LA MATEMATICA FINANZIARIA

Daniela Tondini

dtondini@unite.it

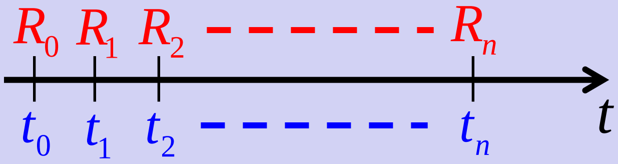
Facoltà di Scienze politiche

CdS in Economia

Università degli Studi di Teramo

LE RENDITE

Una **rendita** è una successione di importi, chiamate **rate**, da riscuotere o da pagare, in epoche differenti, chiamate **scadenze**, a intervalli di tempo determinati.



rendite certe, ovvero rendite che non sono condizionate dall'accadere o meno di eventi aleatori, ma che dipendono solo dal tipo di contratto stipulato

LE RENDITE

I fattori che caratterizzano una rendita sono:

***rata*:** l'importo che viene riscosso o pagato ad ogni periodo; esistono rendite a rata *costante* (se l'importo della rata è fisso) o *variabile* (se l'importo della rata non è fisso)

***numerosità*:** il numero di rate che costituiscono la rendita; esistono rendite *temporanee*, ovvero con un numero finito di rate, rendite *perpetue* o *vitalizie*, ovvero con un numero illimitato di rate (in tal caso il soggetto incassa la rendita fino a che è in vita o, in caso di enti, fino a quando esistono)

***periodo*:** l'intervallo di tempo tra la riscossione, o il pagamento, di una rata e l'altra; esistono rendite *annue*, se il tempo che intercorre tra la riscossione di una rata e l'altra è di un anno, oppure *poliennali*, se il tempo è di più anni, o *frazionate*, se il tempo è una frazione di anno

LE RENDITE

I fattori che caratterizzano una rendita sono:

decorrenza**:** quando può essere riscossa la prima rata; esistono rendite *immediate*, se il pagamento delle rate avviene entro il primo periodo dopo la stipula del contratto (ad esempio, si può stipulare un contratto con un'Assicurazione che prevede che, dietro il pagamento di €30000,00, si abbia diritto, a partire da subito, ad una rendita vitalizia di €1000,00 l'anno), oppure *differite*, se avviene dopo più periodi (ad esempio, il pagamento della pensione avviene al termine della carriera lavorativa dopo aver raggiunto una certa età)

scadenza**:** una volta fissata la decorrenza, indica il periodo in cui può essere riscossa la prima rata e, di conseguenza, tutte le altre; esistono rendite *anticipate*, se il pagamento della rata avviene all'inizio di ogni periodo, oppure *posticipate*, se il pagamento della rata avviene al termine di ogni periodo

LE RENDITE

Riassumendo:

Relativamente al periodo	Annua	Frazionata	Poliennale
Relativamente alla numerosità delle rate	Temporanea	Perpetua	
Relativamente alla decorrenza	Immediata	Differita	
Relativamente alla scadenza	Anticipata	Posticipata	

LE RENDITE

ESEMPI

Mario deve riscuotere €500,00 all'inizio di ogni anno per 6 anni: si tratta di una rendita <u>costante</u> (l'importo della rata è fisso), <u>annua</u> (il periodo che intercorre tra una rata e l'altra è di 1 anno), <u>temporanea</u> (il numero delle rate è finito, pari a 6), <u>anticipata</u> (la riscossione avviene all'inizio dell'anno, ovvero all'inizio del periodo di competenza).

Lucia deve pagare €60,00 alla fine di ogni mese per 3 anni: si tratta di una rendita <u>costante</u> (l'importo della rata è fisso), <u>frazionata</u> (il periodo che intercorre tra una rata e l'altra è di 1 mese), <u>temporanea</u> (il numero delle rate è finito, pari a 36), <u>posticipata</u> (il pagamento viene effettuato alla fine di ogni mese).

LE RENDITE

ESEMPI

Un artigiano ha in affitto un capannone per il quale paga, semestralmente, un canone di locazione di €5000,00; il contratto scade tra 4 anni: si tratta di una rendita <u>costante</u> (l'importo della rata è fisso), <u>frazionata</u> (il canone di affitto è semestrale), <u>temporanea</u> (il contratto è valido 4 anni), <u>immediata</u> e <u>anticipata</u> (l'affitto si paga dalla stipula del contratto e in modo anticipato).

Fabio potrà riscuotere, a partire da oggi e finché sarà in vita, €1000,00 ogni 3 mesi alla scadenza di ogni periodo: si tratta di una rendita <u>costante</u> (l'importo della rata è fisso), <u>frazionata</u> (la riscossione è trimestrale), <u>perpetua</u> (il numero delle rate non è precisato), <u>immediata</u> e <u>posticipata</u> (la riscossione avviene da subito e il pagamento avviene alla fine del trimestre).

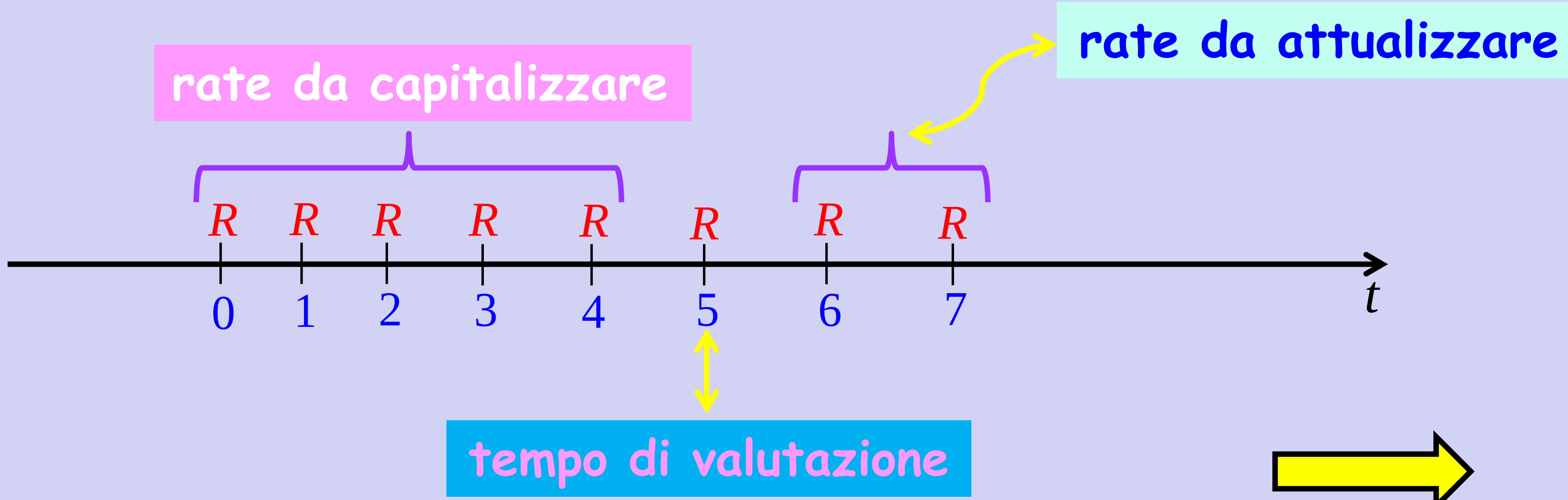
LE RENDITE

ESEMPI

Un genitore accantona del denaro, ad esempio €1000,00, ogni anno, a partire dalla nascita del proprio figlio, denaro che possa consentirgli di completare il corso di studi; il figlio, una volta giunto all'università, usufruirebbe della somma accantonata godendo di una rata annua o mensile fino al completamento dei cinque anni del corso di studio: si tratta di una rendita <u>costante</u> (l'importo della rata è fisso), annua o frazionata (l'importo può essere corrisposto tramite 5 rate annue oppure 60 mensili), <u>temporanea</u> (la durata è di 5 anni), <u>differita</u> (il ragazzo inizierà a percepire la rata al momento dell'iscrizione all'università), <u>anticipata</u> (è stato disposto che la rata gli venga corrisposta all'inizio di ogni anno o mese).

LE RENDITE

Il problema che si presenta con maggiore frequenza è quello di valutare una rendita ad un certo punto del contratto. Ad esempio, se una rendita è costituita da 8 rate e vogliamo sapere qual è il suo valore alla riscossione della sesta rata, dobbiamo capitalizzare le prime 5, aggiungere la sesta rata e attualizzare le successive due.



LE RENDITE

Il **valore di una rendita ad un’epoca *t*** è la somma dei montanti delle rate antecedenti a *t*, con i valori attuali delle rate che scadono in epoca successiva a *t*, più la rata al tempo *t*. Risulta comunque necessario, per risolvere problemi riguardanti movimenti di denaro, e quindi anche una rendita, conoscere il regime finanziario in cui si opera.

LE RENDITE

Le rendite possono essere valutate in modo:

POSTERIORE
a tutte le rate
(o coincidente
con l'ultima)

si calcola il
montante di
tutte le rate

ANTECEDENTE
a tutte le rate
(o coincidente
con la prima)

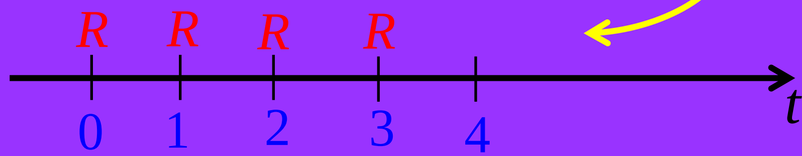
si calcola il
valore attuale di
tutte le rate

LE RENDITE

In particolare:

RENDITA ANTICIPATA

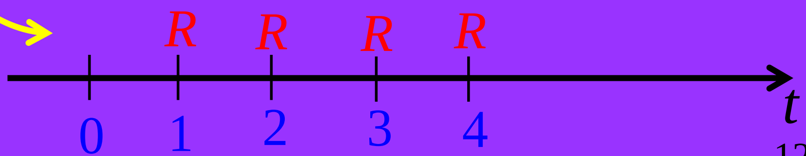
le rate vengono pagate all'inizio dei periodi



rendita costante formata da quattro rate di eguale importo *R*

RENDITA POSTICIPATA

le rate vengono versate alla fine dei periodi



LE RENDITE

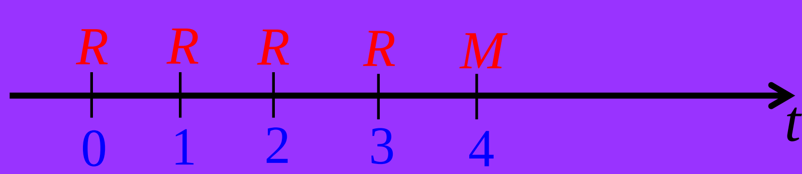
Il calcolo del montante *M* deve essere fatto:

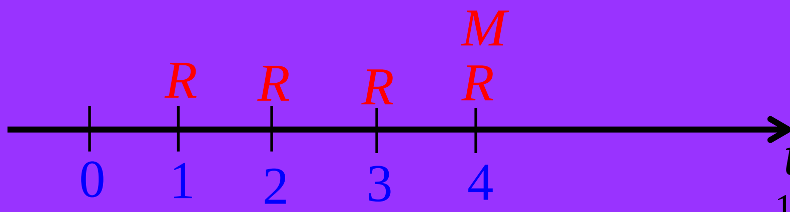
RENDITA ANTICIPATA

un periodo dopo il versamento dell'ultima rata

RENDITA POSTICIPATA

all'atto del pagamento dell'ultima rata



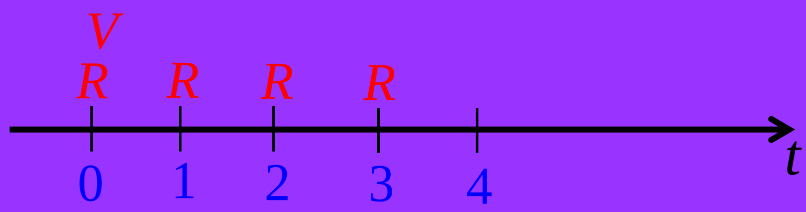


LE RENDITE

Il calcolo del valore attuale *V* deve essere fatto:

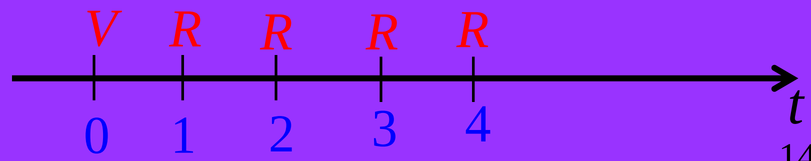
RENDITA ANTICIPATA

all'atto del pagamento della prima rata



RENDITA POSTICIPATA

un periodo prima del pagamento della prima rata



LE RENDITE IMMEDIATE

Consideriamo una **rendita immediata posticipata** formata da n rate di importo R; sia i il tasso di interesse che deve essere conforme al periodo della rendita (interesse annuo se la rata è annua, interesse semestrale se la rata è semestrale, …). Il valore ***M*** della rendita al tempo n è la somma dei montanti prodotti dalle singole rate, calcolati a partire dalla loro scadenza (la prima rata deve essere capitalizzata per n–1 anni, la seconda per n–2 anni, …), fino all'ultima rata che non produrre interessi in quanto viene versata esattamente al tempo $t = n$.

$$M = R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^{n-2} + \ldots + R(1+i)^{2} + R(1+i)^{1} + R$$

LE RENDITE IMMEDIATE

$$M = R\left[\underbrace{(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \ldots + (1+i)^{2} + (1+i)^{1} + 1}\right]$$

termini di una progressione geometrica il cui primo termine vale 1 e la ragione è 1+*i*

$$1\cdot\frac{(1+i)^{n}-1}{(1+i)-1}$$

$$\boxed{M = R\cdot\frac{(1+i)^{n}-1}{i}}$$

montante pari al valore delle *n* rate di importo *R*

$$\boxed{M = R\cdot n \text{ per } i = 0}$$

LE RENDITE IMMEDIATE

$$\boxed{M = R \cdot s_{\overline{n}|i}}$$

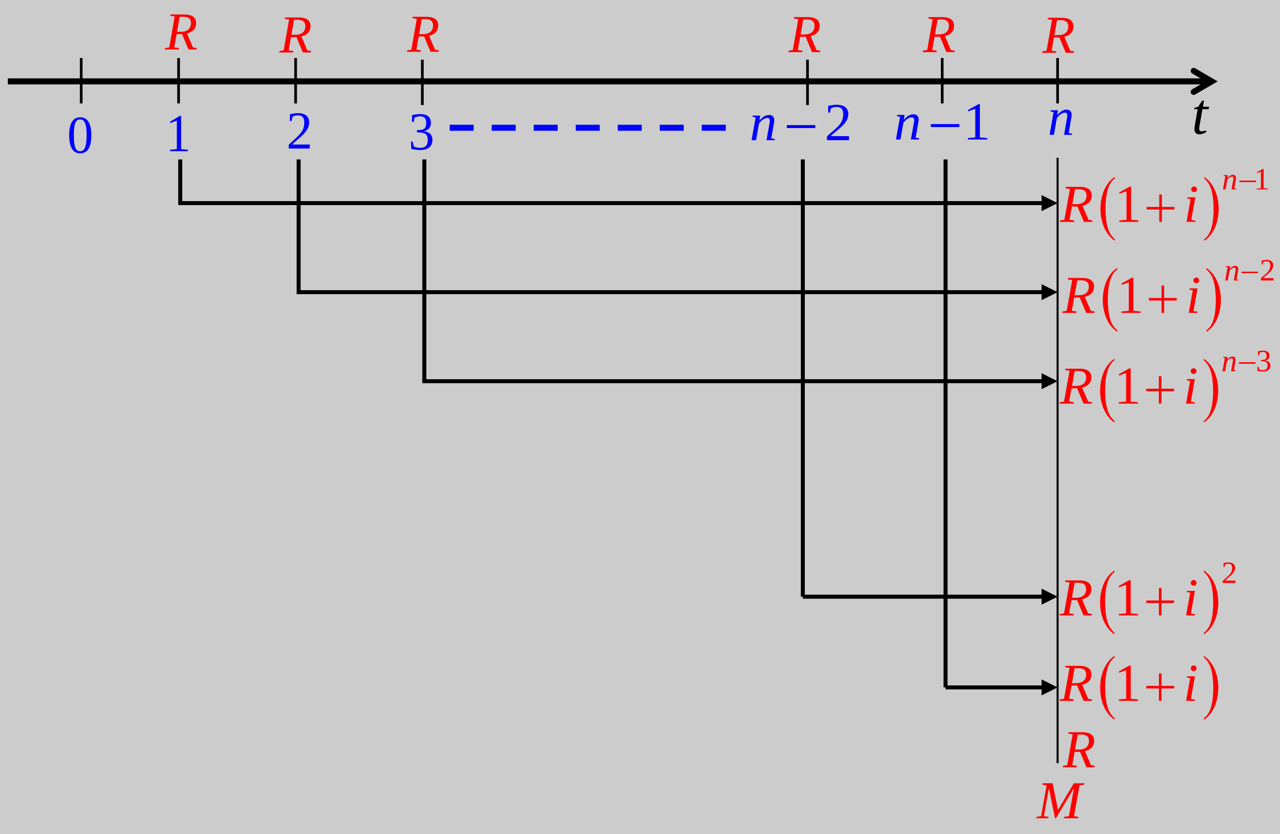
montante prodotto da una rendita unitaria immediata posticipata per *n* periodi al tasso periodale *i*

dove:

$$\boxed{s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

s **posticipato, figurato** ***n*****,** ***al tasso i***

LE RENDITE IMMEDIATE



LE RENDITE IMMEDIATE

ESEMPIO

Carla versa in un fondo che capitalizza, a un tasso dell’1,5% annuo, €2000,00 per 10 anni, alla fine di ogni anno. Qual è il **montante** di tale rendita? Si tratta di **una rendita annua immediata posticipata** (il tasso di interesse è conforme al periodo della rata).

$$R = 2000,00€$$
$$i_a = 1,5\% = 0,015$$
$$n = 10\ anni$$

$$\boxed{M = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

$$M = 2000 \cdot \frac{(1+0,015)^{10} - 1}{0,015} = 21405,44€$$

LE RENDITE IMMEDIATE

ESEMPIO

Il montante di una rendita annuale valutato al tasso del 2,4% è di €100000,00. Se le rate sono 10, costanti e posticipate, qual è l'importo della **rata**?

$$R = 100000,00€$$
$$i_a = 2,4\% = 0,024$$
$$n = 10$$

$$\boxed{M = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

$$100000 = R \cdot \frac{(1+0,024)^{10} - 1}{0,024} \Rightarrow 100000 = R \cdot 11,152 \Rightarrow R = \frac{100000}{11,152} = 8967€$$

LE RENDITE IMMEDIATE

ESEMPIO

Antonio riesce a risparmiare €3000,00 ogni anno e decide di depositare questa somma in un fondo di investimento che rende il 5% annuo. **Quante rate** deve versare per avere un montante di €40000,00?

i risparmi si valutano, e quindi si versano, alla fine dell'anno (rendita posticipata)

$$R = 3000,00€$$
$$M = 40000,00€$$
$$i_a = 5\% = 0,05$$

conforme al periodo della rata

$$\boxed{M = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

$$40000 = 3000 \cdot \frac{(1+0,05)^n - 1}{0,05} \Rightarrow (1,05)^n - 1 = \frac{40000 \cdot 0,05}{3000}$$

LE RENDITE IMMEDIATE

$$(1,05)^n = \frac{40000 \cdot 0,05}{3000} + 1 \Rightarrow (1,05)^n = 1,6666667$$

$$\log(1,05)^n = \log(1,6666667) \Rightarrow n\log(1,05) = \log(1,6666667)$$

$$n = \frac{\log(1,6666667)}{\log(1,05)} = 10,47$$

Il risultato ottenuto indica che il numero di rate, necessariamente un numero intero, deve essere maggiore di 10. Si potrà, dunque, ottenere un montante di €400000,000 con 11 rate.

LE RENDITE IMMEDIATE

Consideriamo una **rendita immediata anticipata** formata da n rate di importo R; sia i il tasso di interesse che deve essere conforme al periodo della rendita (interesse annuo se la rata è annua, interesse semestrale se la rata è semestrale, …). Il valore ***M*** della rendita al tempo n è la somma dei montanti prodotti dalle singole rate (la prima rata deve essere capitalizzata per n anni, la seconda per n–1 anni, la terza per n–2 anni, …), calcolati a partire dalla loro scadenza, fino all'ultima rata, al tempo $t = n$, che produce interessi solo per un anno.

$$M = R(1+i)^{n} + R(1+i)^{n-1} + \ldots + R(1+i)^{2} + R(1+i)^{1}$$

LE RENDITE IMMEDIATE

$$M = R(1+i)\Big[\underbrace{(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \ldots + (1+i)^2 + (1+i)^1 + 1}\Big]$$

termini di una progressione geometrica il cui primo termine vale 1 e la ragione è 1+*i*

$$1 \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}$$

$$\boxed{M = R \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

$$\boxed{M = R \cdot n \text{ per } i = 0}$$

montante pari al valore delle *n* rate di importo *R*

LE RENDITE IMMEDIATE

$$\boxed{M = R \cdot \ddot{s}_{\overline{n|}i}}$$

montante prodotto da una rendita unitaria immediata anticipata per *n* periodi al tasso periodale *i*

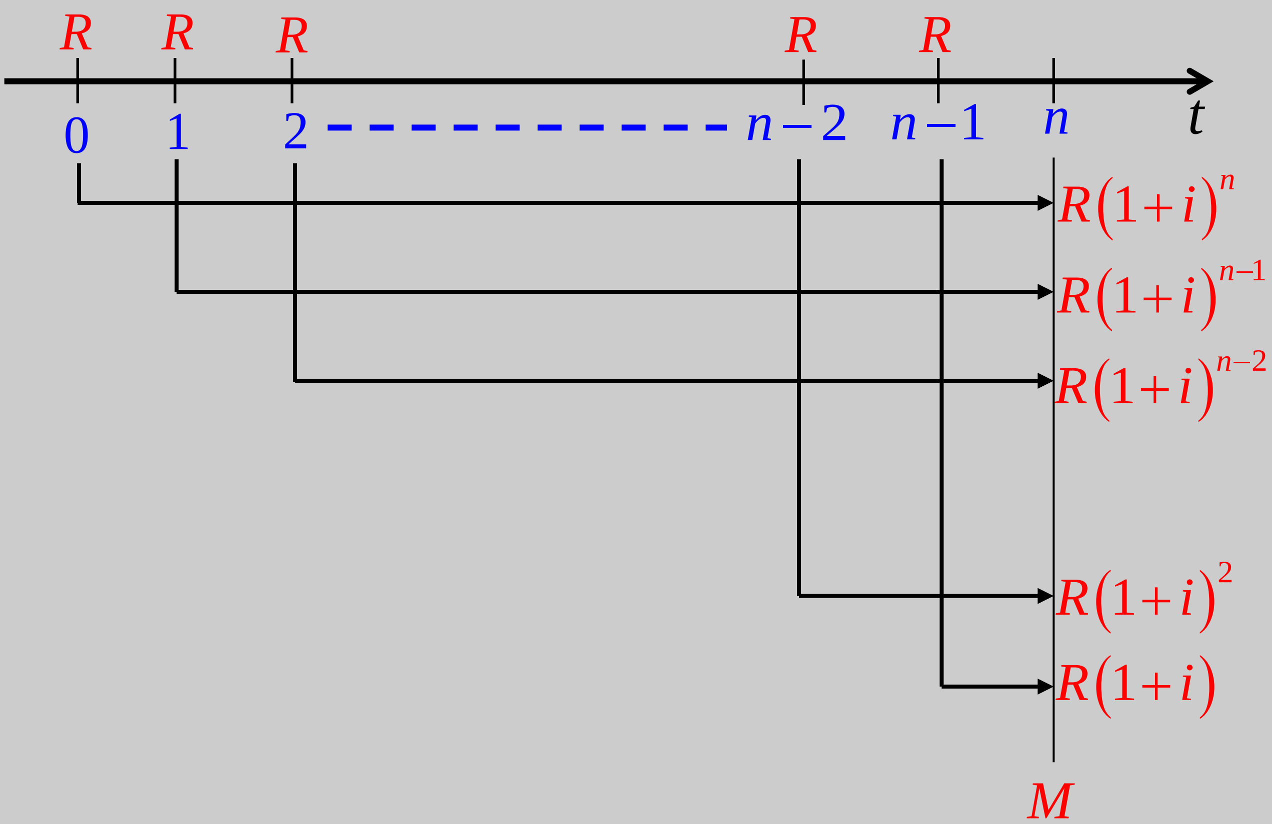
dove:

$$\boxed{\ddot{s}_{\overline{n|}i} = (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

s anticipato, figurato *n*, *al tasso i*

$$\boxed{\ddot{s}_{\overline{n|}i} = (1+i) \cdot s_{\overline{n|}i}}$$

LE RENDITE IMMEDIATE



LE RENDITE IMMEDIATE

ESEMPIO

Marco versa €1200,00 ogni anno per 4 anni ad un tasso di interesse annuo del 3%. Dopo aver fatto l'ultimo versamento lascia l'intera somma in deposito per altri 3 anni. Quale capitale avrà alla fine se la rendita è **immediata anticipata**?

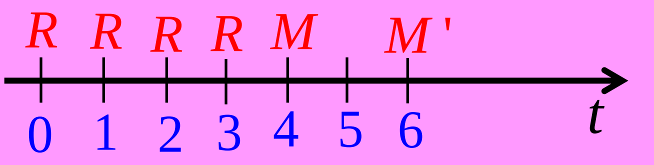
$$R = 1200,00€$$
$$i_a = 3\% = 0,03$$
$$n = 4\ anni$$

$$\boxed{M = R \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

$$M = 1200 \cdot (1+0,03) \cdot \frac{(1+0,03)^4 - 1}{0,003} = 5170,96€$$

LE RENDITE IMMEDIATE

Il ritiro del capitale, però, viene effettuato 3 anni dopo l'ultimo versamento, che è avvenuto al tempo 3; occorre, pertanto, capitalizzare *M* fino al tempo 6, ovvero per 2 anni. Otteniamo, così, il capitale che Marco avrà alla fine:



$$M = 5170{,}96€$$
$$i_a = 3\% = 0{,}03$$
$$t = 2\ anni$$

$$\boxed{M' = M \cdot (1+i)^t}$$

$$M' = 5170{,}96 \cdot (1+0{,}03)^2 = 5485{,}87€$$

LE RENDITE IMMEDIATE

ESEMPIO

Calcolare quale **rata trimestrale** è necessario versare per 6 anni consecutivi per avere, un periodo dopo l'ultimo versamento, un montante di €6630,49 se la capitalizzazione è al tasso annuo del 3,2%.

$$M = 6630,49€$$
$$i_a = 3,2\% = 0,032$$
$$n = 24$$

$$\boxed{M = R \cdot \ddot{s}_{\overline{n|}i} = R \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

tasso conforme al periodo della rata in quanto trasformato da annuo in trimestrale

4 rate ogni anno per 6 anni

$$i_4 = \sqrt[4]{1+0,032} - 1 = 0,0079$$

LE RENDITE IMMEDIATE

$$\boxed{M = R \cdot \ddot{s}_{\overline{n|}i} = R \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

$$6630,49 = R \cdot (1+0,0079) \cdot \frac{(1+0,0079)^{24} - 1}{0,079} \Rightarrow 6630,49 = R \cdot 26,52$$

$$R = \frac{6630,49}{26,52} = 250,00€$$

LE RENDITE IMMEDIATE

ESEMPIO

Versando quattro rate annue anticipate di uguale importo, al tasso annuo del 5%, si è costituito, al termine del terzo anno, un montante di 11000,00€. Determinare l'importo di tale **rata**. Determinare, inoltre, il **numero** dei versamenti supplementari necessari per costituire un capitale di 22000,00€.

$M = 11000,00€$

$C = 22000,00€$

$n = 4\ anni$

$i_a = 5\% = 0,05$

tasso conforme al periodo della rata

$$\boxed{M = R \cdot \ddot{s}_{\overline{n}|i} = R \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

$$11000 = R \cdot \ddot{s}_{\overline{4}|0,05} \Rightarrow R = \frac{11000 \cdot 0,05}{(1+0,05)\left[(1+0,05)^4 - 1\right]}$$

LE RENDITE IMMEDIATE

$$R=\frac{11000\cdot 0,05}{(1+0,05)\left[(1+0,05)^4-1\right]}=2430,60€$$

Il numero di versamenti di pari importo per ottenere un capitale di 22000,00€ è:

$$22000=2430,60\cdot \ddot{s}_{\overline{n}|0,05}\Rightarrow 22000=2430,60\cdot(1+0,05)\cdot\frac{(1+0,05)^n-1}{0,05}$$

$$\frac{22000\cdot 0,05}{2430,60\cdot(1+0,05)}=(1+0,05)^n-1\Rightarrow(1,05)^n=\frac{22000\cdot 0,05}{2430,60\cdot 1,05}+1$$

$$\log(1,05)^n=\log\left(\frac{22000\cdot 0,05}{2430,60\cdot 1,05}+1\right)\Rightarrow n\log(1,05)=\log(1,43)\Rightarrow n=\frac{\log(1,43)}{\log(1,05)}=7,35$$

Sono necessari, pertanto, ulteriori 3 versamenti interi ed un quarto versamento di importo inferiore per ottenere il capitale richiesto.

LE RENDITE IMMEDIATE

Consideriamo una **rendita immediata posticipata** formata da n rate di importo R; sia i il tasso di interesse che deve essere conforme al periodo della rendita (interesse annuo se la rata è annua, interesse semestrale se la rata è semestrale, …). Il valore $\boldsymbol{V}$ della rendita al tempo 0 è la somma dei valori attuali prodotti dalle singole rate, calcolati a partire dalla loro scadenza; l'ultima rata deve essere attualizzata per n anni, la penultima per n–1 anni e così via, fino alla prima rata che deve essere attualizzata per un solo anno.

$$V = R(1+i)^{-n} + R(1+i)^{1-n} + R(1+i)^{2-n} + \ldots + R(1+i)^{-2} + R(1+i)^{-1}$$

LE RENDITE IMMEDIATE

$$V = R(1+i)^{-1}\left[\underbrace{(1+i)^{1-n} + (1+i)^{2-n} + (1+i)^{3-n} + \ldots + (1+i)^{-1} + 1}\right]$$

termini di una progressione geometrica il cui primo termine vale 1 e la ragione è $(1+i)^{-1}$

$$1 \cdot \frac{(1+i)^{-n} - 1}{(1+i)^{-1} - 1}$$

$$\boxed{V = R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

$$\boxed{V = R \cdot n \text{ per } i = 0}$$

valore attuale pari al valore delle n rate di importo R

LE RENDITE IMMEDIATE

$$\boxed{V = R \cdot a_{\overline{n}|i}}$$

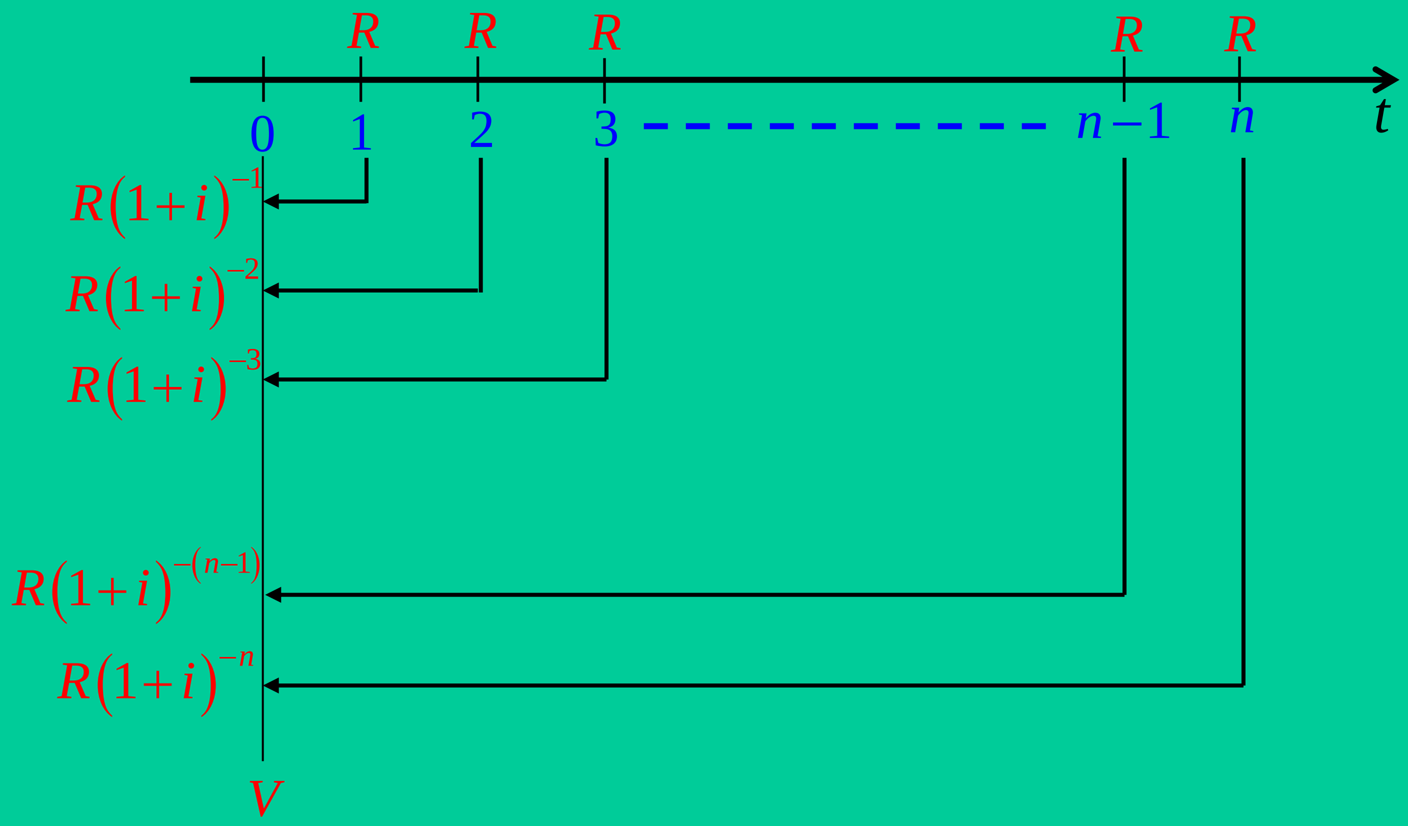
valore attuale prodotto da una rendita unitaria immediata posticipata per *n* periodi al tasso periodale *i*

dove:

$$\boxed{a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

a posticipato, figurato *n*, *al tasso i*

LE RENDITE IMMEDIATE



LE RENDITE IMMEDIATE

ESEMPIO

Calcolare il **valore attuale di una rendita immediata posticipata**, composta da 24 mensilità di €200,00 ciascuna, al tasso di interesse annuo del 5% convertibile mensilmente.

$$i_k = \frac{j_k}{k} = \frac{0,05}{12} = 0,004167$$

$$R = 200,00€$$
$$i_a = 5\% = 0,05$$
$$n = 24\ mesi$$

$$\boxed{V = R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

$$V = 200 \cdot \frac{1-(1+0,004167)^{-24}}{0,004167} = 4558,7€$$

LE RENDITE IMMEDIATE

ESEMPIO

Il valore attuale di una rendita formata da 10 rate annue, valutate al tasso annuo del 3,5%, è di €25000,00. Calcolare l'importo di ciascuna **rata**, nel caso di rendita immediata posticipata.

$$V = 25000,00€$$
$$i_a = 3,5\% = 0,035$$
$$n = 10$$

$$\boxed{V = R \cdot a_{\overline{n}|i} = R \cdot a_{\overline{10}|0,035} = R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

$$25000 = R \cdot \frac{1-(1+0,035)^{-10}}{0,035} \Rightarrow R = \frac{25000 \cdot 0,035}{1-(1+0,035)^{-10}} = 3006,03€$$

LE RENDITE IMMEDIATE

ESEMPIO

La cessione, al tasso annuo del 3%, di una rendita formata da rate annue posticipate di €1500,00, viene valutata €10529,54. Da **quante rate** è formata?

$V = 10529,54€$

$R = 1500,00€$

$i_a = 3\% = 0,03$

$$\boxed{V = R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

conforme al periodo della rata

$$10529,54 = 1500 \cdot \frac{1-(1+0,03)^{-n}}{0,03} \Rightarrow 1-(1,03)^{-n} = \frac{10529,54 \cdot 0,03}{1500}$$

LE RENDITE IMMEDIATE

$$\Rightarrow \quad (1,03)^{-n} = 1 - \frac{10529,54 \cdot 0,03}{1500} = 0,7894092$$

$$\Downarrow$$

$$\log(1,03)^{-n} = \log(0,7894092) \Rightarrow -n\log(1,03) = \log(0,7894092)$$

$$\Downarrow$$

$$n = -\frac{\log(0,7894092)}{\log(1,03)} = 8$$

$$\Downarrow$$

La rendita è formata da 8 rate

LE RENDITE IMMEDIATE

Consideriamo una **rendita immediata anticipata** formata da n rate di importo R; sia i il tasso di interesse che deve essere conforme al periodo della rendita (interesse annuo se la rata è annua, interesse semestrale se la rata è semestrale, …). Il valore $\boldsymbol{V}$ della rendita al tempo 0 è la somma dei valori attuali prodotti dalle singole rate, calcolati a partire dalla loro scadenza; l'ultima rata deve essere attualizzata per $n-1$ anni, la penultima per $n-2$ anni e così via; la prima rata, invece, non deve essere attualizzata.

$$V = R(1+i)^{1-n} + R(1+i)^{2-n} + \ldots + R(1+i)^{-2} + R(1+i)^{-1} + R$$

LE RENDITE IMMEDIATE

$$V = R\underbrace{\left[(1+i)^{1-n} + (1+i)^{2-n} + \ldots + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-1} + 1\right]}$$

termini di una progressione geometrica il cui primo termine vale 1 e la ragione è $(1+i)^{-1}$

$$(1+i)\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$\boxed{V = R\cdot(1+i)\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

$$\boxed{V = R\cdot n \text{ per } i = 0}$$

valore attuale pari al valore delle n rate di importo R

LE RENDITE IMMEDIATE

$$V = R \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|i}$$

valore attuale prodotto da una rendita unitaria immediata anticipata per *n* periodi al tasso periodale *i*

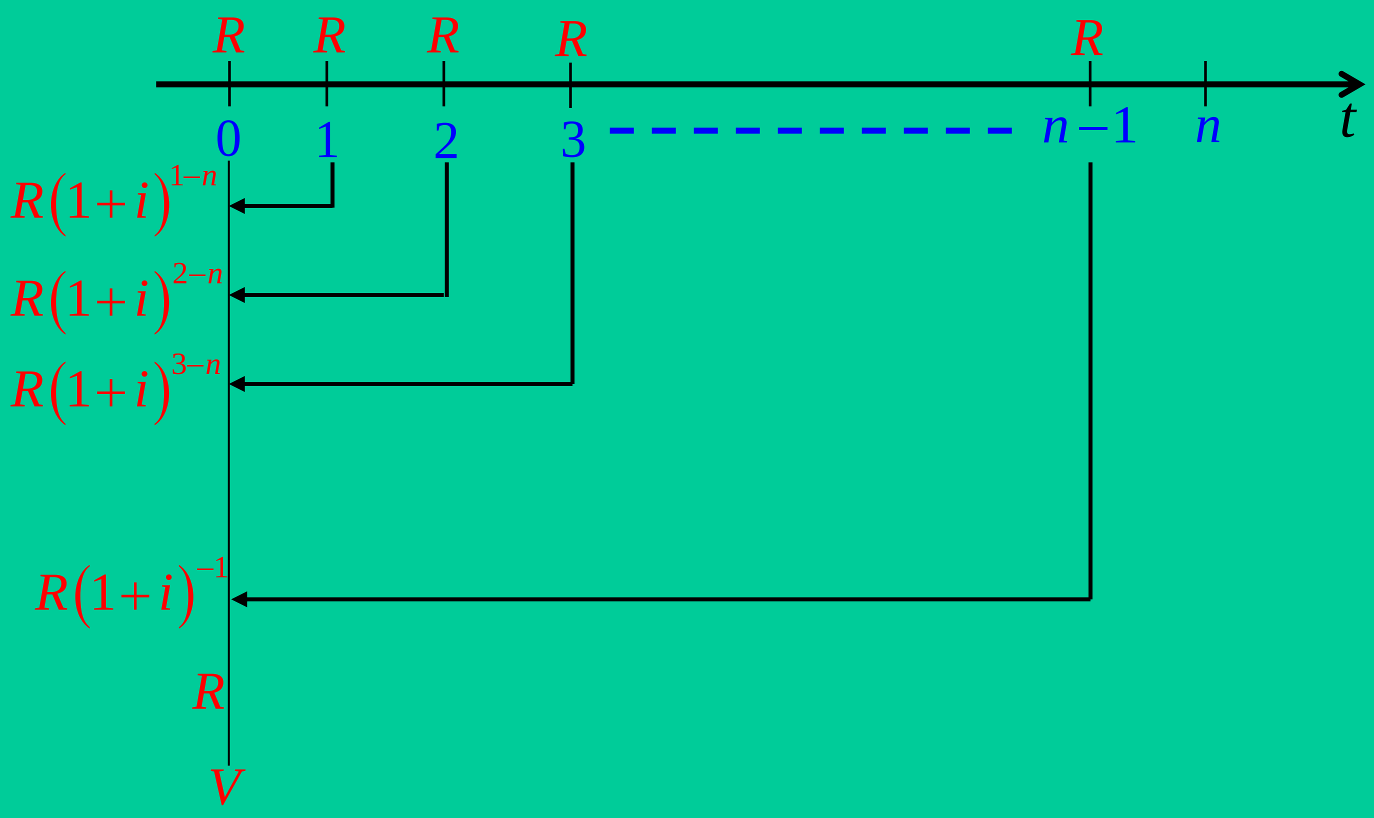
dove:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = (1+i) \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

a anticipato, figurato *n*, *al tasso i*

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = (1+i) \cdot a_{\overline{n}|i}$$

LE RENDITE IMMEDIATE



LE RENDITE IMMEDIATE

ESEMPIO

Calcolare il **valore attuale di una rendita immediata trimestrale anticipata**, con rata di €4800,00 della durata di 6 anni, al tasso di interesse annuo del 3,5%.

$$R = 4800,00€$$
$$i_a = 3,5\% = 0,035$$
$$n = 6 \; anni$$

$$n = 6 \cdot 4 = 24$$

in un anno ci sono 4 trimestri

$$\boxed{V = R \cdot (1+i) \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

$$i_4 = \sqrt[4]{1+0,035} - 1$$

$$i_4 = 0,00863745$$

$$V = 4800 \cdot (1+0,00863745) \cdot \frac{1-(1+0,00863745)^{-24}}{0,00863745} = 104536,58€$$

LE RENDITE IMMEDIATE

ESEMPIO

Il valore attuale di una rendita formata da 6 rate annue, al tasso annuo del 3%, all'atto del pagamento della prima rata, è di €16739,12. Calcolare l'importo delle **rate** costanti.

il valore attuale è riferito all'atto del pagamento della prima rata (rendita anticipata)

$$V = 16739,12$$
$$n = 6$$
$$i_a = 3\% = 0,03$$

conforme al periodo della rata

$$\boxed{V = R \cdot (1+i) \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

$$16739,12 = R \cdot (1+0,03) \cdot \frac{1-(1+0,03)^{-6}}{0,03} \Rightarrow R = \frac{16739,12 \cdot 0,03}{(1+0,03) \cdot \left[1-(1+0,03)^{-6}\right]} = 3000,00€$$

LE RENDITE IMMEDIATE

ESEMPIO

Calcolare il **numero** di rate sapendo che ogni rata è di 350,00€, che il valore attuale è pari a 1262,00€ e che il tasso è del 12%.

$$R = 350,00€$$
$$V = 1262,00€$$
$$i_a = 12\% = 0,12$$

$$\boxed{V = R \cdot (1+i) \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

$$1262 = 350 \cdot (1+0,12) \cdot \frac{1-(1+0,12)^{-n}}{0,12}$$

LE RENDITE IMMEDIATE

$$1262 = 350 \cdot (1+0{,}12) \cdot \frac{1-(1+0{,}12)^{-n}}{0{,}12} \Rightarrow \frac{1262 \cdot 0{,}12}{350 \cdot (1+0{,}12)} = 1-(1+,012)^{-n}$$

$$(1+,012)^{-n} = 1-\frac{1262 \cdot 0{,}12}{350 \cdot 1{,}12} \Rightarrow (1{,}12)^{-n} = 0{,}61 \Rightarrow \log(1{,}12)^{-n} = \log(0{,}61)$$

$$-n\log(1{,}12) = \log(0{,}61) \Rightarrow n = -\frac{\log(0{,}61)}{\log(1{,}12)} = -(-4{,}31) = 4{,}31$$

LE RENDITE DIFFERITE

Una **rendita** si dice **differita** quando la prima rata viene pagata o riscossa dopo un certo numero *p* di periodi. Il periodo che intercorre tra la stipula del contratto e il pagamento della prima rata si chiama *differimento*. Si osservi che il differimento di una rendita non ha alcuna influenza sul calcolo del montante che viene calcolato al termine della rendita; la capitalizzazione, quindi, inizia al momento del versamento della prima rata. Il differimento, invece, ha delle conseguenze sul calcolo del valore attuale.

LE RENDITE DIFFERITE

Consideriamo una **rendita posticipata** con periodo di differimento p, formata da n rate di importo R al tasso periodale i conforme al periodo della rendita.

Il valore V al tempo p un periodo prima del pagamento della prima rata si ottiene:

- calcolando il valore attuale al tempo p, un periodo prima del pagamento della prima rata:

$$V' = R \cdot a_{\overline{n}|i}$$

- attualizzando il capitale per il periodo di differimento p:

$$V = V' \cdot (1+i)^{-p}$$

LE RENDITE DIFFERITE

valore attuale prodotto da una rendita unitaria posticipata differita di un tempo *p*

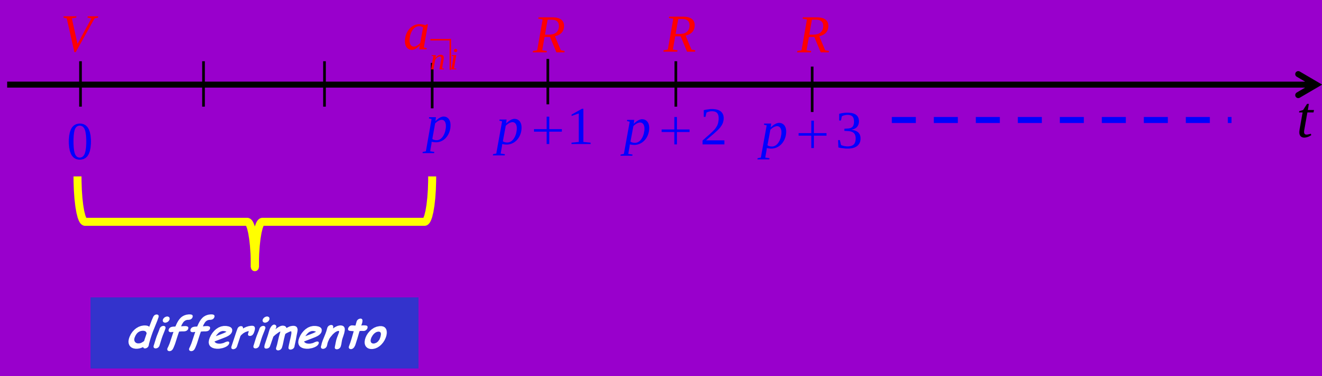
$$\boxed{V = R \cdot {}_{p/}a_{\overline{n|}i}}$$

dove:

$$\boxed{{}_{p/}a_{\overline{n|}i} = a_{\overline{n|}i} \cdot (1+i)^{-p}}$$

a posticipato, figurato *n*, *al tasso i*, differito *p*

LE RENDITE DIFFERITE



LE RENDITE DIFFERITE

ESEMPIO

Calcolare il **valore attuale di una rendita posticipata**, formata da 6 rate annue di €2000,00 con **differimento** 2 anni e valutata al tasso annuo del 4%.

$R = 2000,00€$

$i_a = 4\% = 0,04$

$n = 6 \; l'anno$

$p = 2 \; anni$

$$\boxed{V = R \cdot {}_{p/}a_{\overline{n}|i}}$$

$$V = 2000 \cdot \underbrace{(1+0,04)^{-2}}_{\text{differimento con tasso annuo}} \cdot \frac{1-(1+0,04)^{-6}}{0,04} = 9693,30€$$

LE RENDITE DIFFERITE

Consideriamo una **rendita anticipata**, differita di p periodi, formata da n rate di importo R al tasso periodale i conforme al periodo della rendita. Il valore V al tempo p un periodo prima del pagamento della prima rata si ottiene:

- calcolando il valore attuale al tempo p, ovvero all'atto del pagamento della prima rata:

$$V' = R \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|i}$$

- attualizzando il capitale per il periodo di differimento p:

$$V = V' \cdot (1+i)^{-p}$$

LE RENDITE DIFFERITE

valore attuale prodotto da una rendita unitaria anticipata differita di un tempo *p*

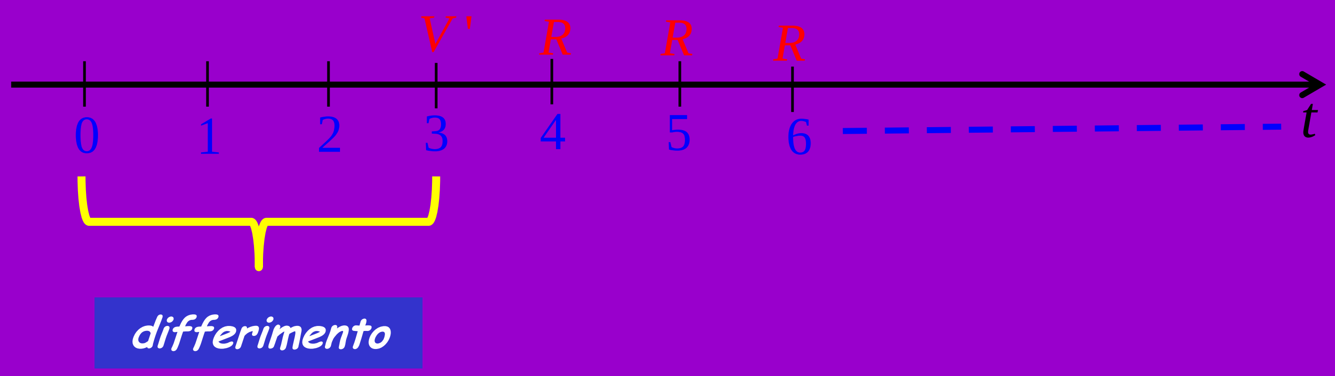
$$\boxed{V = R \cdot {}_{p/}\ddot{a}_{\overline{n}|i}}$$

dove:

$$\boxed{{}_{p/}\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \ddot{a}_{\overline{n}|i} \cdot (1+i)^{-p}}$$

a anticipato, figurato *n*, *al tasso i*, differito *p*

LE RENDITE DIFFERITE



LE RENDITE DIFFERITE

ESEMPIO

Calcolare il **valore attuale di una rendita anticipata**, formata da 4 rate semestrali di €1000,00 con **differimento** 3 anni e valutata al tasso annuo del 2,5%.

$$R = 1000,00€$$
$$i_a = 2,5\% = 0,025$$
$$n = 4\ semestri$$
$$p = 3\ anni$$

$$p = 3 \cdot 2 = 6$$

in un anno ci sono 2 semestri

$$\boxed{V = R \cdot {}_{p/}\ddot{a}_{\overline{n|}i}}$$

$$i_2 = \sqrt[2]{1+0,025} - 1$$

$$i_2 = 0,01242$$

$$V = 1000 \cdot \underbrace{(1+0,01242)^{-6}}_{\text{differimento con tasso semestrale}} \cdot (1+0,01242) \cdot \frac{1-(1+0,01242)^{-4}}{0,01242} = 3646,67€$$

LE RENDITE DIFFERITE

$$V = 1000 \cdot \underbrace{\left(1+0,025\right)^{-3}}_{\text{differimento con tasso annuo}} \cdot \left(1+0,01242\right) \cdot \frac{1-\left(1+0,01242\right)^{-4}}{0,01242} = 3646,61€$$

Si osservi che i valori ottenuti, tenendo conto degli errori di arrotondamento, coincidono.

LE RENDITE PERPETUE

Una **rendita** si dice **perpetua** quando ha un numero illimitato di rate oppure quando non si conosce a priori quale sia il loro numero. In questo caso, pertanto, non ha senso di parlare di montante della rendita in quanto, non potendo stabilire un'ultima rata, non sapremmo in quale periodo calcolarlo.
Relativamente alle rendite perpetue, dunque, avremo SOLO problemi di calcolo del valore attuale. Per determinare il valore attuale di una rendita perpetua utilizzeremo le formule già viste nei casi di rendite temporanee in cui dovremo tenere però presente che n rappresenta un valore che può crescere indefinitamente (ovvero n tende all'infinito).

LE RENDITE PERPETUE

Ad esempio il valore:

$$\boxed{V = R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = R \cdot a_{\overline{n}|i}}$$

rappresenta il valore attuale di una rendita immediata posticipata. Osserviamo che, per *n* che tende all'infinito, ovvero che diventa sempre più grande, il termine:

$$(1+i)^{-n}$$

diventa sempre più piccolo. Se nella formula precedente, pertanto, trascuriamo tale valore, quando *n* tende all'infinito, commettiamo un errore talmente piccolo che non influisce sul risultato finale.

LE RENDITE PERPETUE

valore attuale prodotto da una rendita unitaria perpetua immediata posticipata

$$\boxed{V = \frac{R}{i}}$$

essendo:

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1}{i}$$

LE RENDITE PERPETUE

Se la rendita è immediata anticipata, invece, si ha:

$$\boxed{V = R \cdot (1+i) \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = R \cdot (1+i) \cdot a_{\overline{n}|i} = R \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|i}}$$

$$\Downarrow$$

valore attuale prodotto da una rendita unitaria perpetua immediata anticipata

$$\boxed{V = (1+i) \cdot \frac{R}{i}}$$

essendo:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = (1+i) \cdot \frac{1}{i}$$

LE RENDITE PERPETUE

Se la rendita è perpetua differita e la prima rata viene riscossa o pagata dopo *p* anni si hanno le seguenti relazioni:

$$\boxed{V = R \cdot {}_{p-1/}a_{\overline{\infty}|i} = \frac{1}{i} \cdot (1+i)^{-(p-1)}}$$

valore attuale prodotto da una rendita unitaria perpetua differita posticipata

$$\boxed{V = R \cdot {}_{p/}\ddot{a}_{\overline{\infty}|i} = \frac{1}{i} \cdot (1+i)^{-p}}$$

valore attuale prodotto da una rendita unitaria perpetua differita anticipata

$$\boxed{{}_{p-1/}a_{\overline{\infty}|i} = {}_{p/}\ddot{a}_{\overline{\infty}|i}}$$

relazione fondamentale che vale sempre

LE RENDITE PERPETUE

ESEMPIO

Calcolare il **valore attuale di una rendita perpetua posticipata** con rata di €3800,00 l'anno, valutata al tasso annuo dell'1,1%.

$$V = 3800,00€$$
$$i_a = 1,1\% = 0,011$$

$$\boxed{V = \frac{R}{i}}$$

$$V = \frac{3800}{0,011} = 345454,55€$$

LE RENDITE PERPETUE

ESEMPIO

Calcolare il **valore attuale di una rendita perpetua** di €250,00 da riscuotere all'inizio di ogni semestre e valutata al tasso annuo del 3% (si tratta di una rendita perpetua immediata anticipata).

$$R = 250{,}00€$$
$$i_a = 3\% = 0{,}03$$

$$\boxed{V = \frac{R}{i} \cdot (1+i)}$$

$$i_2 = \sqrt[2]{1+0{,}03} - 1$$

$$i_2 = 0{,}01489$$

$$V = \frac{250}{0{,}01489} \cdot (1+0{,}01489) = 17039{,}79€$$

LE RENDITE PERPETUE

ESEMPIO

Dalla cessione di una rendita perpetua posticipata di rata trimestrale di €2400,00 ricaviamo €127631,58. Qual è il **tasso** di valutazione annuo?

$$R = 240{,}00€$$
$$V = 127631{,}58€$$

$$\boxed{V = \frac{R}{i} \Rightarrow i = \frac{R}{V}}$$

tasso trimestrale, dovendo essere conforme al periodo della rata

tasso annuo

$$i_4 = \frac{2400}{127631{,}58} = 0{,}0188 \Rightarrow i = (1 + 0{,}0188)^4 - 1 = 0{,}0773$$