durante il tempo del prestito

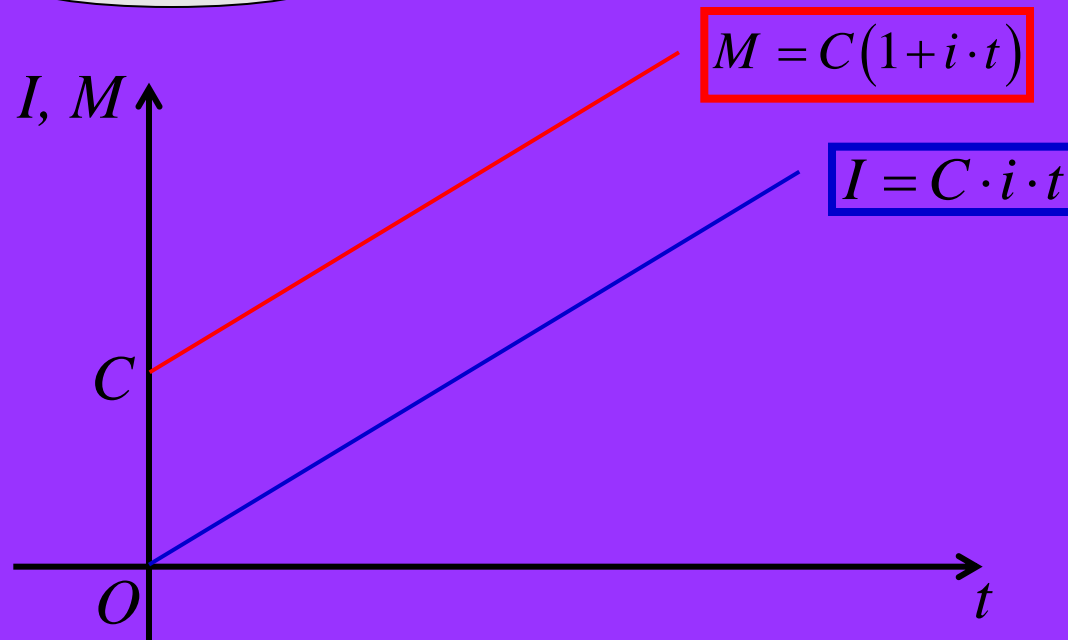


$$r = 1 + i \cdot t$$

fattore di capitalizzazione
(posticipazione)

INTERESSE SEMPLICE

GRAFICO



INTERESSE SEMPLICE

OSSERVAZIONI

- Il capitale è riferito al momento iniziale ed il montante è riferito al momento finale.
- Il montante è superiore al capitale.
- Capitale e montante rappresentano lo stesso valore finanziario riferito a due momenti differenti.
- Il montante e l'interesse hanno andamento lineare rispetto al tempo.
- Le due rette sono parallele con coefficiente angolare $m = C \cdot i \cdot t$.
- Il coefficiente angolare cresce all'aumentare del capitale C o del tasso di interesse i o del tempo t .

INTERESSE SEMPLICE

OSSERVAZIONE

Il tasso di interesse i e il tempo t devono essere espressi nella stessa unità di misura per cui o si cambia il tasso o si esprime il tempo nella stessa unità di misura del tasso.

INTERESSE SEMPLICE

N.B.

tasso **trimestrale** del 1,5% = $1,5 : 3 = 0,5\%$ **mensile**

tasso **semestrale** del 3% = $3 \times 2 = 6\%$ **annuo**

tasso **quadrimestrale** del 4% = $4 \times 3 = 12\%$ **annuo**

tasso **quadrimestrale** del 4% = $4 : 4 = 1\%$ **mensile**

tasso **annuo** del 20% = $20 : 2 = 10\%$ **semestrale**

INTERESSE SEMPLICE

N.B.

m mesi = $m : 12$

gg giorni = $gg : 360$ (l'anno commerciale è costituito da 360 giorni)

a anni, m mesi, gg giorni = $a + m : 12 + gg : 360$

INTERESSE SEMPLICE

ESEMPIO

Consideriamo un'operazione finanziaria di prestito, ovvero a capitalizzazione dell'interesse semplice, sapendo che il capitale prestato è di €1350 per un tasso annuo del 4,9% e per un tempo di 6 mesi e 19 giorni. Calcolare l'interesse maturato.

$i_{12} = 4,9\% = 0,049$ ← tasso annuo

$t = 6m + 19gg = \frac{6}{12} + \frac{19}{360} = \frac{180+19}{360} = \frac{199}{360}$ ← tempo da trasformare in anno

$I = C \cdot i \cdot t$ ← capitalizzazione semplice

$I = 1350 \cdot 0,049 \cdot \frac{199}{360} = 36,57\text{€}$

INTERESSE SEMPLICE

ESEMPIO

Consideriamo un'operazione finanziaria di prestito, ovvero a capitalizzazione dell'interesse semplice, sapendo che sono stati pagati interessi pari a €345, che c'è un tasso trimestrale del 2,3% e che il prestito è protratto per un tempo di 2 anni e 4 mesi. Calcolare il capitale.

$i_3 = 2,3\% = 0,023$ ← tasso trimestrale

$t = 2a + 4m = 2 \cdot 4 + 3m + 1m = 8 + 1 + \frac{1}{3} = \frac{28}{3}$ trimestri

in un anno ci sono 4 trimestri

3 mesi costituiscono 1 trimestre va trasformato in frazione di trimestre

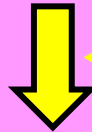
capitalizzazione semplice

$$C = \frac{I}{i \cdot t}$$
$$C = \frac{345}{0,023 \cdot \frac{28}{3}} = 1607,14\text{€}$$

INTERESSE SEMPLICE

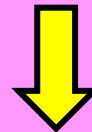
ESEMPIO

Consideriamo un prestito con un capitale di €5500 e supponiamo che il compenso spettante al creditore, ovvero gli interessi, corrisponda a €853; sappiamo inoltre che la durata del prestito è di 3 anni e 9 mesi. Calcoliamo il tasso bimestrale.



capitalizzazione semplice

$$i = \frac{I}{C \cdot t}$$



$$i = \frac{853}{5500 \cdot \frac{45}{2}} = 0,0069 = 0,69\%$$

$$t = 3a + 9m = 3 \cdot 6 + 8m + 1m = 18 + 4 + \frac{1}{2} = \frac{45}{2} \text{ bimestri}$$

in un anno ci sono 6 bimestri

8 mesi costituiscono 4 bimestri

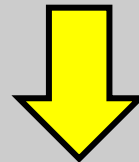
va trasformato in frazione di bimestre

INTERESSE SEMPLICE

Nel regime di **attualizzazione ad interesse semplice**, un operatore rinuncia ad una parte del capitale M che gli è dovuto in futuro, ad un istante t , pur di entrare immediatamente in possesso del valore attuale $C < M$:

$$d = \frac{i \cdot t}{1 + i \cdot t}$$

tasso di sconto

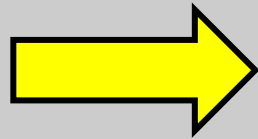


sconto

$$D = M \cdot d = M \cdot \frac{i \cdot t}{1 + i \cdot t}$$

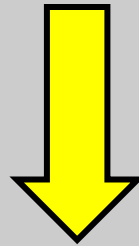


INTERESSE SEMPLICE



$$v = \frac{1}{r} = \frac{1}{1+i \cdot t}$$

fattore di attualizzazione
(anticipazione)

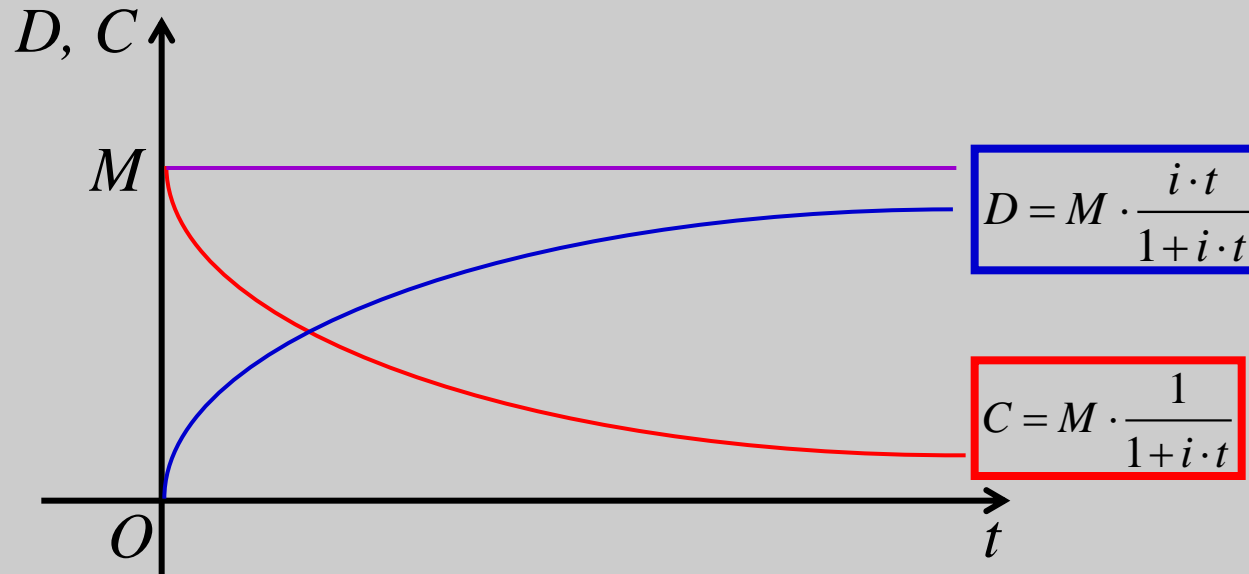


valore attuale
o capitale

$$C = M \cdot \frac{1}{1+i \cdot t}$$

INTERESSE SEMPLICE

GRAFICO



INTERESSE COMPOSTO

Nel regime di **capitalizzazione ad interesse composto**, gli interessi maturati non vengono restituiti al debitore al termine di ogni periodo ma vanno sommati al capitale e diventano a loro volta fruttiferi di interessi, ovvero vanno a produrre a loro volta, insieme al capitale, gli interessi.



INTERESSE COMPOSTO

CAPITALIZZAZIONE COMPOSTA

annua

gli interessi sono
capitalizzati
annualmente

frazionata

gli interessi sono
capitalizzati per periodi
inferiori all'anno

capitalizzazioni **semestrali**
(interessi capitalizzati ogni 6
mesi, quindi 2 volte l'anno)

capitalizzazioni **bimestrali**
(interessi capitalizzati ogni 2
mesi, quindi 6 volte l'anno)

capitalizzazioni **trimestrali**
(interessi capitalizzati ogni
3 mesi, quindi 4 volte l'anno)

capitalizzazioni **quadrimestrali**
(interessi capitalizzati ogni 4
mesi, quindi 3 volte l'anno)

INTERESSE COMPOSTO

Nel regime di **capitalizzazione ad interesse composto**, risulta:

$$M_1 = C + C \cdot i = C(1+i) \quad \text{al termine del primo anno}$$

capitale iniziale

interessi maturati

stessa relazione che ci dà il montante, dopo un anno, nella capitalizzazione dell'interesse semplice

$$M_2 = M_1(1+i) = C(1+i)(1+i) = C(1+i)^2 \quad \text{al termine del secondo anno}$$

interessi maturati in quell'anno

capitale all'inizio del secondo anno (possiamo usare la formula usata in precedenza come se ripartissimo da zero, ovvero il nuovo capitale è il montante ottenuto al termine del primo anno)

gli interessi maturati vanno a sommarsi al capitale

INTERESSE COMPOSTO

Generalizzando, dopo t anni, avremo la seguente relazione:

$$M = C(1+i)^t$$

$$r = (1+i)^t$$

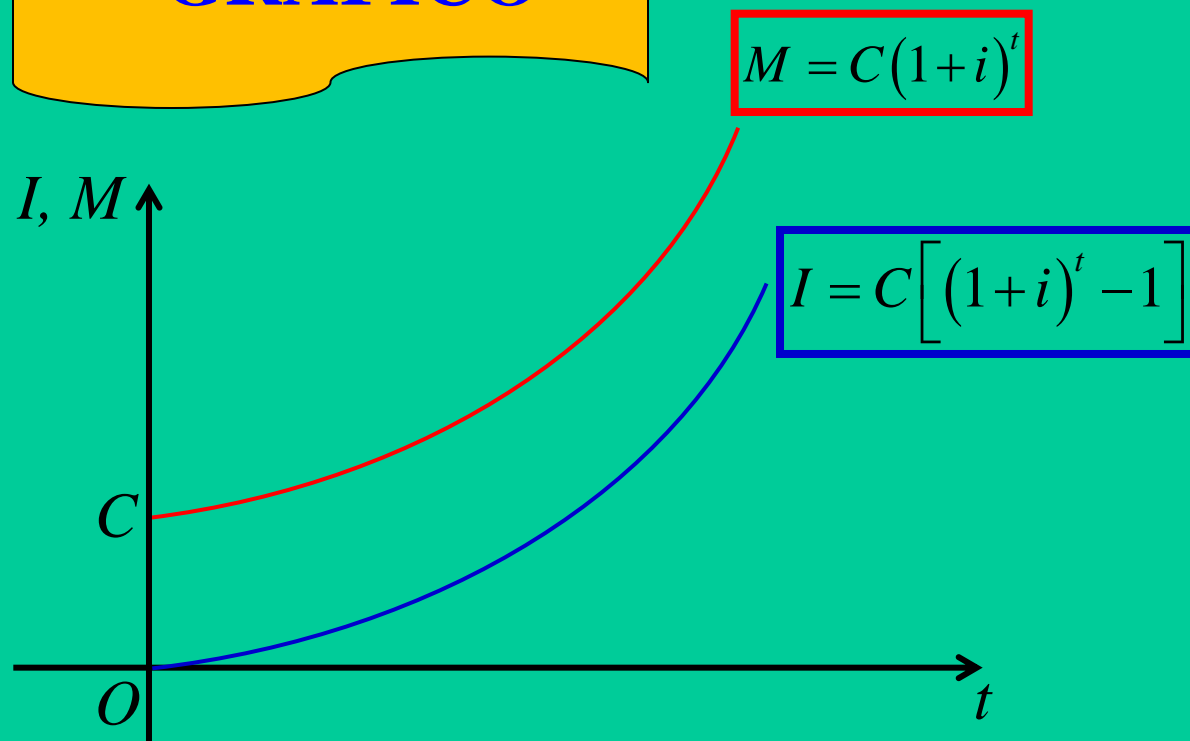
$$C = 1$$

fattore di capitalizzazione

$$I = M - C = C(1+i)^t - C = C \left[(1+i)^t - 1 \right]$$

INTERESSE COMPOSTO

GRAFICO



INTERESSE COMPOSTO

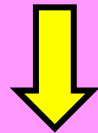
OSSERVAZIONI

- Il montante è una funzione esponenziale del tempo.
- La base $1+i$ è maggiore di 1 per cui la funzione esponenziale, ovvero il montante, è crescente.
- L'interesse non è proporzionale al tasso e al tempo per cui bisogna trovare una relazione tra tassi frazionati e tasso annuo per poter esprimere tassi e tempi attraverso la stessa unità di misura.

INTERESSE COMPOSTO

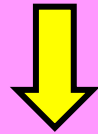
ESEMPIO

A quale tasso un capitale di €5000, dopo 3 anni, dà un montante di €6250?

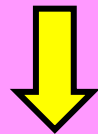


capitalizzazione composta

$$M = C(1+i)^t$$



$$6250 = 5000(1+i)^3 \Rightarrow \frac{6250}{5000} = (1+i)^3 \Rightarrow 1,25 = (1+i)^3 \Rightarrow \sqrt[3]{1,25} = 1+i \Rightarrow i = \sqrt[3]{1,25} - 1$$

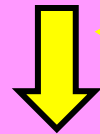


$$i = 1,08 - 1 = 0,08 = 8\%$$

INTERESSE COMPOSTO

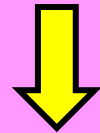
ESEMPIO

Impiegando €1250 al 2,5%, dopo quanto tempo avremo un montante di €2500?



capitalizzazione composta

$$M = C(1+i)^t$$



$$2500 = 1250(1+0,025)^t \Rightarrow \frac{2500}{1250} = (1,025)^t \Rightarrow 2 = (1,025)^t \Rightarrow \log(2) = \log(1,025)^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log(2) = t \log(1,025) \Rightarrow t = \frac{\log(2)}{\log(1,025)} \Rightarrow t \cong 28,07 \Rightarrow t = 28a + 0,07 \cdot 12 \Rightarrow$$

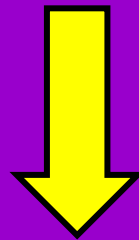
$$\Rightarrow t = 28a + 0,85m \cdot 30gg \Rightarrow t \cong 28a + 30gg$$

INTERESSE COMPOSTO

Nel regime di **attualizzazione ad interesse composto**,
invece, si ha:

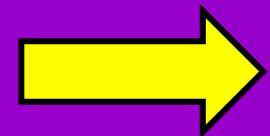
$$d = 1 - (1 + i)^{-t}$$

tasso di sconto

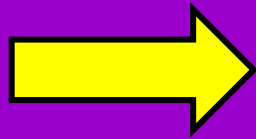


sconto

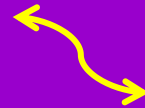
$$D = M \cdot d = M \cdot \left[1 - (1 + i)^{-t} \right]$$



INTERESSE COMPOSTO



$$v = \frac{1}{r} = \frac{1}{(1+i)^t} = (1+i)^{-t}$$



fattore di attualizzazione



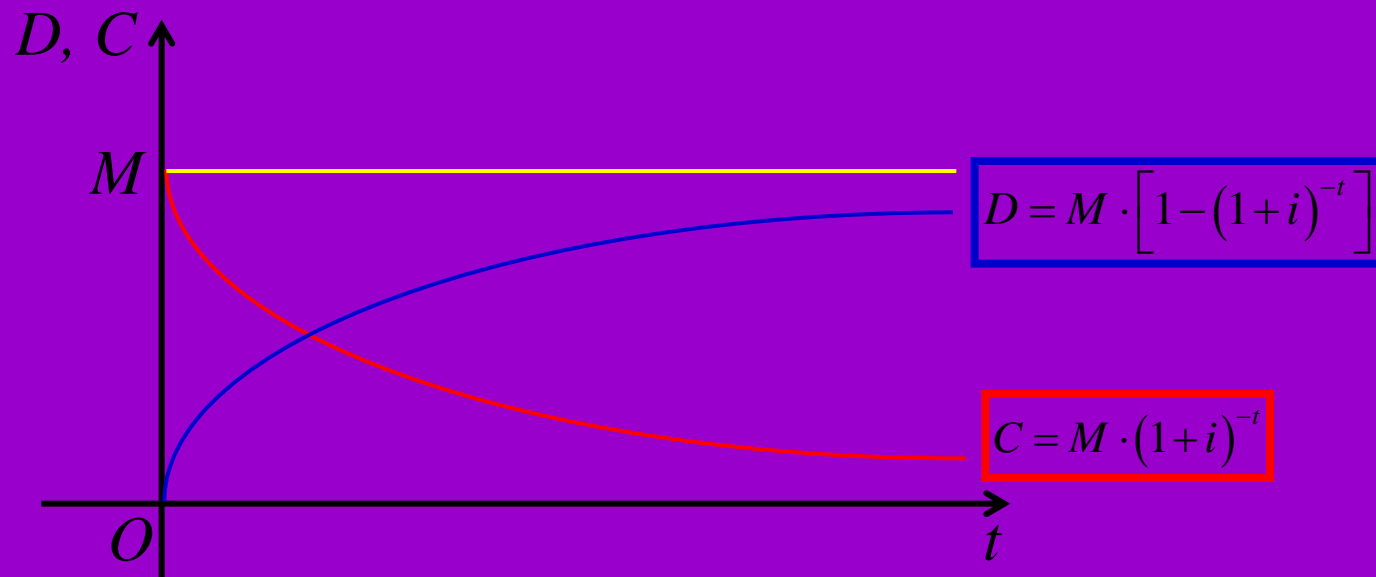
valore attuale
o capitale



$$C = M \cdot (1+i)^{-t}$$

INTERESSE COMPOSTO

GRAFICO



CONFRONTO TRA I DUE REGIMI

CAPITALIZZAZIONE

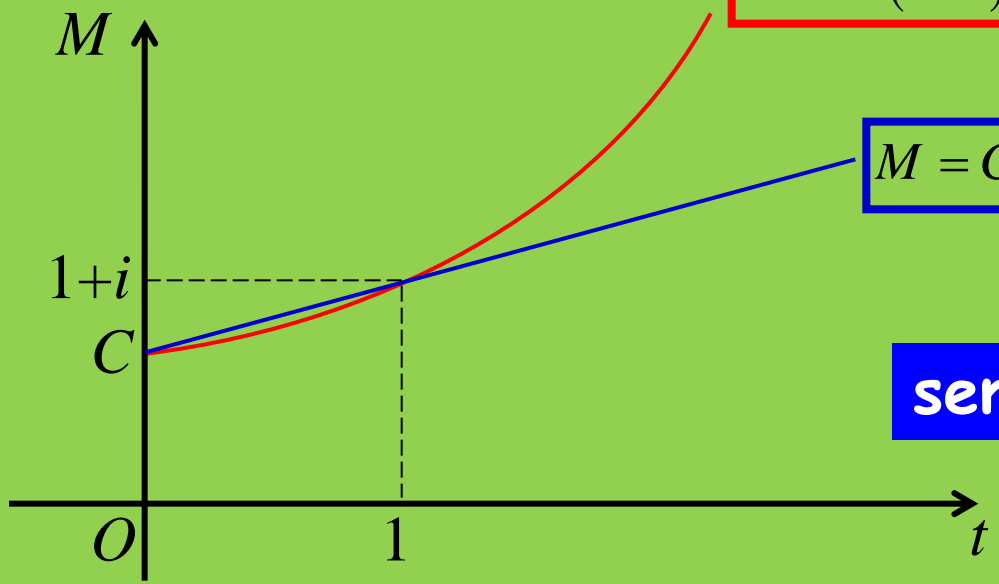
GRAFICI

composta

$$M = C(1+i)^t$$

$$M = C(1+i \cdot t)$$

semplice



CONFRONTO TRA I DUE REGIMI

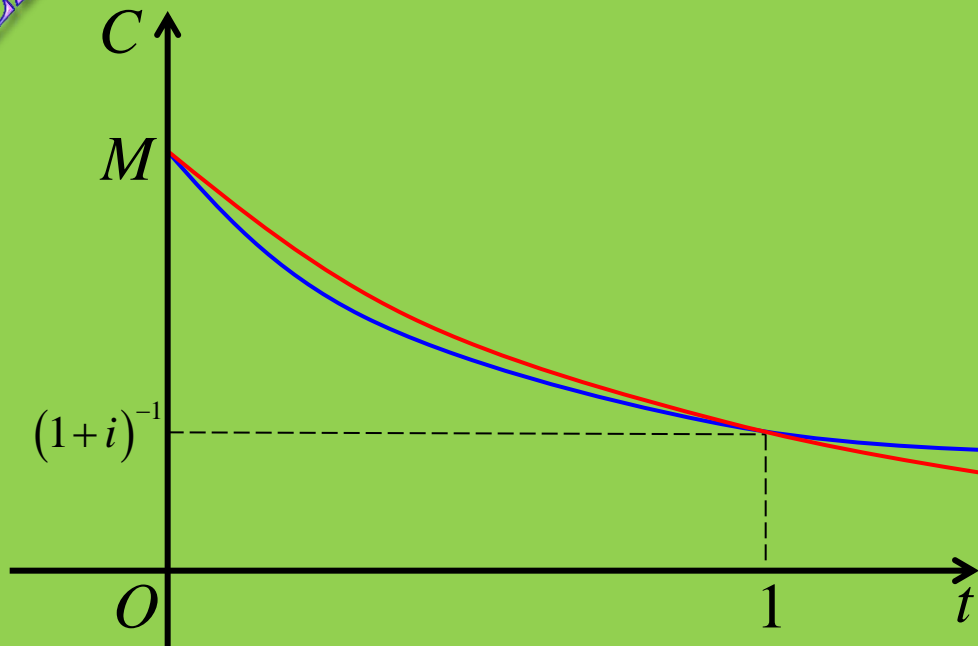
OSSERVAZIONI

- Per $t = 0$ e per $t = 1$, il montante semplice e il montante composto sono equivalenti.
- Per $0 < t < 1$ è più vantaggiosa la capitalizzazione semplice.
- Per $t > 1$ è più vantaggiosa la capitalizzazione composta.
- Per tempi «brevi» si usa la capitalizzazione semplice.
- Per tempi «lunghi» si usa la capitalizzazione composta.

CONFRONTO TRA I DUE REGIMI

ATTUALIZZAZIONE

GRAFICI



semplice

$$C = M \cdot \frac{1}{1+i \cdot t}$$

$$C = M \cdot (1+i)^{-t}$$

composta

CONFRONTO TRA I DUE REGIMI

OSSERVAZIONI

- Per $t = 0$ e per $t = 1$, il valore attuale (capitale) semplice e il valore attuale composto sono equivalenti.
- Per $0 < t < 1$ è più vantaggiosa la capitalizzazione composta.
- Per $t > 1$ è più vantaggiosa la capitalizzazione semplice.
- Per tempi «brevi» si usa la capitalizzazione composta.
- Per tempi «lunghi» si usa la capitalizzazione semplice.

CAPITALIZZAZIONE FRAZIONATA

Si parla di **capitalizzazione frazionata** quando la capitalizzazione avviene per periodi che sono sottomultipli dell'anno. Ad esempio:

i_2



è il tasso di una **capitalizzazione semestrale** in cui, cioè, gli interessi saranno capitalizzati 2 volte l'anno (in un anno ci sono 2 semestri), ovvero la capitalizzazione avverrà due volte l'anno

i_3



è il tasso di una **capitalizzazione quadrimestrale** in cui, cioè, gli interessi saranno capitalizzati 3 volte l'anno (in un anno ci sono 3 quadrimestri)

CAPITALIZZAZIONE FRAZIONATA

i_4

è il tasso di una **capitalizzazione trimestrale** in cui, cioè, gli interessi saranno capitalizzati 4 volte l'anno (in un anno ci sono 4 trimestri)

i_6

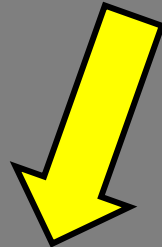
è il tasso di una **capitalizzazione bimestrale** in cui, cioè, gli interessi saranno capitalizzati 6 volte l'anno (in un anno ci sono 6 bimestri)

i_{12}

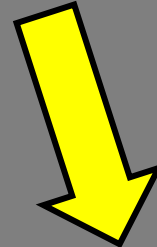
è il tasso di una **capitalizzazione mensile** in cui, cioè, gli interessi saranno capitalizzati 12 volte l'anno (in un anno ci sono 12 mesi)

CAPITALIZZAZIONE FRAZIONATA

I tassi possono essere:



periodali relativi ad un periodo di una frazione di anno (tassi di capitalizzazione semestrale, quadrimestrale, ...)



annui nominali convertibili k volte l'anno e si indicano con:

$$j_k$$

(ad esempio, se è convertibile 2 volte l'anno si avrà j_2)

tasso periodale corrispondente al tasso annuo nominale convertibile (k è il numero di volte all'anno in cui avviene la capitalizzazione)

$$i_k = \frac{j_k}{k}$$

CAPITALIZZAZIONE FRAZIONATA

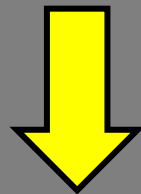
ESEMPIO

Il tasso annuo nominale convertibile trimestralmente del 10% è dato da:

$$i_4 = \frac{0,1}{4} = 0,025$$

$j_k = 10\%$

numero di trimestri in un anno



Un tasso annuo nominale convertibile trimestralmente del 10% corrisponde ad un tasso periodale trimestrale del 2,5%, cioè:

$$i_4 = 2,5\%$$

CAPITALIZZAZIONE FRAZIONATA

ESEMPIO

Determiniamo il montante di €3550 dopo 5 anni in capitalizzazione quadrimestrale al 5,2% in un regime ad interesse composto. Si ha:

$i_3 = 5,2\% = 0,052$ → tasso periodale quadrimestrale (la capitalizzazione avviene 3 volte l'anno perché in un anno di sono 3 quadrimestri)

$C = 3550\text{€}$ → capitale iniziale

$t = 5a = 5 \cdot 3 = 15$ *quadrimestri* → il tempo va trasformato in quadrimestri perché abbiamo un tasso periodale in quadrimestri

in un anno ci sono
3 quadrimestri



CAPITALIZZAZIONE FRAZIONATA



$M = C(1+i)^t$ → formula generica del montante in un regime di capitalizzazione ad interesse composto



$$M = 3550(1+0,052)^{15} = 3550(1,052)^{15} = 7593,89\text{€}$$

CAPITALIZZAZIONE FRAZIONATA


OSSERVAZIONI

Interesse composto al 5% semestrale

Interesse composto con capitalizzazione semestrale al 5%

Interesse composto al 10% annuo nominale convertibile semestralmente

EQUIVALENTI

$$i_2 = \frac{0,1}{2} = 0,05 = 5\%$$


CAPITALIZZAZIONE FRAZIONATA

OSSERVAZIONI

Capitalizzazione annua al 12%

Capitalizzazione semestrale al 6%

Capitalizzazione bimestrale al 2%

i montanti sono diversi

NON EQUIVALENTI

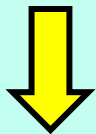
TASSI EQUIVALENTI

Due tassi si dicono **equivalenti** se, applicati allo stesso capitale, producono, nello stesso tempo, il medesimo montante.

Se, ad esempio, consideriamo $C = 1$ euro e $t = 1$ anno, indicando con i il tasso annuo e con i_k il tasso periodale relativo ad una frazione di anno, ovvero pari ad $1/k$ anno (un k -esimo di anno), allora, per il primo anno, avremo la seguente relazione per il montante, essendo $C = 1$:

$$1 + i = (1 + i_k)^k$$

relazione tra tasso annuo e tasso periodale equivalente frazionato per k -esimi di anno (per $t = 1$ anno)



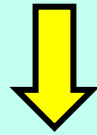
$$(1 + i)^n = \left[(1 + i_k)^k \right]^n$$

relazione tra tasso annuo e tasso periodale equivalente frazionato per k -esimi di anno (per $t = n$ anni)


TASSI EQUIVALENTI

ESEMPIO

Assegnato il tasso annuo del 6,5%, determinare l'equivalente tasso semestrale:



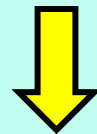
$$\begin{aligned}1 + i &= (1 + i_2)^2 \Rightarrow 1 + 0,065 = (1 + i_2)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow (1 + 0,065)^{\frac{1}{2}} &= \left[(1 + i_2)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \Rightarrow (1,065)^{\frac{1}{2}} = 1 + i_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow (1,065)^{\frac{1}{2}} - 1 &= i_2 \Rightarrow i_2 = 0,032 = 3,2\%\end{aligned}$$

 tasso periodale semestrale

TASSI EQUIVALENTI

ESEMPIO

Assegnato il tasso annuo nominale convertibile trimestralmente del 6,6%, determinare l'equivalente tasso annuo:



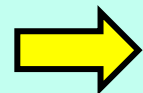
$$j_4 = 0,066$$

tasso annuo nominale
convertibile trimestralmente

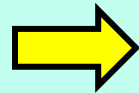
$$i_4 = \frac{j_4}{4} = \frac{0,066}{4} = 0,0165$$

tasso periodale

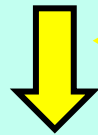
frazione di anno corrispondente
(in un anno ci sono 4 trimestri)



TASSI EQUIVALENTI

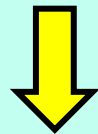


$$i_4 = 1,65\%$$



$$1+i = (1+i_k)^k$$

$$1+i = (1+0,0165)^4 \Rightarrow 1+i = (1,0165)^4 \Rightarrow i = (1,0165)^4 - 1 \Rightarrow$$



$$i = 0,068 = 6,8\%$$

tasso annuale, ovvero il tasso annuo equivalente

INTERESSE COMPOSTO

ESEMPI

tasso **annuo** del 0,12% $\Rightarrow i = (1 + 0,12)^{\frac{1}{2}} - 1$ \leftarrow tasso **semestrale equivalente**

tasso **semestrale** del 0,032% $\Rightarrow i = (1 + 0,032)^2 - 1$ \leftarrow tasso **annuo equivalente**

tasso **quadrimestrale** del 0,032% $\Rightarrow i = (1 + 0,032)^{\frac{3}{4}} - 1$ \leftarrow tasso **trimestrale equivalente**